DOMENICO
TERRES
Negoziante
di
Libri
NAPOLI
1780.

2242

CHRISTIANUS WOLFIUS CONSILIARIUS AULICUS HASSIACUS, MATHEMATUM ET PHILOSOPHIAE PROFESSOR
Daudet sculp. Lugd: 1731.

CHRISTIANI WOLFII,

POTENTISSIMI BORUSSORUM REGIS CONSILIARII INTIMI, FRIDERICIANÆ PRO-RECTORIS ET PRO-CANCELLARII, JURIS NATURÆ ET GENTIUM ATQUE MATHEMATUM PROFESSORIS ORDINARII, PROFESSORIS PETROPOLITANI HONORARII, ACADEMIÆ REGIÆ SCIENTIARUM PARISINÆ, SOCIETATUMQUE REGIARUM BRITANNICÆ ATQUE BORUSSICÆ MEMBRI,

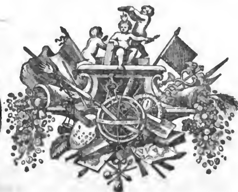
ELEMENTA MATHESEOS UNIVERSÆ.

TOMUS PRIMUS,

Qui COMMENTATIONEM DE METHODO MATHEMATICA, ARITHMETICAM, GEOMETRIAM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, & ANALYSIM, tam FINITORUM quam INFINITORUM complectitur.

EDITIO NOVISSIMA,

MULTO AUCTIOR ET CORRECTIOR.



GENEVÆ,

Apud HENRICUM-ALBERTUM GOSSE, & SOCIOS.

MDCCXLIII.

SERENISSIMO PRINCIPI AC DOMINO,

DOMINO,

WILHELMO,

HASSIÆ LANDGRAVIO,

PRINCIPI HERSFELDIÆ, COMITI

CATTIMELIBOCI, DECIÆ, ZIEGENHAINÆ,

NIDDÆ ET SCHAUMBURGI, &c. &c.

EXERCITUS EQUESTRIS FOEDERATI BELGII

GENERALI LOCUM TENENTI,

LEGIONIS PRÆTORIANÆ DESULTORIÆ CHILIARCHÆ,

NEC NON

OPPIDI TRAJECTI MOSANI SUPREMO

PRÆFECTO BELLICO, &c. &c.

PRINCIPI AC DOMINO CLEMENTISSIMO.

SERENISSIME PRINCEPS,
DOMINE CLEMENTISSIME,

Cientiæ Mathematicæ Imperatoribus, Regibus & Principibus ab omni ævo in pretio fuere, ut non modo munificentia sua eas promoverint, sed & ipsimet animum ad eas excolendas applicaverint. Non opus est, ut de ALPHONSO X *Castellæ ac Legionis Rege, &* ULUGH BEIGHO, TAMERLANIS MAGNI *nepote, Astronomiæ instauratoribus, de* MATTHIA *Hunga-*

Hungariæ Rege inventorum mathematicorum insigni remuneratore, *de* FRIDERICO II *Daniæ & Norwegiæ Rege atque* RUDOLPHO II *Imperatore* TYCHONIS *Mecænatibus*, *de* FERDINANDO, *magno Etruriæ Duce*, GALILÆI *Protectore*, *de* CAROLO II & LUDOVICO XIV *Angliæ & Galliæ Regibus*, *Societatum Scientiarum conditoribus*, *de Duce* BURGUNDIÆ, *Elementorum Geometriæ scriptore*, & *de pluribus aliis Principibus summis dicamus: Eccur enim e longinquo petenda sunt exempla, ubi domestica prostant? Cur ad vetusta provocandum, ubi præsentia intuemur? Nemo profecto ignorat, quæ* WILHELMUS IV. *Hassiæ Landgravius successu felicissimo, quo* TYCHONI, *Phœnici illi Astronomorum, judice* HEVELIO, *palmam dubiam reddidit; Astronomiæ & Mechanicæ instaurandæ gratia Cassellis molitus est. Et Orbis universus admiratur, quæ Magnus Parens Tuus*, CAROLUS, *Sapientis cognomen instar* ALPHONSI *dudum meritus, in omni Mathesi ac Philosophia experimentali præstitit, atque munificentiam tanto Principe dignam deprædicat, qua Artes mathematicas & Naturæ cognitionem promovet. Tu*, PRINCEPS SERENISSIME, *qui omnibus virtutibus emines, quæ Heroem in bello, Regnatorem in pace exornant, nullis Principum in Scientiis Mathematicis magno æstimandis secundus. Quare cum Elementa mea Matheseos universæ multo auctiora novoque habitu induta, ut Opus plane novum existimari debeant, denuo in lucem proferam, quo via plana ad omnem theoriam & praxin sternitur, veræque methodi leges, ad accurate & utiliter philosophandum vitæque negotia dextre gerenda apprime necessariæ, animo Lectoris sensim sensimque instillantur; nullus dubitavi*, PRINCEPS SERENISSIME, *ad pedes*

Tuos ea deponere, certo persuasus Tibi non improbatum iri meum in Scientiis humano generi adeo utilibus propagandis studium. Deus Te servet, Principum Hassiæ Decus! Ita vovet,

SERENISSIME PRINCEPS,

DOMINE CLEMENTISSIME,

SERENISSIMI NOMINIS TUI

MARBURGI d. 8.
Martii 1730.

Humillimus cultor
CHRISTIANUS WOLFIUS.

PRÆ-

PRÆFATIO.

ETsi nullo tempore, quo ſcientiis honos fuit, defuerint Viri egregii, qui præclaris ingenii ac virtutum dotibus ſupra communem mortalium ſortem evecti, divina illa Mathemata digna ſtatuerunt, in quibus elaborarent, nec infelici ſucceſſu ſuſpiciendis inventis eadem amplificarunt, quemadmodum Veterum monumenta palam loquuntur; ante noſtram tamen ætatem ad illud faſtigium non fuerunt evecta, in quo hodie conſtituta miramur. Neque indigna ſunt, quæ in dies magis magiſque excolantur & exploſa loquaci ſophiſtica in Scholas revocentur, cum neminem, niſi aut tardiore fuerit ingenio, aut ignarus artis oſor affectu præpeditam habuerit mentem, fore exiſtimem, qui non eorum puritatem, evidentiam ac ſublimitatem miretur, & ob utilitates innumeras inde in genus humanum redundantes de Arte noſtra præclare ſentiat. Mentem enim humanam valde perficit Matheſis, ad Philo-

ſophiam aliaque ſtudiorum genera & latius, & profundius, & utilius tractandum inſtruit, ad ſolidiorem doctrinam adminicula inexſpectata ſuppeditat, maximas ad vitam utilitates affert.

Non ignota loquor, non inexſpectata Mathematum peritis. Attamen nullus dubito fore, ut vulgus litteratorum ex ſuo ingenio alios judicans perſuadere conetur ignaris, ex præpoſtero in Scientias mathematicas ſtudio proficiſci has laudes. Quamvis autem non ea ſit penes me garrientium † autoritas, ut, quæ inſcite obſtrepunt, ſcite retundam; non tam quod plurimi inſtitutione indignos judicent, qui conviciis extorquere volunt, ut doceantur, & illos demum lumine dignos cenſeant, qui modeſte id deſiderant, quam quod in ſciolis erudiendis oleum operamque perdi pro comperto habeam, quippe qui tum (ut cum Horoccio * loquar) *pulchre ſibi diſputare videntur, ſi, quod arguendo evertere non poſſunt, tanquam ridiculum contemnant, aut puerilibus dicteriis adſperſum aliorum riſui exponant:* cum tamen mearum partium eſſe exiſtimem, ut generoſa atque excelſa ingenia ad ſtudia mathematica incendam atque inflammem; quid, quæſo, impedit, quominus evincam, non eſſe Mathematicos

† Autor ſum his hominibus, ut Præfationem legant, quam *Philippus* Melanchthon, vir non Mathematicis, ſed elegantioribus, ſed Philoſophicis, ſed Theologicis ſtudiis celebris, communis Germaniæ Præceptor, *Joannis* Vogelini Elementis Geometriæ præmiſit. Ex ea notulas quaſdam hinc inde adſpergemus, conſenſum *Philippeorum* cum noſtris manifeſtaturas. Ita ergo generatim ad rem noſtram Melanchthon: *Scio*, inquit, *has adhortationes apud eos, qui ſordidis ingeniis præditi ſunt, nihil proficere, qui præſtantium diſciplinarum dignitatem non proſpiciunt, aut ſectantur quaſdam vendibiliores artes, quæſtus gratia. Nam & mentes habent monſtroſas, & magno ſcelere turbant proportionem geometricam, cum non tribuunt ſuam artibus dignitatem. Sed rectæ ingenia, etiam mediocria, incitari poſſunt ipſa artium admiratione, ſi admoneantur, deinde ſi accedat artifex, qui commode tradat. Ideo ſpero aliquorum ſtudia commoveri poſſe.*

* In *Aſtronomia* Kepleriana *defenſa atque promota*, c. 1. p. 23.

maticos (liceat mihi denuo Horoccii verbis ‡ uti) *tam perfrictæ frontis, ut absurdas quasvis ampullas magno clamore ignaris divendant, modo in fucati laboris præmium brevissimo inanis gloriæ flatu intumescant & inter inconditos plaudentium strepitus placide sibi adulentur*; multo minus ita dibuccinare laudes suas, ut apud alios merito nullam inveniant.

Agedum, ergo! quis est, qui Scientias mathematicas & rerum evidentia ac sublimitate, & demonstrationum rigore ac profunditate, & ordinis pulchritudine ac concinnitate ceteris omnibus longe superiores mentem perficere negare ausit? Qui mentis dotes ignorat; qui judicium leve a gravi, ingenium hebes ab acri non distinguit; qui denique culmen perfectionum non prospicit, ad quod menti pervenire datum est. Tum demum, me judice, ingenii acie pollebis, si non modo clara ab obscuris, distincta a confusis, adæquata ab inadæquatis, explorata ab inexploratis, certa ab incertis, probabiliora a minus probabilibus discernere valebis, sed & ipsemet fueris exactus & perspicuus in definiendo, solers & circumspectus in observando, ingeniosus & accuratus in experimentando, severus & acutus in judicando, concinnitatis & rigoris tenax in demonstrando, patiens & profundus in meditando, sagax & expeditus in inveniendo. Sed quomodo, quæso, comparantur habitus tam præclari? Non nisi crebro exercitio. Multus ergo sis necesse est in notionibus evolvendis, in demonstrationibus concipiendis, in problematibus resolvendis, nec proletaria in meditando & inveniendo collocanda est opera.. Cum adeo disciplinas, quæ huic scopo conveniant, præter mathematicas nullas noverint, qui

** 2 Mathe-

‡ In *Prolegomen.* p. 8.

mathematicas & ceteras eadem diligentia pertractarunt; ſtudium mathematicum ad acuendum judicium apprime neceſſarium pronunciamus & ſine eo ad ſolidam rerum cognitionem perveniri poſſe negamus. *

Equidem non ignoro, homines quoſdam, cum ſint in Matheſi hoſpites ac plane rudes; ſe jactare, quod audiverint Mathematicos de rebus mathematicis optime, de aliis a Matheſi alienis peſſime judicantes: veruntamen quod ad tam inconſiderate dicta reponam, non unum habeo. Quoniam nimirum non quævis terra Mathematicum alit (neque enim creantur in Academiis ut Doctores;) ſane non apparet, unde imperitus Artis obtrectator certus fuerit factus, ſibi rem cum Mathematico fuiſſe. Quid ſi Agrimenſorem viderit, aut Architectum, aut Conſpicillorum politorem, aut Inſtrumentorum fabrum, aut Virum, cui data eſt docendi quidem, ſed non ſciendi Matheſin poteſtas? Quis enim adeo inſanus eſt, ut unumquemque cenſeat titulo, quem fama fallax aut fortuna cœca eidem tribuit? Non inſolitum, nec inauditum, ut, quem ignari judicant Matheſeos apprime peritum, quem Profeſſores *Euclidis, Apollonii, Archimedis alterius* elogio etiam poſt fata mactant, idem tamen a Mathematicis ſummis, vere idoneis harum rerum arbitris, Matheſeos imperitus appelletur. Enimvero etiamſi hoc demus, Artis noſtræ oſorem audiviſſe Mathematicum de rebus ad Matheſin non ſpectantibus judicantem; nondum tamen video, unde cognoverit, quod male judicaverit: aliter enim niſi judicaret qui ingenii

* MELANCHTHON, loc. cit. *Si qui non totos ſe huic ſtudio dedent, tamen his ad judicia formanda --- opus eſt cognitione Elementorum Geometriæ.* Idem paulo ante: *Cum demonſtrationes Geometriæ maxime ſint illuſtres; nemo ſine aliqua cognitione hujus artis perſpicit, quæ ſit vis demonſtrationum, nemo ſine ea erit artifex methodi.*

ingenii acumine pollet, aliter qui haud altius vulgo ſapit, inter ingenium acre & hebes nullum foret diſcrimen; nec concedendum erat, in Matheſi cum laude verſatis res quaslibet profundius ſcrutari datum eſſe. Denique ſi vel maxime aliquando contigerit, Mathematicum aliquem de rebus ad ſe non pertinentibus male judicaſſe; hinc ſaltem colliges, ipſum occaſione ita ferente de re, quam nondum meditatus fuerat, per præcipitantiam, vitium ἀγεωμετρήτοις tantum non ſemper familiare, ſtatuiſſe.

Neque enim defendimus, quod eadem opera, qua quis Mathemata ſibi familiaria reddit, ceterarum quoque rerum cognitione animum imbuat, & criminationis loco habemus, ſi qui per malitiam affirment, quod Mathematici glorientur, penes ſe ſolos eſſe principia veritatis; ſed quod Matheſeos cultura reliquis ſtudiis præmiſſa efficiat, ut alias diſciplinas facilius, rectius & profundius percipere poſſis, ubi ad eas induſtriam atque aſſiduitatem attuleris, id vero eſt quod aſſeveramus. Neſciò vero, qua fronte, qui inexperta loquuntur, majorem ſibi fidem haberi velint, quam iis, qui niſi experta non confitentur. Utinam tandem, qui Eccleſiæ ac Reipublicæ præſunt, caverent ne ad cetera ſtudia tractanda animum appellerent, niſi Mathematica cognitione imbuti, neque ullus dubito fore ut aliam Eccleſiæ, aliam Reipublicæ faciem contueremur †. Ut enim taceam, quæ a doctrina in Eccleſiam

† MELANCHTHON, loc. cit. *Jacent deſertæ & neglectæ Artes mathematicæ, multis jam ſeculis. Nam proxima ætas* (quidni & noſtra ?) *juventutem ab hac vera Philoſophia ad inſulſſimas cavillationes abduxerat. Nunc, poſtquam hæ exploſæ ſunt e Scholis, annitendum erat, ut pura & nativa Philoſophia traderetur, quæ conduceret ad ſolidam doctrinam conſequendam. Nam hæc noſtra ætas ſatis commonefacit nos, quantum opus ſit Reipublicæ perfecta doctrina, quia multi paſſim, tum inopia judicii, tum quia diſerte explicare nihil poſſunt, ſparſerunt aut defendunt opiniones abſurdas & confuſaneas, ex quibus in Eccleſia magna certamina, magnæ diſſenſiones extiterunt. Nec finis horum malorum erit ullus, niſi ad veram & eruditam ſtudiorum rationem juventus revocata fuerit.*

& Rempublicam redundant, emolumenta, plurimum refert, si, qui ob eruditionem utrique præficiuntur sint assidui, considerati, moderati & veritatis amantes, quos Matheseos studium efficit, ubi ita tractetur, ut amplificet usum rationis.

Quotquot humanæ mentis vires cognoscere student earumque usum scrutari gestiunt, eos ad Mathematum culturam invitamus. Ostendet Algebra atque Geometria sublimior, nihil esse tam abditum, quin detegatur: docebit Astronomia cum Geographia, nihil esse a sensibus hominum tam remotum, quin id satis distincte cognoscere & accurate dimetiri valeamus: testabitur Calculus astronomicus, quanta certitudine futura Cœli phænomena prædicere liceat, etsi Genius nullus motuum, quibus sidera feruntur, leges Astronomis revelaverit: Optica cum Astronomia discrimen inter repræsentationes rerum in intellectu & in imaginatione monstrabit: Arithmetica, Trigonometria & Analysis regulas generales suppeditabunt, quibus in inveniendo dirigatur intellectus & una cum sensibus compescatur imaginatio, ne meditationes turbet: Methodus denique mathematica rectum rationis usum manifestabit

Quanta sit vis Mathematum in Scientia naturali, ex Statica, Mechanica, Hydrostatica, Aerometria, Hydraulica, Optica, Catoptrica, Dioptrica, Astronomia & Geographia abunde perspicitur: quæ omnes argumenta quædam Physica solidius atque profundius pertractata exhibent, quam sine Matheseos principiis fieri poterat. Nonne enim Physici est explicare motum, gravitationem corporum, proprietates aëris, Phænomena visus, structuram Universi, naturam & pro-

proprietates corporum Mundi totalium? Quod si vero quæ de motu solidorum in Statica & Mechanica, de gravitatione corporum in fluidis in Hydrostatica, de motu fluidorum in Hydraulica, de aëre in Aërometria, de visu in Optica, Catoptrica & Dioptrica, de corporibus Mundi totalibus eorumque motuum legibus in Astronomia & Geographia traduntur, cum iis conferre dignatus fueris, quæ de iisdem argumentis in Physicorum systematibus occurrunt, demtis præsertim iis, quæ ex Mathematicorum voluminibus descripta sunt; quantum discriminis intercedat inter doctrinas physicas principiis mathematicis superstructas atque Mathematicorum opera excultas, & inter ea dogmata quæ Mathematicorum opem adhuc desiderant, illicò constabit. Unde non miramur *Robertum* BOYLIUM, de Scientia naturali experimentando præclare meritum, ita scribentem: † *De Mathematica nonnihil tibi propositurus sum, cum inprimis in finem, ne forte (quod & mihi olim evenit) seducaris Philosophorum istorum modernorum autoritate, qui cum Physici objectum sit materia, mathematicas disciplinas, tanquam abstractis saltem quantitatibus & figuris occupatas, studio naturali obesse magis, quam prodesse contendunt. Quamvis enim opinionem ipsius* KEPLERI, *trium Imperatorum Mathematici aliorumque Astronomorum recentium absurdam, hominibus persuadentem, quod Mathematica quempiam ad Studium naturale facilius absolvendum non omnino idoneum reddere possit, restabilire & defendere aliquando conatus fuerim; ingenue tamen confiteor, quod experimentis meis in specie Mechanicis,* *Mathe-*

† In *Considerationibus circa utilitatem Philosophiæ naturalis experimentalis*, Exercitat. VI. §. 1. & 2. p. m. 483.

Mathematicæ in Physica usum ingentem mihi demonstrantibus, sæpe jam exoptarim, ut in Geometriæ theoriam & studium Algebræ speciosæ, quam puer ferme addidici, majorem impendissem partem temporis & industriæ, quæ Planimetriæ & Fortificatoriæ (de qua me integrum Tractatum scripsisse memini) aliisque practicis Mathematicæ partibus a me attributa fuit. Imo nec miramur ingenue profitentem: * *Vereor, implorandam esse à Mathematicis lectoribus veniam pro iis rebus, quas, si in Mathesi magis pollerem, accuratius tractassem.* Alibi nimirum ostendi †, tum demum in Scientia naturali ad certudinem seu evidentiam perveniri & dominium in res creatas obtineri, si Mathesis ad Physicam applicetur.

Nisi utilitates, quas Mathesis ad vitam affert, sponte sua occurrerent attentis; non modo Arithmeticæ, Geometriæ practicæ, Architecturæ, Mechanicæ, Hydrostaticæ, Hydraulicæ usus in Oeconomia amplissimus facile ostendi, sed etiam evidenter demonstrari posset, maximam felicitatis humanæ partem Mathesi superstructam: ut taceam commoda, quæ Mathesis præstat absolutis studiis Academicis in exteras regiones excurrentibus, quibus maxima utilitatis ac voluptatis ex itinere capiendæ pars perit, si in illa fuerint hospites ac peregrini.

Cum adeo disciplinarum mathematicarum utilitates innumeras mente attenta perpenderem, propria autem experientia edoctus non ignorarem, desiderari adhuc Matheseos universæ Elementa, quæ ad illas consequendum sufficerent; ante triennium idiomate patrio Elementa Matheseos universæ publici

* In Præfat. ad *Nova Experimenta Physico-Mechanica de vi Aëris elastica.*

† In Præfat. ad *Elementa Aërometriæ*, A. 1709. seorsim edita.

blici juris feci, in quibus ea potissimum explanavi, quæ ad praxin tendunt, adeoque theorias prætermisi, quarum non adeo manifestus est usus. Dum liber adhuc sub prælo sudabat, contigit ut multi eundem expeterent † : quo ipso adductus Bibliopola desiderabat, ut eundem in sermonem Latinum transfunderem. Hujus ego desiderio annuens bonam jam operis partem habitu Romano indutam prælo destinaveram, cum consultius mihi videretur, si theoretica uberius exponerentur, quam in Opere Germanico ad juvandum primos tyronum conatus composito fieri par erat, ut Latinum scilicet etiam satisfaceret ad sublimiora tendentibus. Quæ igitur sermone Latino prodeunt Elementa, a Germanicis multum differunt, novoque ordine digesta sunt. In iis elaborandis tantum operæ collocare non licuit, quantum opus istiusmodi requirere videbatur. Præterquam enim quod sex, minimum quinque per diem horas instituendæ juventuti Academicæ, cum in Mathesi, tum in Philosophia impendam; varia obstacula alia impediverunt, quo minus omnia ex voto fierent. Quoniam nimirum Bibliopola, qui aliquos jam sumptus in editionem fecerat, instabat ut opus cœptum perficerem; singulas fere propositiones typis describendas tradere coactus fui, quamprimum a me in chartam conjectæ essent, typothetis scilicet quotidie pensum semidiurnum a manu mea exspectantibus. Quodsi ergo quædam in hoc opere deprehendis, quæ jure displicent, ea nec mihi placere scias velim. Si totum displicet, ut meliora des hortor, gratum & mihi & aliis facturus. Interea patere, ut hoc duce utan-

† Elementa ista Germanica ab eo tempore jam quarta vice typis rescripta, & in compendium redacta, quod ter lucem adspexit.

utantur, quotquot ad ſolidam Mathematum cognitionem, non ſine operæ, ſumptuum & temporis compendio adſpirant, quamdiu deſit magis fidus. Theoretica & practica eadem induſtria expoſui: Ex his unuſquiſque ſeligat, quæ ad palatum ſuum eſſe exiſtimaverit: reliqua aliis, non ſibi dicta putet. Indicem geminum ſubjunxi: quorum alter eſt rerum atque verborum, ut his Elementis etiam inſtar Lexici Mathematici uti poſſint, quorum ſtudia eodem juvantur; alter Elementa *Euclidea* cum noſtris confert, ut, quæ ex EUCLIDE paſſim citantur, etiam in noſtris inveniri poſſint, nec *Euclideis* habeant opus, qui noſtra poſſident. Vale, Lector benevole, & his noſtris utere. Tomum alterum, qui Opticam, Catoptricam, Dioptricam, Perſpectivam, Trigonometriam Sphæricam, Aſtronomiam, Chronologiam, Geographiam, Gnomonicam, Pyrotechniam, Architecturam militarem atque civilem, una cum Bibliotheca Mathematica complectetur, propediem exſpectans. Dabam Halæ Magdeburgicæ, ipſis Calendis Octobris A. 1713.

PLATO apud *Theonem Smyrnæum*, Cap. I. p. 20.

Adoleſcentibus eorumque ætati conveniunt Diſciplinæ Mathematicæ, quæ animam præparant & defæcant, ut ipſa ad Philoſophiam capeſſendam idonea reddatur.

MONITUM

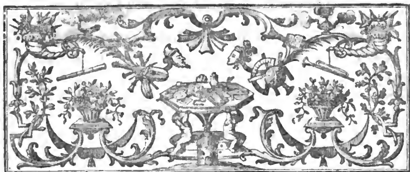
MONITUM AUTORIS
DE EDITIONE NOVA.

Novam horum Elementorum Editionem daturi operam dedimus, ut multo correctiora prodirent, multo etiam auctiora. Etenim in singulis disciplinis ea adjecimus, quæ adhuc desiderari posse videbantur & viam ad ulteriora sternunt: quo ipso contingit, ut disciplinæ nonnullæ novam plane formam adeptæ fuerint, &, quæ in Editione priore per duos Tomos digesta fuerant, in hac posteriore quatuor Tomis complecti necesse fuerit. Ita in Tomo primo, qui nunc prodit, ut taceamus, quæ passim interspersa sunt, Arithmeticæ accesserunt Capita nonum & decimum integra, de fractionibus decimalibus & sexagesimalibus; Geometriæ Caput secundum partis posterioris de sectione & situ planorum; Trigonometriæ & Algebræ Problemata varia, quæ vel utilitate sese commendant, vel quædam inveniendi artificia continent per cetera nondum insinuata. Accessere etiam tum Geometriæ, tum Analysi finitorum, tum Analysi infinitorum figuræ novæ Tabulis æneis incisæ. Et quoniam Philosophiam certam ac utilem effecturi Mathematum notitiam amplificamus, ut ad eam capessendam animi defæcati præparentur,

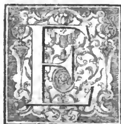
nuperque in Opere Logico † methodum, quæ convenit doctrinæ solidæ, accuratius delineavimus, quam hactenus ab aliis factum fuerat, ac inprimis genuinam demonstrationum formam distincte exposuimus; ideo demonstrationes ita digessimus, ut exempla regulis ad amussim respondeant, & Elementa hæc manu assidua volventibus naturalis ratiocinandi modus sua veluti sponte sese insinuet, nascanturque in animo ideæ, quæ Logicæ præceptis respondent. Nulli igitur dubitamus fore, ut, qui in his Elementis attenta mente perlegendis fuerint assidui fructus eximios percipiant: id quod quemadmodum speramus, maxime optamus. Dabam. Marburgi Cattorum, d. 11. Martii A. 1730.

† Prodiit A. 1728. in 4°.

MONITUM.



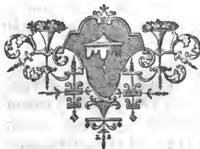
MONITUM AUTORIS
DE
EDITIONE NOVISSIMA.



LEMENTA nostra Matheseos universæ abunde sese commendarunt iis, qui brevi temporis spatio ac magno laboris compendio vel eos in Mathesi progressus facere decreverunt, ut ad præclara Summorum Mathematicorum inventa, quæ nostro ævo magno numero prostant & in dies augentur, pateret aditus. Quoniam vero in Editiones anteriores plurima irrepserunt vitia typographica, nonnulla etiam, quæ festinanti calamo debentur; optandum omnino erat, ut correcta extaret Editio, ne quid utilitati eorum decederet. Nemo ignorat, quam vastum sit illud reformandæ Philosophiæ opus, quod condere cœpimus. Ea jam sumus ætate, quippe in anno climacterico magno constituti, ut, si vel maxime Numen optimum vitam ac corporis animique vires diutissi-

me

me conſervet, eidem tamen abſolvendo non ſufficere videatur reſiduum adhuc temporis ſpatium, præſertim cum minimam ejus partem iſti labori impendere detur. Hortantur nos plurimi tam Exteri, quam Germani, ut tempus omne in Opere philoſophico continuando conſumamus, additis rationibus, quæ plurimum apud me valere debent. Nobis itaque conceſſum minime videbatur, ut correctam Elementorum Matheſeos Editionem daremus. Enimvero cum a primis, quod Græci ajunt, unguiculis ſtatuerimus non nobis vivere, ſed aliis, aliisque inſerviendo conſumi; Elementa noſtra revidere &, quæ irrepſerunt, errata emendare placuit, eorundemque Editorem hortati ſumus ut correctionem typorum committeret Mathematum perito & in iis corrigendis ſedulo. Quodſi tamen nonnulla forſan adhuc attentionem noſtram ſubterfugerint, ea Lector benevolus boni ac æqui conſulet.



DE

DE METHODO MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

PRÆFATIO.

I quid mei judicii eſt, operam non inanem ſumit, qui Methodum Mathematicorum diligentiſſime rimatur. Ejus enim vim qui tenet, is non modo ad Mathemata percipienda animum, quantum poteſt, attendit & rationes evidentiæ illorum funditus perſpicit; verum ad alias etiam diſciplinas, utut labore non adeo facili, cum fructu tamen prorſus inſigni, eandem transfert. Quodſi vero Matheſis non aliam, præter hanc unicam, cultoribus ſui afferret utilitatem; eidem tamen gnaviter incumbere deberent quot-

quotquot disciplinarum studia ingrediuntur. Eumque in finem studium mathematicum tantopere commendant Viri docti ac intelligentes, quos inter (*a*) LOCKIUM, (*b*) MALEBRANCHIUM, (*c*) TSCHIRNHAUSIUM nominasse sufficiat, quorum in Philosophia rationali illustranda solertia haud paucorum opinionem vicit. Hanc igitur de Methodo mathematica Commentationem, mole exiguam, sed rerum ubertate gravem, Elementis Matheseos universæ præmisi, ne in iis desiderari paterer industriam meam, quorum ad recte philosophandum quam maxime necessaria est cognitio: (*d*) inprimis cum exiguus admodum sit eorum numerus, quibus interiora methodi sunt perspecta; multo minor autem illorum, qui methodo mathematica prompte utuntur. Cæterum hæc Commentatio de Methodo, singulari cum attentione perlegenda, &, ubi Arithmeticæ ac Geometriæ Elementa evolvuntur, præcepta methodi sunt relegenda; tum ut penitus intelligantur, tum ut appareat, quomodo iis satisfiat. Ita demum Matheseos studium vere acuet intellectum,

(*a*) In Tractatu *De directione ingenii* (qui inter *Opera posthuma* idiomate Anglico *Londini* 1706, edita habetur) p. 30.
(*b*) *De inquirenda veritate*, lib. 6. c. 6. & 7.
(*c*) In *Introductione ad Mathesin & Physicam* Germanice conscripta p. m. 17. & seqq.
(*d*) Uberius huc spectantia exposuimus in Logica, seu Philosophia rationali.

CON-

CONSPECTUS COMMENTATIONIS
DE
METHODO MATHEMATICA.

Methodus mathematica definitur §. 1, *& ejus forma generaliter describitur* §. 2. *Hæc ut specialius explicetur, docetur quid sint Definitiones* §. 3, *& harum gratia traditur explicatio Notionum, tum in genere* §. 4, *cum in specie clararum* §. 6, *obscurarum* §. 7, *distinctarum* §. 8, *confusarum* §. 9, *adæquatarum* §. 10, 11, *& inadæquatarum* §. 12. *Ostenditur, quanam notiones in numerum Definitionum admittantur* §. 13, 14, 15. *Definitiones dividuntur in nominales & reales* §. 16, 17, 18. *Exponuntur quatuor modi inveniendi Definitiones nominales* §. 19, 20, 21, 22, *& quatuor alii inveniendi reales* §. 25, 26, 27, 28. *Indicatur quomodo innotescat, quod definitiones tam nominales* §. 23, 24, *quam reales* §. 29, *possibiles sint. Declaratur indoles Axiomatum & Postulatorum* §. 30, 31, 33, *& abusus quidam notantur* §. 32. *Differitur quoque de Experientia* §. 34, 35, 36, 37. *Definitur Theorema* §. 38, *& distincte agitur de propositionis partibus, Thesi, atque Hypothesi* §. 39, 40, 41, 42, *& de Demonstratione* §. 43, 45, 47; *ubi etiam docetur usus citationum Mathematicis in demonstrationibus solennis* §. 44. *Similiter declaratur Problematum* §. 48, *Corollariorum* §. 49, 50, *Scholiorum* §. 51, *ratio. Asseritur Methodi mathematicæ universalitas* §. 52, *& ratio redditur, cur interdum Mathesis judicium acuere debeat* §. 53, *interdum minus* §. 54. *Denique respondetur ad objectiones, quæ contra Methodum mathematicam a nonnullis afferri solent* §. 55, 56, 57.

DE METHODO MATHEMATICA
BREVIS COMMENTATIO.

§. 1. PER *Methodum mathematicam* intelligo Ordinem, quo in tradendis dogmatis suis utuntur Mathematici.

§. 2. Ordiuntur autem Mathematici a Definitionibus: inde ad Axiomata & Postulata; in Mathesi mixta, ad Experientias, seu Observationes, progrediuntur: his tandem Theoremata & Problemata superstruunt: ubique vero Corollaria & Scholia, si e re visum fuerit, annectunt.

§. 3. Sunt autem *Definitiones* primæ rerum notiones, quarum ope inter se distinguuntur, & unde, quæ de ipsis concipiuntur, reliqua deducuntur.

§. 4. Per *Notionem* quamlibet rei cujuslibet in mente repræsentationem intelligo.

§. 5. Notionum differentiam primus distincte tradidit sagacissimus LEIBNITIUS (*a*): quæ quanti sit ponderis, pauci hactenus agnoverunt.

§. *6*. Est scilicet *Notio clara*, quæ ad rem oblatam recognoscendam sufficit; ex. gr. quod figura data in numero triangulorum habeatur.

§. *7*. *Obscura* est *notio*, quæ ad rem oblatam recognoscendam non sufficit. Talis est, ex. gr. plantæ, ad cujus conspectum dubitas, utrum ea sit, nec ne, quam alio tempore alibi videras, & cui hoc vel illud nomen tribui suevit.

§. 8. Clara *notio distincta* habetur, si notas recensere valeas, ex quibus rem oblatam recognoscis: ex.gr. quod circulus sit figura, linea curva in se redeunte terminata, cujus singula puncta ab eodem puncto intermedio æqualiter distant.

§. *9*. *Confusa* est *notio* clara, si notas, ex quibus rem oblatam recognoscis, recensere minime valeas, utut in tales sit resolubilis: qualis est, ex. gr. notio coloris rubri.

§. 10. Distincta *notio adæquata* dicitur, si & notarum, ex quibus componitur, notiones distinctas habueris; ex. gr. notio circuli paulo ante tradita censetur adæquata, ubi curvæ in se redeuntis, puncti intermedii, distantiæ æqualis, & terminationis notiones distinctas habueris.

§. 11. In hac analysi cum progredi liceat, donec ad notiones irresolubiles perveniatur; notionum adæquatarum dari gradus manifestum est, in præsenti tamen non explicandos. Sufficit monuisse, quod notiones quædam confusæ admitti queant, quarum evolutio ad demonstrationes non apprime necessaria. Ita EUCLIDES non resolvit notionem æqualitatis, utut eadem notiones trianguli æquilateri, rhombi, & figurarum regularium ingrediatur. Propositiones enim, ad quarum demonstrationem necessaria erat, facile ipsi sine probatione concedi poterant; ex. gr. quod æqualia eidem tertio sint æqualia inter se; quod figuræ sibi mutuo congruentes sint æquales; quod æqualibus per æqualia multiplicatis facta sint æqualia, &c. Defectum scilicet analyseos supplent propositiones, quæ per experientiam satis certæ sunt.

§. 12. *Inadæquata* est *notio*, si notarum, quæ distinctam ingrediuntur, nonnisi confusas notiones habueris.

§. 13. In numerum Definitionum mathematicarum non admittuntur nisi notiones distinctæ, &, quantum fieri potest, aut pro re nata sufficit, adæquatæ.

§. 14. Hinc in Definitionibus subsequentibus non utuntur vocibus, nisi vel ex antecedentibus, vel aliunde, satis intelligatur, quæ res iis subjiciantur.

§. 15. Et, si quando notione confusa contenti sumus, res, ad quam spectat, obvia

(*a*) In *Actis Eruditorum*, An. 1684. p. 537.

obvia sit, necesse est, ut vel præsentem quandocunque libuerit percipere, vel sæpius jam olim perceptæ haud difficulter reminisci valeamus.

§. 16. Definitiones vero ad duas classes commode revocantur. Sunt nimirum aliæ nominales, aliæ reales.

§. 17. *Definitio nominalis* est enumeratio notarum ad rem oblatam ab aliis distinguendam sufficientium. Talis est Quadrati, si figura quadrilatera, æquilatera, rectangula esse dicatur.

§. 18. *Definitio realis* est notio distincta rei genesin, hoc est, modum quo fieri potest, exponens. Talis in Geometria est Circuli, si per motum lineæ rectæ circa punctum fixum describi concipitur.

§. 19. Ad Definitiones nominales multis modis pervenitur: quos inter primus nominari debet, si ad rem præsentem, quam percipimus attendimus. Hac ratione Astronomis innotuit, Eclipsin Lunæ esse privationem luminis Lunæ plenæ. Cum cura vero distinguenda sunt quæ distingui possunt; eaque fini singula primum sigillatim considerari, mox inter se conferri debent, ut Definitio notio distincta evadat, qualis (*vi* §. 13) esse debet.

§. 20. Definitiones hac vel alia methodo investigatas expendentes, varias plerumque determinationes animadvertimus, quibus omissis generaliores evadunt. Ex. gr. Si ex definitione Trianguli quod sit spatium tribus lineis comprehensum, linearum numerus expungatur; notionem Figuræ habebis, quod sit spatium lineis terminatum.

§. 21. Si determinationes in Definitionibus obvias consideres, alias iis geminas comminisci datur: qua ratione Definitiones aliæ inveniuntur. Ex. gr. Ubi perpendis figuram trianguli a ternario laterum numero dependere; quaternarium aut numerum quemcunque alium ternario majorem substitue, ut Definitio Figuræ quadrilateræ, aut multilateræ cujuscunque prodeat.

§. 22. Quemadmodum vero (*vi* §. 20) determinationes quædam omitti, sic etiam novæ superaddi possunt. Ex. gr. in definitione trianguli, species & ratio linearum, quam inter se habent, determinari potest. Ponamus nimirum lineas esse rectas; generalis notio trianguli in notionem Trianguli rectilinei abit. Ponamus porro esse latera omnia inter se æqualia; notio trianguli generalis in notionem Trianguli æquilateri degenerabit.

§. 23. Definitionum per methodum primam inventarum realitas extra omnem dubitationis aleam posita. Quis enim, quæ actu existere cognoscit, utrum esse possint, nec ne, dubitabit? Dubitaret enim, num perciperet, quæ se percipere sibi conscius est: id quod valde absonum. Ex. gr. Si quis Lunam deficientem intuetur; quod Eclipsin pati possit, dubitare nequit. Idem de illis Definitionibus judicium esto, quæ a possibilibus abstrahuntur.

§. 24. Alia vero Definitionum, per methodum tertiam & quartam inventarum, est ratio. Utrobique enim arbitrium regnat; sive, juxta tertiam, determinationes datas in alias similes convertas;

vertas; sive, juxta quartam, datis alias superaddas: nostrum autem arbitrium nullam rebus existendi necessitatem imponit. Licet ex. gr. spatium tribus lineis rectis comprehendi possit, inde tamen nondum liquet, quod etiam quatuor, quinque, aut pluribus quotcunque aliis terminari queat. Et quamvis tres lineæ rectæ spatium comprehendant; inde tamen nondum apparet, quod inter se æquales esse possint. Tales itaque Definitiones possibiles esse demonstrandum est: id quod Geometræ circa figuras præstant, dum earum constructionem tradunt.

§. 25. Definitiones reales, vel a priori inveniuntur, vel a posteriori innotescunt. A priori Definitiones reales investigabis, si ex plurium possibilium, quæ tibi innotuerunt, combinatione novum quoddam possibile producis; ex. gr. ex combinatione machinarum simplicium machinam quandam compositam, cujus nullam antea habebas notionem. Et in hac quidem methodo casui persæpe aliquid datur. Exemplo est compositio telescopii per fortuitam combinationem lentis convexæ cum concava detecta, narrante Borello.

§. 26. Difficilius idem præstatur; si, ex data Definitione nominali, realis invenienda. Hoc enim in casu notiones distinctas eorum evolvere tenemur quæ in ista continentur; ut appareat, qualia ad rei formationem requirantur: postea cognitiones jam ante acquisitas mente recolere debemus, visuri num talia succurrant, per quæ rei formationem concipere licet. Ex. gr. datur in Astronomia Definitio nominalis Eclipsis Lunæ, quod scilicet sit privatio luminis Lunæ plenæ; invenienda est Definitio realis ejusdem. Lumen igitur lunare & plenilunium meditari debemus. Ubi istud a Sole secundum lineas rectas in corpus lunare incidere, & tempore plenilunii ecliptici Lunam Soli diametraliter opponi, adeoque Tellurem duobus hisce corporibus interpositam in locum Soli oppositum projicere umbram succurrit; haud difficulter innotescit, Eclipsin Lunæ oriri, si ea umbram Terræ ingrediatur.

§. 27. A posteriori Definitiones reales innotescunt, si rei formationi præsentes attendimus. Ex. gr. Si quis videat in campo circulum describi, fune circa clavum fixum in gyrum acto; is genesin circuli concipit per motum lineæ rectæ circa punctum fixum.

§. 28. Ad Definitiones reales quoque pervenitur, dum compositum totum in suas partes simplices resolvitur; quod in organicis potissimum locum habet. Hac ratione, ex. gr. structuram machinæ jam extantis assequimur.

§. 29. Circa hoc Definitionum genus duo consideranda sunt, antequam de illarum possibilitate judicare licet; nempe 1°. utrum ea existant, aut existere possint, nec ne, quæ ad genesin rei concurrere assumimus; 2°. num ab iis proficisci queant, quæ in formatione rei iisdem tribuimus; id quod ex natura Definitionis realis (§. 18.) liquet. Horum vero certitudinem, vel experientia, vel eorum quæ per consequentias legitimas alio tempore deduximus, remi-

reminiſcentia conſequimur. Ita, ex. gr. in Definitione Circuli ſuperius (§. 27.) tradita, per experientiam claret lineam rectam circa punctum fixum in gyrum agi poſſe. Aſt, in Definitione Eclipſis lunaris, ratione, experientia licet ſtipata, aſſequimur Lunam Telluris umbram ingredi poſſe.

§. 30. Definitiones tam reales, quam nominales, cum in ſe conſiderari, tum inter ſe conferri poſſunt. Quicquid ex conſideratione eorum, quæ in una Definitione continentur, immediate deducitur, *Axioma* vocatur, ſi quid rei convenire, aut non convenire enunciet; *Poſtulatum* vero, ſi quid effici poſſe affirmet, vel neget. Ex. gr. Ex geneſi Circuli, liquet omnes rectas ex centro ad peripheriam ductas inter ſe æquales eſſe, cum unam eandemque lineam in diverſo ſitu referant. Hæc adeo propoſitio in Axiomatum numero habetur. Aſt dum per eandem Definitionem intelligitur, ex quovis puncto, quovis intervallo, circulum deſcribi poſſe: id inter Poſtulata collocatur.

§. 31. Quoniam igitur Axiomatum & Poſtulatorum veritas per intuitum Definitionum, ex quibus fluunt, cognoſcitur, demonſtratione nulla indigent. Vera enim eſſe intelliguntur, quam primum realitas Definitionum fuerit evicta. Et hoc intuitu *Propoſitiones per ſe notæ*, item *ex terminis manifeſtæ* dicuntur.

§. 32. Multi hac Axiomatum proprietate abutuntur, dum præmiſſas ſyllogiſmorum, quas probare neſciunt, pro Axiomatibus venditant. Hinc videas in Axiomatum numerum referri propoſitiones, quas ſine probatione non admittunt intelligentes. Equidem negandum non eſt ipſum EUCLIDEM, qui in demonſtrando ſe virum præſtitit, propoſitiones utique demonſtrabiles in Axiomatum numerum retuliſſe, propterea quod æqualitatis, congruentiæ, lineæ rectæ, aliarumque rerum notiones explicare non poterat: monuimus tamen jam in ſuperioribus (§. 11.), ipſum non ſuppoſuiſſe niſi propoſitiones, quarum certitudo ſtatim cuique patet, per recordationem vel maxime confuſam eorum quæ olim ſæpius experti ſumus, aut etiamnum, ſi ita viſum fuerit, denuo extemplo experiri poſſumus; immo quibus in judicando tantum non quotidie utuntur omnes; quale ex. gr. eſt, quod eidem tertio æqualia ſint æqualia inter ſe, item quod figuræ & lineæ rectæ ſibi mutuo congruentes ſint æquales. EUCLIDIS igitur exemplum abuſum, quem taxamus, minime tuetur.

§. 33. Notandum nimirum, eo minorem fieri Axiomatum numerum, quo ſufficientius notiones evolvuntur. Immo, ſi verum fateri fas eſt, vera Axiomata non ſunt niſi propoſitiones identicæ.

§. 34. Cum Axiomatibus & Poſtulatis etiam *Experientiæ* nonnunquam confunduntur. Experiri autem dicimur, quicquid ad perceptiones noſtras attenti cognoſcimus: ex. gr. dum, accenſa candela, conſpicua fieri videmus quæ ante non apparebant.

§. 35. Experientiæ itaque ſunt rerum ſingularium, quoniam nonniſi res ſingulares

gulares percipimus. Quamobrem ad illas provocans casum singularem in medium proferre tenetur, nisi vel sensui, vel memoriæ fuerint obviæ: id quod in Mathesi exactissime observatur. Neque enim, ex. gr. in Astronomia Solis orientis & occidentis Observationes recensentur; utpote quotidianæ, ac omnibus satis notæ. Diametri vero apparentis Planetarum Observationes, a diversis Astronomis, tempore diverso, diversisque instrumentis celebratæ, fideliter referuntur; cum non in cujusvis potestate existant.

§. 36. Mathematici quoque Experientias a conclusionibus inde deductis accurate distinguunt; aliis ut plurimum has cum istis confundentibus. Ex. gr. quod, candela accensa, corpora, quæ ante non apparebant, in conspectum prodeant, per Experientiam innotescit. Quod si vero perpendens, lumen in causa esse cur tenebris discussis appareant, & una expendens rerum naturalium eodem modo se habentium eundem esse effectum, infero; Quicquid lumine collustratur, videri potest: hæc propositio non in Experientiarum, sed conclusionum per legitimam consequentiam inde derivatarum numerum referenda.

§. 37. Istiusmodi conclusiones, omissis Experientiis, commemorantur, si modus, quo ex his eliciuntur, omnibus fuerit cognitus atque perspectus. Ex. gr. maximam Solis declinationem non immediate metimur, sed ex data elevatione æquatoris & altitudine meridiana Solis in solstitio invenimus. Proprias igitur de ea observationes traditurus, non altitudinem Solis meridianam in solstitio observatam annotet opus est; sed sufficere potest, ut ipsam declinationem statim indicet. Si enim constet, quantam elevationem æquatoris assumserit; nec quanta meridiana fuerit altitudo Solis ignoratur. Quod si vero non appareat, quomodo propositio data ex prævia quadam Experientia eliciatur; casus singularis omnino adducendus, ut ratio deductionis ad examen revocari possit. Quod enim aliquid perceperis cum demonstrare nequeas; ut credatur jure poscis: sed quomodo unum ex altero deductum fuerit, cum rationis examini subsit, ut fides deductis habeatur sine ratione flagitas.

§. 38. Propositio theoretica ex pluribus Definitionibus inter se collatis eruta *Theorema* appellatur. Ex. gr. Si, in Geometria, Triangulum cum Parallelogrammo super eadem basi & ejusdem altitudinis confertur, & partim immediate ex ipsis eorundem Definitionibus, partim ex aliis ipsorum proprietatibus jam ante erutis infertur; Parallelogrammum esse Trianguli duplum: ea propositio in Theorematum numerum referenda.

§. 39. Duo autem sunt, quæ in omni Theoremate attentionem merentur, *Propositio* nempe, atque *Demonstratio*. Ista quidem enunciatur, quid rei cuidam sub certis conditionibus convenire possit, quid non: in hac autem rationes exponuntur, ob quas intellectus illud ipsi convenire concipere valet.

§. 40.

§. 40. Absolute possibile non est nisi Ens a se: reliqua vero omnia tantum admisso alio possibilia esse intelliguntur, hoc est, nil eorum est sine quadam conditione. Hæc igitur in Propositione una exprimenda. E. gr. triangulum est dimidium parallelogrammi, si bases & altitudines fuerint sigillatim æquales. In Propositione itaque, tam basium, quam altitudinum æqualitas exprimenda. Hinc quælibet Propositio in *Hypothesin* & *Thesin* commode distinguitur; quarum ista conditiones recenset, sub quibus aliquid affirmatur, vel negatur; hæc vero complectitur quod, vel affirmatur, vel negatur. Ex. gr. in Propositione allata, Hypothesis est, *si triangulum & parallelogrammum super æquali basi & ejusdem altitudinis existant;* Thesis autem, *illud hujus dimidium est.*

§ 41. Notandum vero, si in ipsa rei Definitione conditiones, de quibus dixi, continentur, Hypothesin distincte non exprimi. Ex.gr. si tres in triangulo anguli 180 graduum dicantur; Hypothesi carere videtur Propositio: quæ tamen statim comparet, si pro voce trianguli definitionem ejus substituas. Ita enim habet Propositio: si quædam figura tribus lineis rectis terminatur, tres habet angulos junctim sumtos duobus rectis æquales. En Hypothesin, quæ urget, ut tres lineæ rectæ spatium comprehendant.

§. 42. Datur autem in Propositione affirmativa necessarius nexus inter Hypothesin atque Thesin; in negativa autem nullus concipi potest, sed hæc illi repugnat. Quoniam scilicet in subjecto deprehenditur, quod Hypothesis involvit; ei quoque convenire debet, quod in Thesi continetur. E. gr. in hoc Theoremate, quod *triangulum sit dimidium parallelogrammi super eadem basi & ejusdem altitudinis*, primum triangulo tribuimus basin & altitudinem basi ac altitudini parallelogrammi æquales; dein asserimus, quod sit parallelogrammi dimidium. Posterius concipitur propter prius.

§. 43. Nexum inter Thesin & Hypothesin in Propositionibus affirmativis, repugnantiam in negativis, *Demonstratio* manifestat. Eorum igitur Definitiones, quæ in Hypothesi ac Thesi continentur, eorundemque proprietates, ex istis derivatæ, aut aliunde cognitæ, Demonstrationum principia existunt. Quoniam vero in Mathesi principia non admittuntur, nisi quæ ante fuerunt evicta; Definitiones ac Propositiones, quibus Demonstrationes superstruuntur, citari solent; partim ut appareat, genuina principia adhiberi; partim ut ignaris constet, unde ipsorum certitudo haurienda.

§. 44. Enimvero citationes Definitionum, Axiomatum, Postulatorum, Theorematum & Problematum non exiguum habent usum; nec sine ratione in Mathesi singulis cogitationum generibus singula nomina imponuntur. Demonstratio namque non convincit, nisi principiis demonstrandi extra dubitationis aleam positis. Quamobrem ex citationibus liquet, quænam tanquam vera supponenda sint, antequam verita-

veritatis propositionis datæ convinci possis. Et quoniam Definitiones primi conceptus existunt, Axiomata vero ex iis immediate deducuntur, Theoremata vero, vel immediate, vel mediate, ex iisdem derivantur; ex nomine veritatis cujuslibet, ad quam in Demonstratione provocatur, statim addiscitur, utrum multa supponenda sint, nec ne, & quo ordine sit procedendum, ut convictio locum habeat. Immo cum ad veritatem Definitionum, Axiomatum & Postulatorum, Theorematum & Problematum, dijudicandam peculiaribus artificiis opus sit; nomina veritatum citatarum simul methodos in memoriam revocant, quibus principia demonstrandi persuadeas convincendo.

§. 45. Non alia vero est ratio ex principiis conclusiones inferendi, quam quæ in omnibus libellis logicis, ubi de syllogismo agitur, dudum exposita. Sunt enim Demonstrationes Mathematicorum congeries quædam enthymematum, ita ut omnia vi syllogismorum concludantur, omissis saltem præmissis, quæ vel sponte meditanti occurrunt, vel per citationes in memoriam revocantur. Perfecta autem ut sit Demonstratio, præmissæ syllogismorum novis syllogismis tamdiu probandæ sunt, donec perveniatur ad syllogismum, in quo præmissæ sunt, vel Definitiones, quas jam constat esse possibiles, vel Propositiones aliæ identicæ.

§. 46. Equidem demonstratu haud difficile foret, (*a*) genuinam Demonstrationem, quæ convictionem plenariam pariat, fieri non posse, nisi cogitationes nostræ juxta regulas syllogisticas dirigantur; his tamen ambagibus in præsenti opus non est. Cum enim de quæstione facti disputemus; exempla allegasse sufficit. Scilicet non ignotum est, CLAVIUM Demonstrationem Propositionis primæ Elementi primi EUCLIDIS in syllogismos resolvisse: immo HERLINUM atque DASIPODIUM sex priora Elementa EUCLIDIS & HENISCHIUM integram Arithmeticam per syllogismos in forma exhibitos demonstrasse.

§. 47. Equidem non ignoro esse, hac nostra præsertim ætate, non paucos qui sibi persuadent Demonstrationum mathematicarum formam a legibus syllogismorum abhorrere, multo minus concedere, illas vim omnem ad convincendum ab his unice habere; sed nec me latet, contrarium videri Viris non modo præclara judicii vi pollentibus, sed & attentione magis severa utentibus; quorum autoritas me permovit, ut eam in rem penitius inquirerem & sic præjudicium ex præcipitantia in judicando ortum cognoscerem. Fatetur certe LEIBNITIUS (*b*), Vir in Mathesi & omni eruditione reliqua summus, *firmam esse demonstrationem, quæ præscriptam a Logica formam servat.* Similiter *Johannes* WALLISIUS, Mathematicus profundus (*c*), agnoscit, *id, quod in Mathesi proponitur probandum, syllogismi unius pluriumve ope deduci.* Immo

(*a*) Ostendimus id in *Logica* §. 551, & seqq.

(*b*) *Acta Erudit.* A. 1684, p. 541. Conf. *Essais de Theodicée* p. 37, 40, 41, 73. (*c*) *Operum Mathem.* Vol. 3, f. 180, hoc est *Logic.* lib. 3, c. 22.

Immo ingeniosissimus etiam HUGENIUS (*d*) observavit, ***paralogismos in Mathesi sæpius vitia formæ existere.*** Verum enimvero ne autoritatibus magis, quam rationibus (*e*) pugnare videar (quanquam in hoc argumento maximum pondus habeat tantorum Virorum autoritas,) fontes præjudicii vulgaris retegere libet. Quamdiu scilicet in Mathesi versamur, figuris & characteribus in ratiocinando juvamur, ex quarum inspectione non minus quam ex aliarum propositionum citatione, multæ præmissæ syllogismorum supplentur: ad quod si non satis attendatur, quam sancte in Demonstrationibus mathematicis leges syllogismorum custodiantur non apparet.

§. 48. ***Problemata*** facienda proponunt & tribus partibus constant, ***Propositione*** scilicet, ***Resolutione***, ac ***Demonstratione.*** In Propositione, quid fieri debeat, indicatur. In Resolutione singuli actus ordine decenti recensentur, quibus efficitur quod erat faciendum. Denique in Demonstratione evincitur, factis iis, quæ Resolutio præcipit, effectum intentum obtineri. Quoties itaque Problema demonstrandum, in Theorema convertitur, cujus Hypothesin Resolutio, Thesin vero Propositio constituit. Generalis enim omnium Problematum demonstrandorum (ut jam innuimus) tenor hic est; Factis iis quæ Resolutio præcipit, illud quoque efficitur quod erat faciendum. Quare non opus est, ut de Problematibus plura dicantur.

(*d*) *Acta Erudit.* A. 1711. p. 477.
(*e*) Vide eas in *Logica* §. 551, & seqq.

§. 49. Rationes subinde non desunt, cur ad casus speciales applicentur Propositiones generales, & ex quibusdam Propositiones sæpe alias prona consequentia deducere licet. Quæ utroque modo eruuntur Propositiones ***Corollaria*** nuncupantur.

§. 50. Primum Corollariorum genus demonstratione non indiget. Quod enim in genere de omnibus in universum casibus demonstratum fuit, de hoc, vel isto, in specie ut denuo demonstretur opus non est. Ex. gr. ubi de omnibus triangulis ostensum, tres angulos eorum una sumtos duobus rectis æquari; idem in specie de triangulis rectangulis confirmari haud debet. Ast alterum Corollariorum genus demonstrationem requirit. Quotiescunque nimirum ex aliis Propositionibus aliquid infertur, ratio illationis indicanda. Ex. gr. Si theoremati, cujus modo mentionem feci, hoc Corollarium subjungatur; ***in triangulo rectangulo unus saltem actu rectus angulus esse potest***: ratio illationis non negligenda, quod scilicet, positis duobus actu rectis, tertius nihilo æqualis foret.

§. 51. In ***Scholiis*** denique, tam Definitionibus, quam Propositionibus, earumque Corollariis, subjungi solitis, obscura declarantur, ad dubia respondetur, usus doctrinarum indicatur, historia ac fontes inventionum describuntur, &, si qua alia scitu nec injucunda nec inutilia occurrunt, inseruntur.

§. 52. Explicatam hactenus methodum qui probe perpendit, ejus universalitatem haud dubie agnoscet; nec diffi-

diffitebitur fine ea ad folidam rerum cognitionem perveniri haud quaquam poffe. Dicitur vero *Methodus mathematica*, immo fæpius *Geometrarum Methodus*, quia huc ufque Mathematici fere foli, in Geometria inprimis, ejus leges fancte cuftodiverunt. Quanquam enim non defuerint, qui eandem aliis difciplinis applicare ftuduerunt; conatui tamen ipforum eventus minime refpondit. Etenim nunc notiones non fatis evolverunt; nunc fine probatione affumferunt quæ maxime probari debebant; nunc per faltum ratiocinati funt, inferentes nimirum, quæ nullo argumento inferri poffunt.

§. 53. Explicatæ Methodi legibus cum ex affe fatisfiat, in Mathefi præfertim pura; non ex vano prædicatur, quod Mathemata judicium acuant; hoc eft, quod eorum cultores promptitudinem acquirant veritatem quamlibet, ad quam cognofcendam animum appellunt, accuratius, quam alii folent, dijudicandi. Exercitio enim comparatur judicandi etiam ac ratiocinandi habitus, quale Demonftrationum mathematicarum meditatio cenferi debet.

§. 54. Fructus igitur, quem ex ftudio Mathefeos maximum percipere licet, participes non fiunt, quotquot praxes quafdam mathematicas, aliafque parum mathematici habentes, vulgo tamen ad eandem referri folitas, addifcunt. Licet enim in vita communi utiles exiftant; neminem tamen judicii acumine ac inveniendi habitu beant, quia *per* §. *prac.* hæc non nifi a feria Demonftrationum meditatione expectare licet.

§. 55. Supereft ut ad objectiones duas refpondeam, quas contra methodum Geometrarum nonnulli afferre folent; præfertim cum fatis prævideam non defuturos, qui eafdem contra Elementa mea Mathefeos urgebunt. Nempe vitio vertitur Geometris, 1°. quod multa definiant, quæ definitione non habent opus, & quod multa probent, quæ probatione non indigent: 2°. quod ordinem, quo generaliora & fimpliciora fpecialibus & compofitis præponi neceffe eft, negligant, nec ad unum argumentum pertinentia uno loco abfolvant.

§. 56. Objectioni primæ ut fatisfiat, explicandum eft, quando Definitiones fint fuperfluæ, & quales effe debeant Propofitiones ut probatione non indigeant: id quod ex fine Definitionum, atque indole Demonftrationum redditur manifeftum. Definitiones nimirum hunc habent ufum, ut vel fubfequentibus aliis intelligendis inferviant, vel principia demonftrandi præbeant. Oftendant igitur adverfarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, ullam dediffe Definitionem qua, nec ad fubfequentes explicandas, nec in Propofitionibus demonftrandis utuntur. Quamdiu vero exempla iftiufmodi in medium afferre nequeunt, Geometras reprehendere definant, quod nimii fint in definiendo, & fuum potius errorem agnofcant, quod Definitionibus non alium tribuant ufum, nifi qui in rebus definitis agnofcendis & ab aliis diftinguendis confiftit. Diximus porro fuperius præmiffas fyllogifmorum tamdiu continuan-

nuandas esse, donec ad Definitiones, quas jam constat esse possibiles, & Propositiones identicas perveniatur. Sine ratione itaque non admittuntur nisi Propositiones identicæ, ac Experientiæ claræ, in quibus Notiones primæ fundantur. Reliquæ Propositiones omnes sunt demonstrandæ. Ostendant igitur adversarii EUCLIDEM, aut Geometram alium, Propositiones identicas, & Notiones in Experientiis claris fundatas demonstrasse. Quamdiu vero hujusmodi exemplum nullum in medium afferre valent; Geometras reprehendere desinant, quod probent, quæ probatione non indigere ipsis videntur, & potius discant, quod in demonstrando nunquam nimis accurati esse possimus; præsertim ubi extra Mathesin versamur, nec, ut ibi, figuris ac characteribus in ratiocinando juvamur.

§. 57. Quoniam igitur rigor in demonstrando laudi ducitur Geometris (§. 56.); nec ordo jure taxatur, quo sine in demonstrando accurati esse nequimus. Eo nimirum ordine singula proponenda sunt, quo unum ex altero facilius infertur. Quare cum satis experiamur, id fieri minime posse, si in unum cumulum congerantur, quæ de subjecto eodem cognosci possunt; *Ordo scholæ* Philosophis vulgaribus relinquendus, & a Geometris aliisque, quibus res profundius meditari datum est, *Ordo naturæ* retinendus.

ELEMENTA

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

PRÆFATIO.

ON dubito fore aliquos, qui mirabuntur quod Elementa Matheſeos univerſæ conſcribens MATHESIN UNIVERSALEM prætermittam. Enimvero, quam perperam nonnulli Matheſin univerſalem appellant, eam ego ab ARITHMETICA diverſam non agnoſco. Quantitates enim, quarum affectiones & relationes in ea conſiderant, pro numeris indeterminatis habeo: quæ etiam ratio eſt, cur non aliæ ipſarum quam numerorum ſint affectiones ac relationes. Ea igitur, quæ in Matheſi univerſali vulgo tractari ſolent, ego in Arithmetica pertracto: quo rationum potiſſimum doctrina ſpectat. Calculum tamen numerorum indeterminatorum, quem LITTERALEM appellare ſolent, non integrum trado, quia in demonſtrationibus arithmeticis & geometricis integro opus non habeo. Plenior adeo explicatio ANALYSI reſervatur. Nec rationum doctrinam ope calculi hujus ſolius demonſtro, quia cum rigore demonſtrandi, quem mihi obſervandum propoſui, ea demonſtrandi ratio non ſubſiſtit; utpote in qua multa communiter ſine probatione aſſumuntur, quæ & a Veteribus demonſtrata, nec mihi ſine probatione concedi poſſe viſa ſunt, ubi ſolidam doctrinam cordi habueris. Veram

autem

autem MATHESIN UNIVERSALEM in desideratorum numero colloco; eam nempe, quæ leges metiendi generales & ad omnium rerum quantitatem determinandam mensuras convenientes præscribit: nec repertu adeo facilem judico. Cæterum quæ commodius ope calculi litteralis eruuntur, nec ad communis Geometriæ elementa intelligenda necessaria sunt; ea ad Analysin rejeci. Tyrones, sub initium, praxes arithmeticas solas, cum definitionibus, sibi familiares reddere debent; theorematibus problematumque demonstrationibus omissis. In calculo exercitati theoremata ad multa exempla numerica applicent; ut non modo eorum sensum clare perspiciant, sed eadem quoque memoriæ firmiter infigant, quo in promptu sint, quoties iis, vel ad demonstrandum, vel ad inveniendum opus est. Iis intellectis, problematum demonstrationes expendere, ac his perceptis inoffenso pede ad theorematum demonstrationes progredi licebit. Absit autem, ut quis arbitretur omnibus calcandam esse hanc semitam. Quorum enim est major mentis acies, congenita vel aliis studiis acquisita, & facilius conservatur attentio; illi Elementa integra eo ordine perlegere possunt, quo conscripta sunt. Usus Arithmeticæ per disciplinas reliquas omnes se diffundit. Ea igitur reliquis omnibus præmittenda fuit, & ante eas cum cura addiscenda est. Quantus Arithmeticæ in vita civili usus sit, experientia loquitur: quantus in Physicis & aliis Philosophiæ partibus, experientur quotquot, Mathesi absoluta, solidam extra eam doctrinam quærere allaborabunt. Quantum denique in perficiendo intellectu possit, in ipsa pertractatione hinc inde annotavimus, &, si quis culturam convenientem studio arithmetico non negaverit, experientia optima erit Magistra.

ELE-

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Arithmeticæ.

DEFINITIO I.

1. ARITHMETICA est Numerorum scientia. Pars ejus *practica* est scientia computandi, hoc est, ex quibusdam numeris datis inveniendi alios, quorum ad cognitos relatio datur; ut si fuerit inveniendus numerus, qui duobus 6 & 8 junctim sumtis æqualis est.

SCHOLION.

2. *Patet adeo, Arithmeticam practicam esse methodum inveniendi specialem. Ab ea igitur, si rite meditemur, regulas inveniendi generales abstrahere licet. Particularis enim methodus in applicatione regularum generalium consistit. Dederunt aliqua huc spectantia* CARTESIUS, *cum in Tractatu* De methodo, *tum in iis, quæ* De ingenii directione *inter posthuma habentur; &* R. P. MALEBRANCHIUS *in egregio opere* De inquirenda veritate. *Plura, quamvis paucis, nos damus infra* (§. 125).

DEFINITIO II.

3. *Unum* est, quod ita est aliquid, ut aliud præterea idem esse nequeat. Illustris LEIBNITIUS unum sic definit: Si A sit B, nec præterea D ponatur B, nisi A & D idem sint, ponetur B unum.

DEFINITIO III.

4. *Unitas* est abstractum, per quod dicimus unum.

DEFINITIO IV.

5. *Unitates eædem* sunt, quæ per eandem notionem agnoscuntur: *diversæ* sunt, quæ agnoscuntur per diversas.

SCHOLION.

6. *Ponamus ex. gr. A esse globum lapideum, B similiter esse globum lapideum alium: erunt A & B unitates eædem. Sed si A fuerit globus lapideus, C plumbeus: erunt A & C unitates diversæ. Quodsi A, B & C tantum ut globos consideres, erit etiam C eadem unitas cum A & B.*

DEFINITIO V.

7. Si A sit unum, B sit unum, C sit unum, D sit unum &c. nec tamen B, C, D &c. sint idem cum A; erunt A, B, C, D &c. *Plura*, seu *Multa*.

DEFINITIO VI.

8. *Multitudo* est abstractum, per quod dicuntur plura.

DEFINITIO VII.

9. Si A sit idem cum B, C & D simul sumtis, dicetur A *Totum*; B vero, C, & D dicentur ejus *Partes*; & intuitu partis B, reliquas C, & D, &c. *Complementum ad Totum* vocabimus.

DEFINITIO VIII.

10. Quicquid refertur ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam, *Numerus* dicitur.

SCHOLION I.

11. *Nempe si pro unitate linea recta sumatur, numerus quoque exprimi potest per rectam: id quod infra in* Geometria *&* Analysi *abunde patebit.*

SCHOLION II.

12. *Numerus autem adeo generaliter definiendus, ut sub eadem definitione numeros, cum integros, tum fractos, tam rationales, quam irrationales, comprehendere valeamus.*

DEFINITIO IX.

13. *Numerus determinatus* est, qui refertur ad unitatem datam, ut ternarius. *Indeterminatus* est, qui refertur ad unitatem vagam, diciturque *Quantitas.*

SCHOLION.

14. *In quantitatum numerum refertur latitudo fluvii. Quodsi quæsiveris, quanta ea sit; quantitatem concepturus unitatem quandam ad arbitrium assumit, & illius ad hanc relationem quærit, ac pro diversa unitate assumta per diversum numerum determinatum latitudinem fluvii enunciat. Latitudo igitur fluvii inter quantitates collocatur, quatenus refertur ad unitatem vagam: qua determinata, per numerum determinatum distincte intelligitur.*

DEFINITIO X.

15. *Æqualia* sunt, quorum unum alteri salva quantitate substitui potest. *Inæqualia* sunt, si pars unius alteri toti substitui potest.

COROLLARIUM I.

16. Quoniam pars unius inæqualium alteri toti substitui potest; quod vero alteri, salva nempe quantitate, substitui potest, alteri æquale est (§. 15); pars unius inæqualium alteri toti æqualis est.

COROLLARIUM II.

17. Similiter cum unum inæqualium pro alterius parte substitui possit (§. 15): erit idem alterius parti æquale.

HYPOTHESIS I.

18. *Signum æqualitatis est* =.

SCHOLION.

19. *Hoc signo primus usus est* HARIOTUS *Anglus* (a), *& hodie plerique eodem utuntur. Nonnulli cum* CARTESIO *adhibent Signum sequens* ∞; *quidam etiam alia. Apud Autores* HARIOTO *antiquiores nullum æqualitatis signum occurrit.*

DEFINITIO XI.

20. *Majus* est, cujus pars alteri toti æqualis est: *Minus* vero, quod parti alterius æquale.

COROLLARIUM.

21. Cum pars unius inæqualium A alteri toti B æqualis sit (§. 16), & vicissim B æquale parti ipsius A (§. 17); inæqualium unum A majus, alterum B minus est (§. 20).

HYPOTHESIS II.

22. *Signum majoritatis est* $>$; *minoritatis* $<$.

SCHOLION.

23. *Signis his itidem primus usus est* HARIOTUS (b). *Eum secuti Celeberrimus* WALLISIUS (c) *&* R. P. LAMY (d). *Aliis alia placent: plerisque nulla sunt.*

DEFINITIO XII.

24. *Similia* sunt, in quibus ea eadem sunt, per quæ a se invicem discerni debebant. *Dissimilia* sunt, in quibus ea diversa sunt, per quæ a se invicem discerni debent. Atque adeo *Similitudo*

(a) In *Artis Analyticæ praxi*, Sect. 1. f. 10.
(b) Loc. cit. (c) Vide *Arith.* c. 25. f. 186. Vol. 1. Oper. Mathem. (d) *Element. Geometriæ* lib. 3. sect. 5. p. 177. Edit. Par. 1710.

militudo est identitas; *Dissimilitudo* diversitas eorum, per quæ res a se invicem discerni debent.

COROLLARIUM I.

25. Nihil ergo in uno Similium deprehenditur, quod non æque deprehendatur in altero; modo sit istiusmodi ut sine alio assumto intelligi possit.

COROLLARIUM II.

26. Cum quantitas sine alio assumto per se non intelligi, sed tantum dari possit (§. 13, 14); Similia, salva similitudine, quantitate differre possunt (§. 25), atque adeo quantitas est discrimen internum similium.

SCHOLION.

27. *Similitudinis notionem distinctam primus eruit* LEIBNITIUS. *Dixit nempe* Similia, quæ non possunt distingui, nisi per compræsentiam. *Quoniam vero terminus* compræsentiæ *plerisque obscurus videtur; aliam definitionem intellectu planiorem substituere libuit. Ceterum res* compræsentes *fiunt duplici modo, nimirum vel immediate unum alteri, vel utrique idem aliquod tertium applicando: id quod intellectu facilius evadet, si in exemplum aliquod aciem ingenii intendamus. Ponamus itaque duo horologia portatilia prorsus inter se similia esse. Illorum unum possideat* Grachus; *alterum* Cajus. *Quodsi* Cajus *in præsentia* Grachi *horologium suum depromat; næ is attonitus sibi persuadebit horologium suum esse, quod* Cajus *manu tenet; at diversum a suo agnoscet, ubi & suum depromit, hoc est horologium* Caji *a suo distinguit* Grachus *per compræsentiam, unum nempe alteri immediate applicando. Sed si locorum vel temporum intervallum inter duo ædificia similia interjectum menti una cum ipsis exhibetur; vel si dimensiones templorum aut statuarum similium ad staturam nostram aut mensuram datam aliam referimus; similia animo compræsentia sistuntur idem tertium utrique eorum applicando.*

HYPOTHESIS III.

28. *Signum similitudinis est* ∽.

SCHOLION.

29. *Commendatur in* Miscellaneis Berolinensibus (e). *Communiter nullo utuntur.*

DEFINITIO XIII.

30. *Pars aliquota* est, quæ aliquoties repetita integro fit æqualis. *Pars* vero *aliquanta* est, quæ repetita aliquoties semper vel major, vel minor est toto.

DEFINITIO XIV.

31. *Commensurabilia* sunt, quæ partem aliquotam communem habent, vel quorum unum est pars aliquota alterius. *Incommensurabilia* sunt, quorum nulla datur pars aliquota communis.

DEFINITIO XV.

32. *Quantitates homogeneæ* sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare potest, seu quarum una ab altera vel semel, vel aliquoties ablata, tandem vel nihil, vel se minus relinquit. *Heterogeneæ* vero sunt, quarum una aliquoties sumta alteram superare nequit.

DEFINITIO XVI.

33. *Numerus numerans* est, cujus unitas denotat ens in genere: *Numerus* vero *numeratus* est, cujus unitas denotat certam quandam entis speciem, vel genus quoddam determinatum.

SCHOLION.

34. Ex. gr. *Si quis simpliciter dicat,* sex; *is non determinat, quænam sint illa entia, quæ numerantur, adeoque utitur* numero numerante. *Contra si quis dixerit cum addito,* sex globi aurei; *is speciem entium determi-*

(e) Part. 3. pag. 139.

terminat, quæ numerat, adeoque utitur numero numerato. *Vocant nonnulli numerum numerantem* abstractum; *numeratum vero* concretum.

DEFINITIO XVII.

35. *Numeri inter se homogenei* sunt, qui ad eandem; *heterogenei*, qui ad diversas unitates referuntur.

SCHOLION.

36. *Hæc divisio numerum numeratum potissimum respicit. Omnis nempe numerus determinatam quandam unitatem supponit* (§. 10). *Determinatur ea per notionem, ad quam in numerando respicimus* (§. 5). *Ex. gr. ea globi proprietas est, qua ab aliis corporibus distinguitur, quod singula puncta superficiei a centro æqualiter distent. Quodsi igitur banc unitatis notam constituas; singula corpora, quibus eadem convenit, unitatis naturam induunt, suntque unitates eædem, quatenus sub hac notione continentur* (§. cit.). *Quodsi vero globos porro distinguas, ex. gr. per materiam ex qua constant, & alios ut aureos, alios ut plumbeos spectes; quæ antea eædem erant unitates, nunc diversa evadunt. Hinc tres globi aurei & sex globi aurei sunt numeri homogenei inter se; sed tres aurei & sex argentei sunt inter se heterogenei.*

DEFINITIO XVIII.

37. *Nnmerus integer* est, qui refertur ad unitatem tanquam totum ad partem.

DEFINITIO XIX.

38. *Numerus fractus* est, qui refertur ad unitatem tanquam pars ad totum. Dicitur is etiam *Fractio*, itemque *Minutia*.

DEFINITIO XX.

39. *Numerus rationalis* est, qui unitati commensurabilis. Vocatur etiam *effabilis*.

DEFINITIO XXI.

40. *Numerus rationalis integer* est, cujus pars aliquota est unitas.

DEFINITIO XXII.

41. *Numerus rationalis fractus* est, qui unitatis parti aliquotæ, aut aliquot partibus aliquotis æqualis est.

DEFINITIO XXIII.

42. *Numerus rationalis mixtus* est, qui constat ex integro & fracto, seu ex unitate & fracto.

DEFINITIO XXIV.

43. *Numerus irrationalis*, sive *surdus* est, qui unitati incommensurabilis. Vocatur etiam *ineffabilis*, item *geometricus*.

HYPOTHESIS IV.

44. *Si in numerando ad denarium pervenitur, initium numerandi repetatur, nisi quod denariorum numerus una exprimatur.*

COROLLARIUM.

45. Decem ergo nominibus opus est ad decem numeros rationales primos indigitandos, & præterea aliis, quibus decadum multitudo denotetur, & ita porro.

SCHOLION.

46. *Lex numerandi, quam in Hypothesi tradimus, ubivis* (*quantum constat*) *gentium recepta, & cum a prima ætate eidem adsueverimus, indispensabilis necessitatis videtur. Enimvero non modo* Erhardus WEIGELIUS *in Arithmetica tetractyca ostendit, fieri quoque posse, ut in numerando non ultra quaternarium progrediamur; sed & Illustris* LEIBNITIUS (*f*) *Arithmeticam binariam excogitavit, nonnisi duabus notis* 1 & 0 *utentem, ac numerorum proprietatibus investigandis aptam: cujus aliquod specimen dedit Cl.* DANGI-

(*f*) *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, An. 1703. p. 175. & seqq. Edit. Amstel.

DANGICOURT *circa progressiones arithmeticas* (g). *Nimirum quoniam Arithmetica dyadica duabus tantum notis utitur, leges progressionum numerorum dyadice expressorum facillime omnium deteguntur. Et* CAROLUS XII, *Rex Sueciæ, calculum sexagenarium excogitavit, referente* Emanuele SUEDENBORGIO (h), *novis characteribus & numeris, novisque denominationibus adinventis. Arithmetica autem decadica, qua vulgo utimur, denario digitorum numero procul dubio originem debet; digitis enim in computando utimur, quamdiu in computo nondum satis versati.*

DEFINITIO XXV.

47. Decem illa nomina, quibus in numerando utimur, sunt, *Unum*, *Duo*, *Tria*, *Quatuor*, *Quinque*, *Sex*, *Septem*, *Octo*, *Novem*, *Decem*. Iidem numeri generali *Unitatum* nomine insigniri solent, nec opus est ut definiantur. Dicuntur etiam *Digiti*. Ex decem unitatibus componitur una *Decas*. Duæ decades dicuntur *Viginti*; tres *Triginta*; quatuor *Quadraginta*; quinque *Quinquaginta*; sex *Sexaginta*; septem *Septuaginta*; octo *Octoginta*; novem *Nonaginta*. Ex decem decadibus componitur *Centenarius*; ex decem centenariis *Millenarius*; ex mille millenariis *Millio*; ex mille millenariis millionum *Billio*; ex mille millenariis billionum *Trillio* &c. Denarius, ejusque quævis multipla, dicentur *Articuli*.

SCHOLION.

48. *Vocibus millionum, billionum, trillionum, &c. utimur ad confusionem in numeris magnis evitandam, quorum distinctis notionibus formandis inserviunt.*

HYPOTHESIS V.

49. *Nota numerica constituantur novem sequentes*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. *Ut vero non solum unitates, sed & decades, centenarios, millenarios, &c. indigitare possimus, valor ipsis tribuatur localis; ita ut solitaria, vel in loco dextimo posita, unitates sive digitos, in secundo decades, in tertio centenarios, in quarto millenarios &c. denotent. Loca vacua repleantur cyphra* 0, *quæ scilicet sit* Nullitatis *nota.*

COROLLARIUM I.

50. Numerorum igitur partes hoc ordine se invicem excipiunt:

Unitates Decades Centenarii	Simplices.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum.
Unitates Decades Centenarii	Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Millionum.
Unitates Decades Centenarii	Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Billionum.
Unitates Decades Centenarii	Trillionum.
Unitates Decades Centenarii	Millenariorum Trillionum &c.

SCHOLION I.

51. *Characterum arithmeticorum electio arbitraria. Hinc apud varias gentes varii occurrunt; ut inter alios docent* Georgius HENISCHIUS *in libello* De numeratione multiplici, vetere & recenti, *atque* Guil. BEVEREGIUS *in* Arithmeticæ chronologicæ *libro primo*

(g) In *Miscellaneis Berolinens.* p. 336. & seqq.
(h) *Observat. miscellan.* part. 5. p. 1. & seqq.

mo integro. Non tamen omnes æque commodi. Seligendi adeo sunt, per quos numerus quantumvis magnus facillime exprimi & computus optime absolvi potest. Quod autem notæ nunc usitatæ reliquis præstent, has cum illis conferentes experiuntur. Dicuntur subinde cyphræ, quamvis usitatius sit ut hoc nomen soli notæ nullitatis imponatur; quem morem nos sequimur. Ab Arabibus *inventæ vulgo feruntur. Sed docuit celeberrimus* WALLISIUS *(i), quod* ALSEPADI *Arabs in Commentario ad* TOGRAI *poema* Lamiat 'o l Ajam *dictum, inventionis gloriam* Indis *tribuat. Idem refert (k), quod* Saraceni *eas in Hispaniam attulerint, & quod ex Hispania in Galliam pervenerint studio* GERBERTI, *monachi Floriacensis in Gallia, qui a variis dignitatibus Ecclesiasticis tandem ad Pontificatum maximum, nomine* SYLVESTRI II, *circa* A. C. 999 *evectus, ex ipsis ejus Epistolis A. 1636 Parisiis recusis probat.* Joannes Fridericus WEIDLERUS, *Mathematum apud Wittebergenses Professor clarissimus (l), ex MSC.* BOETHII *de Geometria, quod in Bibliotheca Academiæ Altorfinæ asservatur, & in quo Noster characteres numerorum arabicis similes expressos vidit, probare nititur, eos jam* BOETHIO *fuisse cognitos, quem* A. C. 524 *vitam finiisse constat.* WALLISIUS *(m) non ignoravit, in* BOETHII. BEDÆ, *aliorumque antiquiorum editionibus figuras istiusmodi comparere; sed id in vetustioribus MSC. contigisse negat. Quamobrem cum* WEIDLERUS *MSC., cujus authoritate nititur, seculo quarto non junius existimet; criticorum est statuere, num tanta illius antiquitas admittenda sit.*

SCHOLION II.

52. *Ex collatione diversarum figurarum numeralium discant velim, qui Artem inveniendi cordi habent, quantum momenti in eo situm sit, ut Ars characteristica perficiatur.*

COROLLARIUM II.

53. Quodsi notis numericis substituantur litteræ ad arbitrium electæ, iisque idem tribuatur valor, qui illis tribui solet (§. 49); numerum occulte scribere licet.

SCHOLION III.

54. Ex. gr. *Denotent litteræ infra scriptæ in secunda serie eosdem numeros, quos designant notæ superiores supra scriptæ in prima.*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.
p. s. a. c. e. h. o. i. n. g.

erit 3748 = aoci. *Hoc artificio utuntur mercatores ad designanda mercium pretia in schedulis affixis.*

PROBLEMA I.

55. *Numerum scriptum enunciare; hoc est, cuilibet characteri valorem competentem assignare.*

RESOLUTIO.

1. Numerus propositus per commata dividatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto.
2. Nota dextima classis tertiæ notetur lineola transversa apici adscribenda; dextima classis quintæ duabus; dextima septimæ tribus &c.
3. Comma solitarium per millenarios, lineola transversa una per milliones, duæ per billiones, tres per trilliones, &c. nota vero sinistima classis uniuscujusque per centenarios, media per decades, dextima per unitates enuncietur (§. 50). *Sic factum est, quod petebatur.*

Ex. gr. Numerus sequens.

$2''', 125, 473''. 613, 578', 432, 597$

ita enunciatur: Duæ trilliones, centum & viginti quinque millia billionum una cum quadrin-

(i) *Arithmet.* Oper. c. 9. f. 48. Vol. I. Oper. Math. (k) In Tract. *De Algebr.* c. 4. f. 1. & seqq. Vol. II. Oper. Mathem. (l) In Dissertatione *De characteribus numerorum vulgaribus, & eorum ætatibus,* An. 1727. publice ventilata, §. 8. & seqq. p. 17. & seqq. (m) In Tract. *De Algebr.* loc. cit.

quadringentis septuaginta tribus billionibus, sexcenta & tredecim millia millionum una cum quingentis septuaginta octo millionibus, quadringenta & triginta duo millia, quingenta & nonaginta septem.

SCHOLION.

56. *Quantum conveniens terminorum usus in rebus distincte concipiendis, seu ex confusione extricandi, vires intellectus humani extendat; abunde perspicient oculatiores, si ad præsens Problema fuerint satis attenti.*

HYPOTHESIS VI.

57. *Quantitates aut numeros indeterminatos litteris Alphabeti minoribus a, b, c &c. vel etiam majoribus A, B, C &c. indigitamus.*

SCHOLION.

58. *Litteris majoribus usus est* VIETA (n): *minores introduxit* HARIOTUS (o), *quem mox imitatus est* CARTESIUS (p), *& nunc sequuntur plerumque omnes.*

HYPOTHESIS VII.

59. *Fractiones per duos numeros exprimuntur, quorum alter alteri interjecta lineola subscribitur. Eorum inferior, seu* Denominator, *indicat unitatem, seu totum in partes divisum; superior vero, seu* Numerator, *numerat partes in casu proposito datas.* Ex. gr. Duæ partes tertiæ unius lineæ ita scribuntur $\frac{2}{3}$: ubi denominator 3 indicat, lineam esse in tres partes æquales divisam; numerator 2 vero duas istiusmodi partes assignat.

SCHOLION.

60. *Neque vero mirentur tyrones, quod in numeris fractis numeratori denominator subscribatur, qualis in integris non occurrit. Additur enim, ut appareat, quamnam partem aliquotam cum unitate communem habeat fractus* (§. 41).

(n) In variis scriptis Analyticis, quæ inter Opera ejus habentur. (o) In *Artis Analyticæ praxi.* (p) In *Geometria.*

DEFINITIO XXVI.

61. *Additio* est inventio alicujus numeri, ex duobus vel pluribus homogeneis datis, qui datis junctim sumtis æqualis est. Numeri dati dicuntur *Summandi*; quæsitus autem *Summa*, vel *Aggregatum.*

COROLLARIUM.

62. Iterata ergo ejusdem numeri additio est inventio numeri alteri cuidam aliquoties sumto æqualis, & contra.

HYPOTHESIS VIII.

63. *Signum additionis est* +, *quod per* plus *efferri solet.* Ita 3+4 denotat Summam ex 3 atque 4, & pronunciatur, 3 plus 4.

DEFINITIO XXVII.

64. *Subtractio* est inventio alicujus numeri ex duobus homogeneis datis, qui cum uno datorum alteri æqualis est. Numerus, qui subducitur, dicitur *Subtrahendus*; alter, a quo subtractio fit, *Minuendus*; qui denique invenitur, *Differentia*, a nonnullis *Residuum.*

HYPOTHESIS IX.

65. *Signum subtractionis est* —, *quod per* minus *efferri solet.* Ex. gr. 7−3 denotat Differentiam inter 3 & 7, pronunciatur, 7 minus 3.

DEFINITIO XXVIII.

66. *Multiplicatio* est inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur datorum unus, quoties unitas in altero. Numeri dati dicuntur *Factores*, item *Efficientes*; quæsitus *Factum*, item *Productum.* In specie, factorum alter, qui aliquoties sumitur,

ſumitur, vocatur *Multiplicandus*; alter vero, qui indicat quoties ille ſumatur, *Multiplicator*.

COROLLARIUM.

67. Quoniam itaque in multiplicatione numerus invenitur alteri cuidam aliquoties ſumto æqualis (§. 66), iſtiuſmodi autem inventio non eſt niſi iterata additio (§. 62); multiplicatio eſt iterata ejuſdem numeri additio.

HYPOTHESIS X.

68. *Signum multiplicationis eſt punctum unicum* (.) *inter factores duos medio loco poſitum, quod per* multiplicatum *effertur*. Ex. gr. 4. 3 denotat factum ex 4 in 3; item 7. 5. 9, factum, cujus factores ſunt 7, 5 & 9. *Litteræ ſine ullo ſigno junguntur*. Ex. gr. *ab* denotat factum ex *a* in *b*; *b c d*, factum cujus factores *b*, *c* & *d*.

DEFINITIO XXIX.

69. *Diviſio* eſt inventio alicujus numeri ex duobus datis, in quo toties continetur unitas quoties datorum unus in altero. Numerus, qui dividi debet, *Dividendus*; alter, per quem fit diviſio, *Diviſor*; qui denique indicat, quoties diviſor in dividendo contineatur, *Quotus* dicitur.

SCHOLION.

70. *In multiplicatione & diviſione opus non eſt, ut numeri dati ſint homogenei, quemadmodum in additione & ſubtractione requirebatur* (§. 61, 64). *Cum enim in additione, ex duobus vel pluribus numeris componatur unus, tanquam ex partibus totum* (§. 61, 9); *omnes omnino ſummandi ad eandem unitatem referri* (§. 10), *conſequenter homogenei inter ſe eſſe debent* (§. 35). *Quoniam vero porro liquet ſummam, quæ fit ex numeris aggregandis, ad eandem cum ipſis unitatem referri; conſequenter iiſdem homogeneam eſſe* (§. *cit.*); *in ſubtractione vero numerus minuendus reſpondet ſummæ, ſubtrahendus & reſiduus aggregandis ſeu ſummandis* (§. 61, 64): *ulterius patet, in ſubtractione etiam minuendum, ſubtrahendum, & reſiduum numeros inter ſe homogeneos eſſe debere. In multiplicatione contra, multiplicator ad unitatem exprimit rationem, quam habet factum ad multiplicandum, ſicut in diviſione, diviſor ad unitatem rationem dividendi ad quotum; adeoque opus non eſt, ut multiplicator multiplicando & facto, diviſor dividendo & quoto ſit homogeneus. Quodſi diviſor conſideretur tanquam pars dividendi; ex dictis conſtat diviſorem eſſe dividendo homogeneum: ſed tum quotus, qui indicat quoties pars iſta ex ſuo toto auferri poteſt, nec dividendo, nec diviſori homogeneus. Singula ſuo loco clarius patebunt.*

HYPOTHESIS XI.

71. *Signum diviſionis ſunt duo puncta* (:), *quæ per* diviſum *efferri ſolent*. Ex. gr. 8 : 4 denotat quotum ex diviſione 8 per 4 emergentem. Similiter *a* : *b* eſt quotus ex diviſione *a* per *b* prodiens.

DEFINITIO XXX.

72. *Numerus par* eſt, qui bifariam ſive per 2, dividi poteſt; ut 4, 12, 16.

DEFINITIO XXXI.

73. *Numerus impar* eſt, qui a pari unitate differt; ut 3 differt unitate a 2, item a 4.

DEFINITIO XXXII.

74. Numerus A *metiri*, vel juxta alios *numerare* dicitur numerum B, ſi eum ita dividit, ut quotus ſit numerus integer ſine fractione, vel ſi fuerit pars ejus aliquota. Ita 2 metitur 8 per 4.

DEFI-

DEFINITIO XXXIII.

75. *Numerus primus in se* est, quem sola unitas metitur, vel numerat, ut 5, 7, 11.

DEFINITIO XXXIV.

76. *Numerus compositus* est, quem præter unitatem alius numerus metitur. Ita 4 metitur 8 per 2, item 2 metitur 8 per 4.

DEFINITIO XXXV.

77. *Mensura numeri* est numerus, qui ipsum metitur. Ita 2 & 4 sunt mensuræ numeri 8. *Mensura maxima numeri* est numerus maximus, qui ipsum metitur. Ita 4 est mensura maxima numeri 8.

DEFINITIO XXXVI.

78. *Mensura communis duorum pluriumve numerorum* est numerus, qui singulos sigillatim metitur. Ita 3 est communis mensura numerorum 12 & 24. *Maxima* dicitur, si fuerit numerus maximus qui omnes metitur. Ita 12 est communis mensura maxima numerorum 12 & 24; 3 vero numerorum 9 & 12.

DEFINITIO XXXVII.

79. *Numeri primi inter se* sunt, qui nullam communem mensuram habent, præter unitatem. Ita 12 & 19 sunt numeri primi inter se.

DEFINITIO XXXVIII.

80. *Numeri compositi inter se* sunt, qui, præter unitatem, communem mensuram aliam habent. Ita 12 & 15 sunt compositi inter se.

AXIOMA I.

81. *Idem est æquale sibimet ipsi.*

SCHOLION.

82. *Hujus axiomatis amplissimus est in Analysi usus.*

AXIOMA II.

83. *Quantitates homogeneæ aut æquales sunt, aut inæquales* (§. 15).

THEOREMA I.

84. *Totum est majus qualibet sua parte.*

DEMONSTRATIO.

Cujus pars alteri toti æqualis est; id ipsum altero majus est (§. 20). Sed quælibet pars totius parti totius, hoc est, sibi ipsi æqualis est (§ 81). Ergo totum qualibet sua parte majus est.

SCHOLION.

85. *En exemplum analyseos perfectæ! Continetur enim demonstratio syllogismo, cujus altera præmissa est definitio, altera vero propositio identica. Id vero analyseos perfectæ indicium est* (§. 45, de Meth.) *Ne tyrones Logicæ, qui propositiones oblique universales ignorant, nec regulæ Logicorum de tribus syllogismi terminis vim atque efficaciam percipiunt, circa formam argumentandi hæreant, ad lineas demonstrationem applicare libet.* Sit itaque linea AB totum, linea AC ejus pars; demonstrandum erit, lineam AB esse majorem linea AC: id quod fit sequentem in modum. Cujus lineæ pars alteri lineæ toti æqualis est, illa linea altera major est (§. 20). Sed lineæ AB pars [nempe AC] alteri lineæ AC toti [nempe sibimet ipsi] æqualis est. Ergo linea AB linea AC major [nempe totum AB parte AC majus] est. *Quod erat demonstrandum.* *Fig. 1.*

THEOREMA II.

86. *Totum est æquale omnibus suis partibus simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Cum idem sit æquale sibimet ipsi (§. 81); quod idem est cum partibus totius simul sumtis, id iisdem æquale est.

Sed totum idem est cum omnibus partibus suis simul sumtis (§. 9): ergo iisdem æquale est. *Q. e. d.*

THEOREMA III.

87. *Quæ æqualia sunt eidem tertio, vel æqualibus æqualia, ea sunt æqualia inter se.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = C$ & $B = C$: dico esse $A = B$. Quoniam enim $B = C$ *per hypothesim*, B salva quantitate substitui potest ipsi C (§. 15). Substituatur adeo B ipsi C in casu priore, ubi $A = C$: habebimus $A = B$. *Quod erat primum.*

2. Si jam porro sit $A = B$ & præterea $C = A$, $D = B$; dico esse $C = D$. Quoniam enim $A = B$ & $C = A$, *per hypothesim*, erit $B = C$, *per cas.* 1. Quare cum porro sit $D = B$, *per hypothesim*, erit quoque $C = D$, *per cas.* 1. *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

88. *Si æqualibus (A & B) æqualia (C & D) addas; aggregata ($A+C$ & $B+D$) sunt æqualia.*

DEMONSTRATIO.

$A+C = A+C$ (§. 81). Sed quoniam $C = D$, *per hypothesim*, poterit D substitui pro C (§. 15): quo facto, habemus $A+C = A+D$. Porro $B+D = B+D$ (§. 81). Sed $A = B$, *per hypothesim*. Ergo A substitui potest pro B (§. 15): quo facto, habemus $B+D = A+D$. Quare $B+D = A+C$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA V.

89. *Quod uno æqualium majus vel minus est, etiam altero æqualium majus vel minus est.*

DEMONSTRATIO.

1. Sit $A = B$ & $C > A$; dico esse $C > B$. Quoniam enim $C > A$, *per hypothesim*, A parti ipsius C æquale est (§. 20), quæ dicatur P. Porro cum sit $A = B$, *per hypothesim*, erit etiam $P = B$ (§. 87). Ergo $C > B$ (§. 20). *Quod erat unum.*

2. Sit $A = B$, & $C < A$, dico esse $C < B$. Quia $C < A$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20), cujus complementum ad totum dicatur P. Cum adeo sit $P + C = A$ (§. 86) & $A = B$, *per hypothesim*; erit quoque $P + C = B$ (§. 87). Est itaque C parti ipsius B æqualis (§. 9); consequenter $C < B$ (§. 20). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VI.

90. *Si majori (B) & minori (A) idem (C), vel æqualia addas; aggregatum prius ($B+C$) majus est, posterius vero ($A+C$) minus. Quod si majori (B) majus (C), & minori (A) minus (D) addas; aggregatum prius ($B+C$) majus est, posterius ($A+D$) minus.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A > B$, *per hypothesim*, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo B ex A & parte alia (§. 9), quæ dicatur P, estque adeo $B = P + A$ (§. 86). Quare cum etiam sit $B + C = P + A + C$ (§. 88); erit $A+C$ pars ipsius $P + A + C$ (§. 9) & hinc $P+A+C > A+C$ (§. 84), consequenter $B + C > A + C$ (§. 89). *Quod erat unum.*

Quoniam $B > A$, *per hypothesim*, erit

B+C

$B+C > A+C$, *per demonstrata.* Similiter quia $C > D$, *per hypothesim*, erit $A+C > A+D$, *per demonstrata.* Ergo cum $A+D$ sit pars ipsius $A+C$ (§. 20); erit multo magis $B+C > A+D$ (§. 84). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

91. *Si æqualia* (A & B) *ab æqualibus* (C & D) *subtrahas; quæ relinquuntur* ($C-A$ & $D-B$) *æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

$C-A=C-A$ (§. 81). Sed quoniam $A = B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). Quod si ergo substituatur, habebimus $C-A = C-B$. Similiter $D-B = D-B$ (§. 81). Sed quia $C = D$, *per hypothesim*, salva quantitate C pro D substitui potest (§. 15). Quodsi ergo substituatur, habebimus $D-B = C-B$. Quamobrem $C-A = D-B$ (§. 87).

THEOREMA VIII.

92. *Si a majore* (A) *& minore* (B) *idem* (C), *vel æqualia subtrahas; residuum prius* ($A-C$) *majus est, posterius* ($B-C$) *minus.*

DEMONSTRATIO.

Quia $B < A$, parti hujus æquale est (§. 20). Componitur ergo A ex B & parte alia (§. 9), quæ dicatur P. Itaque $A = P+B$ (§. 86), consequenter $A-C = P+B-C$ (§. 91). Sed $B-C$ est pars ipsius $P+B-C$ (§. 9), consequenter $P+B-C > B-C$ (§. 84). Ergo & $A-C > B-C$ (§. 89). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

93. *Si æqualia* (A & B) *per æqualia* (m & n) *multiplices; facta* (mA & nB) *æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quia $A = B$, *per hypothesim*, erit etiam $A+A = B+B$, seu in genere $A+A+A+A$ &c. $= B+B+B+B$ &c. (§. 88). Jam cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), si m & n fuerint multiplicatores, erit $A+A+A+A$ &c. $= mA$ (§. 67, 68). & $B+B+B+B = nB$ (§. §. *cit.*). Quare cum in eo casu, ubi $A+A+A+A$ &c. $= B+B+B+B$ &c. sit $m = n$; erit etiam $mA = nB$ (§. 87). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

94. *Si æqualia* (A & B) *per æqualia* (C & D) *dividas; quoti* ($A:C$ & $B:D$) *æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$A:C = A:C$ (§. 81). Sed quia $A = B$, *per hypothesim*, salva quantitate B pro A substitui potest (§. 15). & sic $A:C = B:C$. Ob eandem rationem $B:D = B:C$. Quare $A:C = B:D$ (§. 87). *Q. e. d.*

SCHOLION.

95. *Non dubito fore multos, quibus ridiculum videbitur aut minimum superfluum talia demonstrari, quorum casus singulares, in numeris præsertim rationalibus, per se evidentes videntur. Ego vero has demonstrationes maximi facio, tum quia prima & secunda* (*id quod supra* §. 85 *annotavimus*) Analyseos perfectæ; *tum quia reliquæ* Calculi universalis *ideam animo ingenerant, in talium substitutione consistentis, quæ relationes datas non mutant. Illa cavetur, ne laxius in demonstrando versemur* (*id quod hactenus fecerunt plerique omnes, qui extra Mathesin demonstrationes mathematicæ certitudinis dare conati sunt:*) *hic, si tandem in apricum produceretur, maximum foret intellectus humani subsidium.*

CAPUT II.

De speciebus Arithmeticæ in numeris integris.

PROBLEMA II.

96. NUmeros quotcunque datos addere.

RESOLUTIO.

1. Numeri homogenei sub homogeneis scribantur, hoc est, ita ut unitates unitatibus, decades decadibus, centenarii centenariis, &c. respondeant.
2. Sub iis ducatur linea recta, ne aggregatum cum aggregandis confundatur.
3. Sigillatim addantur unitates & summa earum ipsis subscribatur.
4. Quodsi in ea decades reperiantur, eas decadibus numerorum datorum addi oportet: decadum vero summa sub decadibus collocanda.
5. Hac operatione per reliquas numerorum datorum series continuata, habebitur summa quæsita.

Ex. gr. Si numeri A, B, C addendi; ita procedendum: *3* & 4 sunt 7, additis 8, prodeunt 15. Collocentur 5 sub unitatibus, & 1 decas connumeretur decadibus datis. Itaque 1 (sc. *decas*) & *6* (*decades*) sunt 7 (*decades*): additis 2, prodeunt 9; additis porro 7, habentur 16 (*decades*). Collocentur *6* sub decadibus datis, & reliquæ 10, hoc est, 1 centenarius annumeretur centenariis datis. Sunt itaque 1 & 5 (*centenarii*) *6* &, additis adhuc 5, prodeunt 11 (*centenarii*). Collocetur 1 sub centenariis datis, & 10 centenarii reliqui, hoc est, 1 millenarius addatur 3 (*millenariis*) datis, summaque 4 sub iis scribatur. Ita prodit summa quæsita 4165.

3578	A
524	B
63	C
4165	

DEMONSTRATIO.

Cum unitates, decades, centenarii, millenarii &c. numerorum datorum sunt partes eorumdem (§. 50); idem sunt cum omnibus numeris datis simul sumtis (§. 9). Liquet vero ex operatione, numerum inventum compositum esse ex omnibus unitatibus, decanibus, centenariis, millenariis &c. numerorum datorum. Compositus ergo est ex omnibus numeris datis simul sumtis, consequenter ipsis æqualis (§. 86); adeoque summa eorundem est (§. 61). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

97. *Unitates numerorum singulæ tamdiu per digitos repræsentantur & eorum ope additio absolvitur, donec memoriæ infigatur, quinam numerus prodeat, si unitates quotlibet cuicunque numero addas, ex. gr. quod* $3+2=5$, $9+5=14$ *&c. Hoc modo talia natura docet.*

COROLLARIUM I.

98. Quoniam seriei sinisteriori tot unitates accedunt, quot decades ex summatione in proxime dexteriore emergunt (§. 96); additio minore tædio absolvetur, si ex qualibet numerorum serie tot decades deleantur, quot ex iis colligi possunt, residuum infra lineam scribatur, & numerus decadum abjectarum seriei proxime sinisteriori connumeretur.

Ex. gr.

Ex. gr. Si numeri addendi fuerint A,B,C, ita procedendum: cum 7 & 3 sint 10; residuus numerus 5 scribatur infra lineam & 1 connumeretur decadibus. Dic itaque 6 & 4 sunt 10; 2 & 1 sunt 3. Scribe 3 infra lineam & 1 repone in locum centenariorum.

8763	A
5247	B
2125	C
16135	

Quoniam vero 7 & 2 sunt 9, porro 9 & 1 sunt 10; adde 1 seriei millenariorum & residuum 1 scribe in loco centenariorum. Dic itaque 8 & 2 sunt 10 millenarii, seu 1 decas millenariorum, 5 & 1 vero sunt 6. Scribe 6 in loco millenariorum & 1 in loco decadum millenariorum.

SCHOLION II.

99. *Modus hic addendi est maxime naturalis* (§. 49): *nec absimili artificio numeri heterogenei adduntur. Ex serie nimirum speciei minoris toties colligitur valor speciei proxime majoris, quoties fieri potest, & pro unoquoque unitas reponitur in serie proxime majore. Ex. gr. sint expensæ:*

Januarii	45 thal.	16 grosſ.	9 num.
Februarii	60	12	3
Martii	72	13	6
Aprilis	180	19	9
Maji	55	15	6
erit summa	415	5	9

Cum enim 12 nummi conficiant grossum, in serie nummorum additis 6 & 6, itemque 3 & 9, valor grossi bis colligitur & relinquuntur 9. Scribuntur itaque 9 infra lineam in loco nummorum & 2 adduntur seriei grossorum. Similiter quoniam thalerus 24 grossis constat, in serie grossorum ut ante valor thaleri ter colligitur, relictis 5. Quare denuo 5 in loco grossorum reponuntur & 3 thaleris connumerantur. Reliqua ut in Corollario aut Problemate peraguntur.

COROLLARIUM II.

100. Si omnes numeri dati unitatum instar considerentur, evidens est inter summandum tot novenarios omitti, quot unitates ex summa seriei dexterioris in finisteriorem transferuntur. Sic, in exemplo Problematis, loco *quindecim* sub unitatibus scribimus 5, sub decadibus 1, quorum numerorum instar unitatum consideratorum summa est 6. Unus itaque novenarius omittitur, cum ex loco unitatum in locum decadum una rejicitur decas. Similiter si summa unitatum *viginti septem*; sub unitatibus collocamus 7, sub decadibus 2. Duo igitur novenarii omittuntur, cum 2 decades ex loco monadum in locum decadum rejiciuntur. Hinc solvitur

PROBLEMA III.

101. *Examinare additionem; hoc est, explorare, utrum numerus inventus sit æqualis omnibus datis simul summis, nec ne.*

RESOLUTIO.

1. Notentur a latere numeri, qui inter addendum ex serie qualibet dexteriore in proxime finisteriorem rejiciuntur, & operatione absoluta addantur, ut numerus novenariorum inter summandum omissorum innotescat (§. 100).
2. Abjiciatur præterea ex summa inventa novenarius, quoties fieri potest, abjectorumque novenariorum numerus addatur numero inter summandum omissorum: quæ summa una cum numero residuo, si quis fuerit, probe notetur.
3. Tandem ex numeris summandis, qui omnes tanquam unitates spectantur, novenarius abjiciatur, quo-

 ties

ties fieri poteſt, & numerus novenariorum abjectorum una cum numero reſiduo, ſi quis fuerit, denuo notetur.

Quodſi enim uterque fuerit æqualis utrique ante reperto; numerus inventus æquatur omnibus datis ſimul ſumtis (§. 91), conſequenter additio rite peracta (§. 61). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. in exemplo Problematis 2, inter ſummandum 3 novenarii omittuntur, & ex ſumma reperta unus adhuc deleri poteſt: quo facto, relinquuntur 7. Sed ſi ex numeris ſummandis 4 novenarii abjiciantur, 7 ſimiliter relinquuntur. Quare additio rite peracta.

SCHOLION.

102. *Diſcrimen inter Demonſtrationem & Examen haud obſcurum eſt. Illa evincit per regulas præſcriptas inveniri debere numerum quæſitum; hoc docet regulas ad caſum ſingularem rite fuiſſe applicatas. Unde apparet Examinis utilitas, fruſtra obnitente* RAMO (*a*), *qui Demonſtrationem cum Examine confundit. Vulgo præcipiunt, ut tam ex ſumma quam aggregandis, notis ſingulis inſtar digitorum conſideratis, abjiciatur novenarius, & ex reſidui identitate operationis bonitatem colligunt. Sed cum Examen tum fallere poſſit, quando error novenarium vel ejus multiplum adæquat; ideo aliquantiſper idem immutavi, ut hunc quoque excluderet errorem. Ceterum non inutilia ſunt Examina, etſi non omnes errores detegant, modo iiſdem ſeſe non ſubducant, qui frequentius admittuntur.*

PROBLEMA IV.

103. *Numerum minorem e majore ſubtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Numerus minor ea lege majori ſubſcribatur, ut homogenei homogeneis reſpondeant, quemadmodum in additione præcepimus (§. 96).
2. Sub numeris hiſce ducatur linea recta.
3. Subtrahantur ſigillatim unitates ab unitatibus, decades a decadibus, centenarii a centenariis &c. & reſidua ſingula loco conveniente infra lineam ſcribantur, nempe reſiduum unitatum ſub unitatibus, decadum ſub decadibus, &c.
4. Quod ſi nota major e minore veniat ſubtrahenda, ex ſiniſteriore loco in dexteriorem transferatur unitas, quæ (§. 50) hic 10 valebit, ut ſubtractio fieri queat. Numerus vero unitate mulctatus puncto notetur, ne ipſum mulctatum eſſe obliviſcamur.
5. Si in loco ſiniſteriore cyphram reperiri contingat, unitas a numero proxime ſequente mutuetur, puncto propterea notando, ut ipſum unitate minutum eſſe conſtet. Unitas vero illa in locum dexteriorem translata decadis valorem tuebitur (§. 50). Quamobrem ubi plures cyphræ ſeſe inſequuntur, omnes hac ratione in novenarios mutentur, & numerus minor, a quo ſubtractio fieri debet, decade augeatur.

Juxta has regulas numerum quemcunque ex alio quocunque majore ſubtrahere licet.

Ex. gr. Si ex	9 8. 0. 0. 4. 0. 3 4. 5 9
ſubtrahas	4 7 4 3 8 6 5 2 6 3
Differentia eſt	5 0 5 6 5 3 8 1 9 6

Demtis enim 3 ex 9, relinquuntur 6 unitates

(*a*) In *Schol. Mathem.* lib. 4. pag. 114.

tates infra lineam ſcribendæ. Decades 6 ex 5 auferri nequeunt: a centenariis itaque 4 auferatur unus, & ejus loco decem decades decadibus jungantur. Ablatis itaque 6 ex iis, remanent 9 decades infra lineam loco conveniente ponendæ. Centenarii 2 ex 3 ſubducti relinquunt 1. Millenarii 5 ex 3 auferri nequeunt: a centenariis itaque millenariorum 4 auferatur unus, qui in locum vacuum delatus cyphram in decem decades millenariorum vertet. Inde ſi 1 decadem in locum millenariorum transferas, habebis hic 13 millenarios, ibi 9 decades millenariorum. Subductis jam 5 ex 13, reſidui fiunt millenarii 8. Demtis porro 6 millenariorum decadibus ex 9, relinquuntur 3. Jam ſi 8 ex 3 ſubtrahere debes, ab 8 ſiniſterioribus mutuetur unitas, cujus beneficio duæ cyphræ in 9 & 3 in 13 degenerabunt, ut tandem ſubtractio facillime abſolvatur.

DEMONSTRATIO.

Numerus inventus prodit, ſi unitates, decades, centenarios &c. numeri minoris, ex unitatibus, decadibus, centenariis &c. majoris ſubducas, *vi operationis*, hoc eſt, ſi ſingulas partes numeri minoris a ſingulis partibus majoris ſubtrahas (§. 50). Sed ſingulæ partes numeri minoris ſimul ſumtæ ſunt numero minori, & partes ſingulæ majoris ſimul ſumtæ ſunt majori æquales(§ 86). Ergo idem relinqui debet numerus, ſi totum numerum minorem e toto majore ſubtrahas (§. 91). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

104. *Si numeri heterogenei fuerint a ſe invicem ſubtrahendi; unitas mutuo petita non 10, ſed tot unitates valet, quot unitates ſpeciei minoris conſtituunt valorem unitatis ſpeciei majoris.*

Ex. gr.	45. thal.	16. gr.	6. num.
	27	23	9
	17 thal.	16 gr.	9 num.

Nimirum cum 9 nummi ex 6 ſubtrahi nequeant, ex 16 groſſis unus convertitur in 12 nummos, ut loco 6 habeantur 18. Subductis adeo 9 nummis ex 18, relinquuntur 9. Similiter cum 23 groſſi ex reſiduis 15 auferri nequeant, ex 45 thaleris unus ablatus in 24 groſſos convertitur: unde ſi ſubtrahantur 23, reſiduus eſt 1 groſſus 15 addendus, ut reſidui loco ponantur 16 groſſi. Denique 27 thaleri a 44 ablati relinquunt 17.

SCHOLION II.

105. *Quodſi numerus major e minore ſubtrahi jubeatur, evidens eſt id fieri non poſſe. Subtrahitur itaque minor e majore, & defectus notatur ſigno —. Ex. gr. Si quis 8 thaleros ſolvere debet, atque 3 nonniſi poſſidet: tribus ſolutis, 5 adhuc debet, qui per — 5 indigitantur.*

PROBLEMA V.

106. *Examinare ſubtractionem.*

RESOLUTIO.

Reſiduo addatur ſubtrahendus(§. 96). Quodſi enim ſumma fuerit æqualis minuendo; ſubtractio rite peracta (§. 64).

Ex. gr.	9800403459	Minuendus.
	4743865263	Subtrahend.
	5056538196	Differentia
	9800403459	

ALITER.

Quoniam in Subtractione reſiduum cum ſubtrahendo æquatur minuendo (§. 64); ſi minuendus ſumatur pro aggregato, reſiduum cum ſubtrahendo pro aggregandis (§. 61); examen per novenarium ſuccedet ut in additione (§. 101).

PROBLEMA VI.

107. *Examinare additionem per ſubtractionem.*

1. Deſcribantur in continua ſerie multipla

pla ſeptenarii centenario inferiora, nempe 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, 98, continua ſeptenarii additione invenienda. Eſt enim $7+7=14$, $14+7=21$, &c.

2. In exemplo ad examinandum propoſito, veluti

	5 6 6
8259	8 2 5 9
	5 2 6
2687	2 6 8 7
	3 4 2 5
10946	10946

ſumantur in aggregato binæ notæ ſiniſtimæ 10 & cum multiplis ſeptenarii conferantur.

3. Multiplum proxime inferius, aut ipſe ſeptenarius, veluti in noſtro caſu, ab iſtis notis ſubtrahatur & reſiduum 3 iiſdem ſuperſcribatur.

4. Juncta huic reſiduo 3 nota proxime ſequente 9, numerus inde reſultans 39 conferatur ut ante cum ſeptenarii multiplis; &,proxime minori 35 inde ſubducto, reſiduum 4 ſupra ſcribatur.

5. Hæc operatio continuetur, donec reſiduum ultimum 5 ſuper nota dextima obtineatur.

6. Singulæ aggregandorum ſeries 2687 & 8259 eodem modo tractentur.

7. Reſidua ſuper notis dextimis 6 & 6 addantur,& a ſumma 12 ſeptenarius, vel ejus multiplum proxime inferius abjiciatur.

Quodſi reſiduum fuerit idem cum reſiduo ſuper nota dextima aggregati, velut in noſtro exemplo 5; operatio rite peracta.

DEMONSTRATIO.

Ad operationem attento manifeſtum eſt, tum ex aggregato, tum ex aggregandis abjici omnia multipla ſeptupli, ex. gr. in noſtro caſu millenariorum, centenariorum, decadum, unitatum. Jam cum aggregatum ſit aggregandis æquale (§. 61), omnia quoque iſta multipla junctim ſumta utrobique æqualia eſſe debent (§. 86, 87). Cum adeo ab æqualibus æqualia auferantur; reſidua omnino æqualia ſint neceſſe eſt (§. 91). Quare ſi contingat, inæqualia reſidua fieri; id indicio erit, ſi examen rite inſtitutum, errorem in operatione admiſſum fuiſſe. *Q. e. d.*

ALITER.

1. Colligantur ſigillatim in unam ſummam ſingulæ ſeries verticales, quibus conſtant numeri ſummandi, initio facto a ſiniſtra & progrediendo verſus dextram, & quidem deſcendendo (§. 96).

2. Summæ partiales ſubtrahantur a notis ſummæ, quæ ſingulis ſeriebus reſpondent (§. 103).

Quodſi in loco dextimo, qui eſt unitatum, relinquatur cyphra, additio rite peracta.

Ex. gr. Sit exemplum additionis

	A	B	C	D
	3	5	7	9
	8	4	6	2
	5	3	7	6
1	7	4	1	7
	1	2	1	0

Collectis in unam ſummam notis in ſerie A, 16 ſubducatur ex 17, & reſidua 1 ſcribatur

batur sub 7. Similiter summa notarum in serie B 12 auferatur ex 14, residuo 2 sub 4 scripto. Summa notarum in serie C 20 tollatur ex 21 & residuum 1 ponatur sub 1. Denique si summa seriei D 17 ex 17 subtrahatur, relinquitur 0: quod indicio est, numerum 17417 esse summam quæsitam.

DEMONSTRATIO.

Ex operatione patet, a millenariis summæ subtrahi omnes millenarios summandorum, & a centenariis, decadibus, unitatibus summæ omnes centenarios, decades, unitates summandorum. Quodsi ergo operatione absoluta nihil relinquitur, summa tot præcise millenarios, centenarios, decades, unitates continet, quot numeri summandi simul sumti continent, atque adeo summa numeris summandis simul sumtis æqualis est (§. 87); consequenter additio rite peracta (*§. 61*).

SCHOLION.

108. *Examen primum adhuc procedere, si loco septenarii numerus alius sumatur ipsa Demonstratio insinuat. Solent etiam, examinis loco, additionem iterare, sed diversa ratione, ita ut una vice ascendendo, altera vero descendendo summatio perficiatur; facto tamen in utraque operatione initio a dextra & progrediendo versus sinistram.*

PROBLEMA VII.

109. *Abacum* Pythagoricum, *hoc est, Tabulam construere, in qua facta ex singulis digitis in singulos repræsentantur.*

RESOLUTIO.

1. Latera quadrati alicujus singula in 9 partes æquales dividantur & per lineas ipsi parallelas in areolas quadratas area ejus resolvatur.
2. In serie horizontali summa & laterali sinistima scribantur novem notæ numericæ, seu singuli digiti.
3. Addantur 2 & 2; aggregatum 4 scribatur infra 2. Addantur porro 2 & 4; aggregatum 6 collocetur sub 4. Addantur 2 & 6; aggregatum 8 ponatur sub 6; & ita porro.
4. Quodsi hæc additio per reliquos digitos eadem lege continuetur, Abacus *Pythagoricus* construetur. *Q. e. f.*

ABACUS PYTHAGORICUS.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

SCHOLION.

110. *Abacum* Pythagoricum *memoriæ mandare tenetur multiplicationem ac divisionem expedite absoluturus. Quamdiu vero memoriæ infixus non est, ad manus esse debet, quoties multiplicas aut dividis.*

PROBLEMA VIII.

111. *Numerum quendam datum per alium datum multiplicare.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicator scribatur sub multiplicando, ut in additione (§. *96*).
2. Ducatur sub iis linea recta.
3. Infra hanc ex Abaco *Pythagorico* scribantur singula producta ex sin-

gulis multiplicandi notis in unitates multiplicatoris; similiter ex illis in reliquas hujus notas; ea quidem lege, ut decades cujuslibet producti annumerentur producto proxime sinisteriori, & productum ex multiplicando in decades multiplicatoris in loco decadum, productum ex multiplicando in centenarios multiplicatoris in loco centenariorum &c. scribere incipiamus.

4. Producta partialia addantur (§. 96). Dico aggregatum esse factum quæsitum.

Ex. gr. Sint factores 38476 & 35. Multiplicatore sub multiplicando scripto, duc 5 in 6, cumque factum, vi Abaci *Pythagorici*, fit 30, scribe 0 sub 5 & 3 decades annumera facto ex 5 in 7, quod est 35. Additis itaque 3 ad 35, prodeunt 38. Pone 8 juxta 0 versus sinistram & facto ex 5 in 4, nempe 20, adde 3, ut prodeant 23 (scilicet centenarii). Scribe itaque 3 in loco centenariorum & 2 millenarios annumera facto 40 ex 5 in 8, ut habeatur summa 42 millenariorum. Scribe 2 in loco millenariorum; 4 vero decades millenariorum adde facto 15 ex 5 in 3, & summam 19 in loco conveniente repone. Ita habetur factum ex multiplicando in dexteram multiplicantis notam. Quodsi eadem ratione quæratur factum ex multiplicando in sinistram multiplicatoris notam 30 & producta partialia addantur; prodibit tandem factum ex 35 in 38476, nempe 1346660.

```
  38476
     35
-------
 192380
 115428
-------
1346660
```

DEMONSTRATIO.

Vi operationis & Abaci *Pythagorici*, primus numerus intra lineas scriptus singulas multiplicandi notas, hoc est, singulas ejusdem partes (§. 50), adeoque multiplicandum ipsum (§. 9), toties continet, quoties prima multiplicatoris nota unitatem. Eodem modo patet, quod numerus secundus intra lineas scriptus multiplicandum toties contineat, quoties nota secunda multiplicantis unitatem, &c. Sed cum numeri intra lineas scripti adduntur, summa iisdem æqualis est (§. 61), adeoque multiplicandum toties continet, quoties singulæ multiplicatoris notæ, hoc est, partes (§. 50), consequenter totus multiplicator (§. 9) unitatem continet. Est igitur factum ex multiplicando in multiplicantem (§. 66). *Q. e. d.*

SCHOLION.

112. *Si factoribus* cyphræ *adhæreant, producto invento eædem adjunguntur, ut ex sequentibus exemplis manifestum.*

```
  3578        4760
    30        2000
------    --------
107340     9520000
```

PROBLEMA IX.

113. *Lamellas* Neperianas *parare, quarum ope multiplicationem ac divisionem facilius absolvere licet, quam per Abacum* Pythagoricum.

RESOLUTIO.

1. Ex orichalco, ligno, aut charta compacta, parentur lamellæ oblongæ in novem quadratula divisæ, quæ per diagonales denuo in duo triangula singula resolvantur. Fig. 2.
2. In illis quadratulis ea lege scribatur Tabula *Pythagorica*, ut notæ solitariæ, aut dextræ, triangulum dextrum, notæ autem sinistræ sinistrum cedat. *Sic factum est, quod petebatur.*

SCHO-

SCHOLION.

114. *Has lamellas ſub initium ſeculi ſuperioris invenit* Joannes NEPERUS, *Baro* Merchiſtonii, *Scotus*, *& peculiari libello deſcripſit, cui* Rhabdologiæ *nomen impoſuit.*

PROBLEMA X.

115. *Multiplicare numerum datum per datum alium, lamellarum* Neperianarum *ope.*

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte exhibeant multiplicandum.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. In hac quære dextimam multiplicatoris notam, &
4. Ipſi reſpondentes numeros in quadratulis reliquarum lamellarum ita exſcribe, ut in unam ſummam colligantur numeri in eodem rhombo obvii.
5. Eodem modo exſcribe numeros reliquis multiplicatoris notis reſpondentes & decenter infra factores (§. 111) ſcribe.
6. Tandem ut ante (§. 111) facta hæc partialia in unam ſummam collige. *Sic f. e. q. p.*

Fig. 3. Ex. gr. Sit multiplicandus 5978, multiplicator 937; ex triangulo dextimo, quod dextimæ multiplicatoris notæ 7 reſpondet, exſcribe 6 & pone infra lineam. Mox in rhombo verſus ſiniſtram proxime ſequente 9 & 5 adde & ſummæ 14 notam dextram ſcribe juxta 6, ſed 1 connumera 3 & 4 in rhombo ulteriore obviis. Aggregatum 8 junge jam inventis 46. Similiter in rhombo ultimo adde 6 & 5. Summæ 11 notam dextram 1 pone, ut ante, infra lineam; ſiniſtram vero itidem 1 adde notæ 3 in ſiniſtro triangulo deprehenſæ. Summam 4 ſi 1846 a ſiniſtris jungas; habebis factum ex 7 in 5978. Eodem modo reperies facta ex 5978 in reliquas multiplicatoris notas 3 & 9.

```
   5987
    937
-------
  41846
 17934
53802
-------
5601386
```

PROBLEMA XI.

116. *Numerum quemlibet per alium quemcunque, ſine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, multiplicare.*

RESOLUTIO.

Omne artificium huc redit, ut ex ſimplo, duplo, & decuplo, per additionem, ſubtractionem, & mediationem, ſingula multipla inveniantur. Nimirum numerus quilibet ſibimetipſi additus producit ſui *duplum*. Addatur huic ſimplum, ſumma eſt numeri dati *triplum*. Duplum addatur ſibimetipſi, aggregatum eſt numeri dati *quadruplum*. Medietur decuplum, hoc eſt, ipſe numerus datus cyphra auctus (§. 112), prodibit *quintuplum*. Quintuplo addatur ſimplum, vel duplum, habebitur *ſextuplum*, vel *ſeptuplum*. Ex decuplo ſubtrahatur duplum, vel ſimplum, reſiduum erit *octuplum*, vel *noncuplum*. Sine Abaci itaque *Pythagorici* ſubſidio multiplicaturo familiaris ſit ſequens a *Jobo* LUDOLFFO, in Academia Erfordienſi nuper Mathematum Profeſſore, in Arithmeticam primum introducta

NOMENCLATURA.

1. Simplum.	1 *Simplum.*
2. Duplum.	1 + 1 *Simplum & ſimplum.*
3. Triplum.	2 + 1 *Duplum & ſimplum.*
4. Quadruplum.	2 + 2 *Dupli duplum.*
5. Quintuplum.	$\frac{10}{2}$ *Decupli dimidium.*
6. Sextuplum.	$\frac{10}{2}$ + 1 *Decupli dimidium & ſimplum.*
7. Septuplum.	$\frac{10}{2}$ + 2 *Decupli dimidium & duplum.*
8. Octuplum.	10 − 2 *Decuplum ſine duplo.*
9. Noncuplum.	10 − 1 *Decuplum ſine ſimplo.*

Ex. gr. 3894.

Simplum	Duplum	Triplum
3894	3894 3894 7788	3894 7788 11682
Quadruplum	**Quintuplum**	**Sextuplum**
7788 7788 15576	38940 19470	3894 19470 23364
Sextuplum	**Octuplum**	**Noncuplum**
7788 19470 27258	38940 7788 31152	38940 3894 35046

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, infra lineam ſcribatur multiplicandi duplum & decupli dimidium, ut beneficio *Nomenclaturæ* exinde multipla ejus erui poſſint, quæ deſiderantur. Sub ducta igitur altera linea ſcribantur more conſueto (§. 111) multiplicandi multipla.

```
 37896 A
  6874
---------
 75792 B
189480 C
---------
151584 D
265272E
303168F
227376G
---------
260497104
```

Ex. gr. Sit multiplicans 6874, multiplicandus A 37896. Infra lineam ſcribatur B ipſius A duplum & porro C decupli ipſius A dimidium. Reperies ergo 1°. D ipſius A quadruplum, ſumendo duplum ipſius B; 2°. E ſeptuplum ipſius A, addendo B & C; 3°. F octuplum ipſius A, vel addendo C, B & A, vel B ſubducendo a decuplo ipſius A, hoc eſt ex A cyphra aucto; 4°. denique G, addendo C & A.

Si multiplicator ex pluribus notis conſtet, ſæpius ex productis jam inventis, per additionem vel ſubtractionem, inveniri poſſunt quæ adhuc deſiderantur; nec tum *Nomenclaturæ* propoſitæ ſtricte inhærendum, ita ut non opus ſit infra lineam demum ſcribi duplum multiplicandi & decupli ejuſdem dimidium.

```
     895765482 ⎤
743) ----------⎬
    1791530964 ⎥
   3583061928  ⎦
  6270358374
--------------
  665553753126
```

Ex. gr. ſit multiplicans 743. Factum facillime invenietur, ſi multiplicando ſubſcribatur 1° duplum, 2° dupli duplum, 3° ſumma ex ſimplo, duplo & dupli duplo, & tria hæc multipla multiplicando addantur.

Similiter ſi multiplicans fuerit 789, ſub multiplicando ſcribitur decuplum ſine ſimplo, quod eſt noncuplum. Ex eo ſi denuo auferatur ſimplum, relinquetur octuplum. Quod ſi & ab hoc ſimplum ſubducas, reſiduum erit ſeptuplum.

```
      895765482
789) -----------
     8061889338
    7166123856
   6270358374
---------------
   706758965298
```

PRO-

PROBLEMA XII.

117. *Numerum datum per alium minorem dividere.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si divisor unica fuerit nota:

1. Scribatur is sub nota dividendi sinistima, aut, si ea minor fuerit sub proxime sequente, ac ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties in nota vel notis suprascriptis contineatur. Numerus, qui hoc indicat, ponatur dexteram versus post lunulam loco quoti.
2. Quotus ducatur in divisorem & productum ex nota vel notis suprascriptis dividendi subtrahatur, & his deletis, si quod fuerit residuum, suprascribatur.
3. Divisor ad notam subsequentem versus dexteram promoveatur, & ope Abaci *Pythagorici* denuo investigetur, quoties is in notis suprascriptis contineatur. Reliqua peragantur ut ante.
4. Quodsi hæc operatio per singulas dividendi notas continuetur, quotus invenietur. *Q. e f.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 3. Ponantur 3 sub 7, & per Abacum *Pythagoricum* innotescit 3 in 7 bis contineri. Scribantur ergo 2 post lunulam loco quoti & factum ex 2 in 3,

```
1   22
7856 (2618 2/3
3333
```

hoc est 6, subtrahatur ex 7 lineola transversa delendis, residua unitas suprascribatur. Promoveatur divisor 3 sub 8, cumque, vi Abaci *Pythagorici*, 3 in 18 sexies contineatur, scribantur 6 loco quoti & factum 18 ex 3 in 6 ex 18 subducatur: quo in casu nihil relinquitur. Quodsi eadem ratione pergatur, quotus tandem integer prodit 2618 & binarius 2 remanet: id quod indicio est, numerum propositum in tres partes æquales exacte dividi non posse.

DEMONSTRATIO.

Ex ipsa operatione liquet, numerum inventum indicare, quoties divisor in millenariis, centenariis, decadibus, unitatibus dividendi, hoc est, in singulis ejus partibus (§. 50), adeoque in toto dividendo (§ 9) contineatur, consequenter unitatem toties continet, quoties dividendus divisorem. Est igitur quotus (§. 69). *Q. e. d.*

Casus II. Si divisor ex notis pluribus constet.

1. Sinistima ejus nota scribatur sub nota sinistima dividendi & reliquæ dexteriores sub proxime sequentibus versus dexteram.
2. Ope Abaci *Pythagorici* investigetur, quoties prima divisoris nota in prima dividendi contineatur.
3. Numerus inventus ducatur in divisorem integrum & dispiciatur, utrum factum ex numeris suprascriptis subtrahi possit, nec ne.
4. Si subtractio fieri queat, scribatur is loco quoti post lunulam & subtractio actu peragatur. Numeri, ex quibus subtractio fit, lineola transversa deleantur, & qui residui fuerint, suprascribantur. Quodsi vero subtractio non succedat, loco quoti sumatur numerus unitate vel aliquot unitatibus minor, donec fac-

tum ex eo in divisorem ad notas dividendi quam proxime accedat & ex iis auferri queat.

5. Divisor loco uno versus dexteram promoveatur & reliqua ut ante peragantur.

6. Hæc operatio continuetur, donec divisor ulterius promoveri nequeat. *Sic f. e. q. p.*

Ex. gr. Sit dividendus 7856, divisor 32.

```
 1
 1 1
1 4 7
7 8 5 6 (245 16/32
3 2 2 2
  3 3
```

Scribantur 32 sub 78 & inquiratur, quoties 3 in 7 contineantur. Cum itaque bis in ea contineantur; ducantur 2 in 32 &, quia factum 64 ex 78 subtrahi potest, 2 scribantur post lunulam &, subtractione peracta residuisque 14 suprascriptis, divisor loco uno promoveatur. Quo facto investigetur quoties 3 in 14 contineantur, & factum ex 4 in 32, hoc est 128, subducatur ex 145, residuo 17 suprascripto & 4 in loco quoti post lunulam repositis. Promoveatur divisor denuo loco uno & quæratur, quoties 3 in 17 contineantur. Numerus 5, qui hoc indicat, jungatur quoto jam invento, & factum ex eo in divisorem 32, nempe 160 subtrahatur ex 176, residuo 16 ut ante suprascripto. Dico numerum inventum $246\frac{16}{32}$ esse quotum quæsitum.

Si divisor ex pluribus præsertim constet notis, præstat multipla quoti subtrahenda sub notis dividendi, ex quibus subtractio fieri debet, immediate scribi & sub subtrahendo residuum, cui continuandæ divisionis gratia jungitur nota dividendi sequens, donec nulla superfuerit, adeoque divisio absoluta.

Ex. gr. Sit dividendus 385797, divisor 8672,

```
385797 (44
        8672
34688
------
 38917
 34688
-------
  4219
```

quem tibi sub loco quoti notabis. Jam cum 8 in 38 quater contineatur, scribe divisoris 8672 quadruplum sub notis dividendi 38579, & residuum 3891 sub eodem, juncta eidem nota sequente 7, ut divisio continuari possit. Quoniam itaque divisor in notis 38917 denuo 4 continetur, quadruplum divisoris ut ante sub iisdem ponitur & ex ipsis aufertur. Erit $44\frac{4219}{8672}$ quotus.

DEMONSTRATIO.

Eadem fere est demonstratio, quæ in casu primo, hoc unice notato, quod, cum ex Abaco *Pythagorico* constare nequeat quoties divisor integer in notis dividendi suprascriptis contineatur, interea supponatur toties illum in his contineri, quoties sinistima divisoris nota continetur in sinistima aut duabus sinistimis dividendi notis. Licet enim hæc suppositio subinde fallat, in errorem tamen inducere nequit, quia examen mox instituitur, cum factum ex divisore in quotum juxta eam inventum cum dividendo comparatur, & pseudoquotus unitate tamdiu minuitur, donec in verum abeat.

SCHOLION.

118. *Equidem hæc methodus tædiosa videtur, quod raro verus quotus prima statim vice per eam eliciatur. Enimvero experientia comprobatur, examen, quod instituendum, cogitationum celeritati parere in exercitatis.*

PROBLEMA XIII.

119. *Divisionem per lamellas* Neperianas *absolvere.*

RE-

RESOLUTIO.

1. Lamellas ita diſpone, ut in fronte referant diviſorem.
2. Eis ad ſiniſtram junge lamellam unitatum.
3. Sub diviſore deſcende, donec occurrant notæ dividendi, in quibus quoties contineatur, diſquiritur, aut numerus ipſis proxime minor ex dividendo ſubtrahendus.
4. Numerus in lamella unitatum reſpondens ſcribatur loco quoti.
5. Quodſi eadem ratione partes quoti reliquas inveſtiges, diviſio tota abſolvetur.

Fig. 3. Ex. gr. Sit dividendus 5601386, diviſor 5978. Quoniam quæritur, quoties in 56013 contineantur 5978; ſub diviſore deſcendendo in infima ſerie reperitur numerus 53802 quam proxime ad 56013 accedens, quorum ille ex hoc ſubtrahitur, & in lamella unitatum reſpondens 9 loco quoti ſcribitur. Reſiduo 2211 jungitur nota dividendi ſequens 8, cumque ut ante per lamellas reperiatur huic convenire quam proxime numerus 17934, ipſi in lamella unitatum reſpondens 3 ſcribatur loco quoti, & ſubtractio ut ante peragatur. Eodem modo pars tertia quoti 7 reperitur.

```
5601386(937
53802..
———————
 22118.
 17934.
———————
  41846
  41846
———————
  00000
```

PROBLEMA XIV.

120. *Sine Abaci* Pythagorici *ſubſidio, numerum datum dividere per alium datum.*

RESOLUTIO.

1. Dividendo ad dexteram more conſueto jungatur lunula & infra locum quoti ducatur linea recta.
2. Infra hanc lineam ſcribatur diviſor, ejus duplum & decupli dimidium ſive quintuplum: quibus numeris a dextris 1, 2, & 5 adſcribi oportet. Inde nimirum quodcunque diviſoris multiplum (§. 116) elicitur.
3. Tot dividendi notæ, quot diviſor habuerit, comparentur cum illius multiplis modo inventis: ita enim quotus innoteſcet.
4. Is more ſolito poſt lunulam ſcribatur, ipſi vero reſpondens multiplum diviſoris ſub notis dividendi, quas modo diximus, atque ex his ſubducatur.
5. Reſiduo adjungatur nota dividendi proxime ſequens: reliqua ut ante peragantur.

Quodſi hæc operatio continuetur, ſine Abaci *Pythagorici* ſubſidio quotus eruetur. *Q. e. f.*

Ex. gr. Sit dividendus 385724615, diviſor 175. Scribantur numeri dati cum diviſoris multiplis, ut hic factum eſſe apparet. Cum multiplis diviſoris compara 385 & quoniam illius duplum 350 quam proxime convenit; ſcribe 2 loco quoti & 350 ſubduc ex 385. Reſiduo 35 junge notam dividen-

```
385724615 (2204140
350        ———————
———            175 | 1
 357           350 | 2
 350           875 | 5
—————
  724
  700
—————
   2.46
    175
   ————
     711
     700
    ————
     115
```

videndi proxime sequentem 7 & 357 denuo compara cum divisoris multiplis. Quoniam vero denuo duplum 350 quam proxime accedit, idem ex 357 subtrahe & quoti loco rursus scribe 2. Residuo 7 junge notam subsequentem 2. Quia dividendus 72 est divisore 175 minor, quotus erit 0. Junge numero 72 notam dividendi 4, & cum 724 inter duplum 350 atque quintuplum 875 cadant, ipsique dupli duplum, hoc est quadruplum divisoris, 700, quam proxime conveniat, quotus erit hoc in casu 4. Quodsi hac ratione operationem continuare libuerit, reperietur quotus integer 2204140 & residuum erit 115.

SCHOLION.

121. *Hæc dividendi methodus & meditandi difficultatem & errandi facilitatem tollit, cui obnoxia est altera in Problemate duodecimo exposita. Quamvis igitur eam serio commendem, nolim tamen ut Abacus* Pythagoricus *prorsus rejiciatur, quoniam subinde casus occurrunt, in quibus eodem minus commode caremus. Fractionum reductio ad minores terminos inter alia assertum nostrum confirmabit.*

PROBLEMA XV.

122. *Examinare multiplicationem.*

RESOLUTIO.

Dividatur factum per multiplicandum, quotus erit multiplicans; aut factum dividatur per multiplicantem, quotus erit multiplicandus, si multiplicatio rite fuerit peracta.

```
38476) 1346660 (35
       115428
       ------
        192380
        192380
        ------
        000000
```

Ex. gr. Si multiplicandus 38476, multiplicator 35; factum est 1346660 (§. 111). Si vero 1346660 per 38476 dividas, quotus est 35.

ALITER.

1. Abjiciatur ex multiplicando 857 novenarius, quoties fieri potest.
2. Residuum 2 ducatur in multiplicatorem 4, si novenario minor fuerit, & ex facto, ubi novenarium superaverit, abjiciatur itidem novenarius, quoties fieri potest, noteturque residuum.
3. Ex facto 3428 exterminetur etiam novenarius, quoties datur.

Quodsi residuum 8 idem fuerit cum facto anteriore, aut ejus residuo; operatio rite peracta.

4. Si multiplicator fuerit novenario major, residuum in multiplicando ducatur non in ipsum multiplicatorem, sed in id, quod abjectis novenariis relinquitur.

```
 857
  65
----
4285
5142
----
55705
```

Ex. gr. Si multiplicandus 857, multiplicator 65; factum erit 55705. Abjectis novenariis, in facto relinquitur 4, in multiplicando 2, in multiplicatore itidem 2: quorum residuorum factum cum sit 4, id indicio est multiplicationem rite fuisse peractam.

DEMONSTRATIO.

Cum multiplicatio sit iterata ejusdem numeri additio (§. 67), & factum quidem summæ, multiplicandus toties iteratus quot multiplicator unitates habet numeris aggregandis respondeat (§. 61, 66); ex facto & multiplicando iterato abjiciendus est novenarius, quoties fieri potest (§. 101). Quoniam itaque novenario ex multiplicando abjecto quoties datur, residuum toties relinquitur quot multiplicator unitates

unitates habet; evidens est, istud in multiplicatorem duci atque ex facto novenarium denuo exterminari debere quoties licet, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat unum.*

Quoniam vero perinde est, sive residuum in multiplicatorem, sive multiplicator in residuum ducatur, quemadmodum inferius (§. 207) independenter ab his demonstrabitur; per primum patet, etiam ex multiplicatore, si novenario major fuerit, novenarium toties exterminari debere quoties fieri potest, & residuum hoc ducendum esse in residuum ex multiplicando, ut habeatur residuum numeris aggregandis respondens. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

123. *Demonstratio majorem evidentiam nanciscitur, ubi ad exemplum applicatur: id quod etiam de quacunque alia intelligendum.*

PROBLEMA XVI.

124. *Examinare divisionem.*

RESOLUTIO.

1. Quotus ducatur in divisorem, aut divisor in quotum.
2. Facto addatur, si quod a divisione fuerit residuum.

Quodsi hac ratione prodeat dividendus, divisio legitime peracta. (§. 212).

245 32 —— 490 735 —— 7840 16 —— 7856	Ex. gr. Si 7856 dividas per 32, quotus est 245, residuum 16. Duc 245 in 32 & facto 7840 adde 16; habebis dividendum 7856. Constat igitur divisionem legitime fuisse peractam.

ALITER.

Cum, vi examinis prioris, dividendus sit factum ex divisore in quotum; examen quoque instituetur, abjiciendo ex dividendo, itidemque ex divisore & quoto, novenarium quoties datur, atque residuum in divisore multiplicando per residuum in quoto, & facto, quod inde emergit, addendo residuum ex divisione.

Ex. gr. In exemplo antecedente exterminato in dividendo 7856 novenario, relinquitur 8. Idem si tentetur in divisore 32 & quoto 245; ibi 5, hic 2 residuum erit. Quodsi ulterius facto 10 ex 5 in 2 addatur residuum ex divisione 16, & ex aggregato 26 tentetur more communi abjectio novenarii; habebitur, ut in dividendo, residuum 8.

SCHOLION GENERALE.

125. *Superest ut videamus, juxta quasnam regulas intellectus in hactenus expositis operationibus arithmeticis dirigatur. Meditaturi regulas duplicis generis offendemus, quarum aliæ imaginationem, aliæ intellectum purum dirigunt. Priores in numerorum scriptione, linearum ac lunulæ ductu, notarum in divisione a subtractione peracta deletione, &c. continentur. Scriptio numerorum varias suppeditat regulas, quibus vires imaginationis extenduntur. Numeros enim quosvis, quantumvis magnos & una varios, menti præsentes exhibet quamdiu libuerit, qui alias disparent cum vix eam subierint: quo ipso cogitationes a meditationibus alienæ arcentur, domesticæ autem quantolibet temporis intervallo in nota qualibet numerorum datorum designuntur. Hinc discimus*

1. Intellectum uti debere in meditando subsidiis imaginationis, objecto meditationis convenientibus, ex ejus adeo indole in dato quolibet casu particulari derivandis.

2. Quæ intellectus meditatur, ea, quantum fieri potest, imaginationi præsentia sistenda esse: quod observasse in tyronibus quoque instituendis plurimum prodest, cum ad disciplinas animum appellentes operationibus intellectus puri parum sint adsueti, operationes vero imaginationis a primis (quod Græci aiunt) unguiculis familiarissimæ ipsis existant.

Ipsa vero hæc numerorum scriptio præstat, ut intellectus tum singula sigillatim meditari, tum singula cum singulis, prout commodum visum fuerit, conferre possit. Vide imprimis Cor. 1, Probl. 2, (§. 98), Probl. 4, (§. 103), Probl. 11, (§. 116), & Probl. 14, (§. 120.) Utrumque difficultates partim ex rerum meditandarum serie nimis longa enasci solitas, partim ordini, quo cogitationes promoventur, parum convenienti debitas tollit. Unde liquet

3. Ad minuendam in meditando difficultatem, singula distincte imaginationi repræsentanda esse; ita ut objectum meditationis repræsentetur secundum omnes relationes datas, & tota totius repræsentatio ex partialibus singularum relationum componatur. Hanc regulam in *Arte characteristica* perficienda magni momenti esse, inferius in Analysi patebit. Eadem secundæ juncta tyronum institutioni egregia suppeditat adjumenta. Inservit etiam confusæ cognitioni eorum, quæ sigillatim distincte cognita fuerunt: cujus usum Demonstrationes geometricæ inferius concipiendæ loquentur.

Linearum & lunulæ ductus, notarum deletio, punctum notis unitate mulctatis adjectum impediunt, ne eadem pro diversis aut diversa pro iisdem habentes in errorem incidamus: quo ipso docemur

4. Quæ sunt eadem in intellectu, ut eadem repræsentari debere imaginationi; quæ vero diversa sunt in intellectu, ut diversa quoque repræsentanda esse. Sunt eadem in intellectu, quæ sub notione communi continentur. Hæc vero regula errori potissimum discavet.

Progrediendum nunc ad alterum regularum genus, quibus intellectus purus juvatur. Numeri dati distinguuntur in varias classes, nempe in unitates, decades, centenarios, &c. & in hisce classibus singuli numeri singulis characteribus discernuntur. Satisfit igitur huic regulæ generali:

1. Quæstio proposita in tot partes resolvenda, quot res diversæ naturæ in eadem involvuntur.

Additio & subtractio in singulis numerorum classibus sigillatim peragitur: nec minus, in multiplicatione ac divisione, facta & quoti particularia quæruntur, ut inde componatur numerus quæsitus. Discimus adeo

2. Singula quæ in quæstione proposita involvuntur, esse sigillatim expendenda, &, quæ inde deducta sunt, inter se conferenda.

In operationibus arithmeticis, vel ad notiones numerorum respicimus, vel eorum proprietates, ex. gr. ex Abaco Pythagorico, *in memoriam nobis revocamus. Unde patet*

3. Dum singula in se considerantur, vel notiones eorundem evolvendas, vel proprietates & relationes ad alias alio tempore cognitas in memoriam revocandas esse.

Si divisor ex pluribus notis constet, ad facilitandum laborem assumitur integrum divisorem in omnibus dividendi notis suprascriptis toties contineri, quoties nota divisoris prima in nota prima dividendi continetur. Sed cum hypothesis fallere queat, utrum quotus inventus sit verus nec ne, probatur. In his vero continetur regula generalis hujusmodi:

4. Si datorum numerus de re eadem sit ingens, ex. gr. si in Astronomia multa admodum phænomena motus siderum dentur, qualis

qualis esse debeat rei natura, ex. gr. structura systematis mundani, ut quibusdam phænomenis satisfiat, primo investigandum; dein ulterius disquirendum, utrum phænomenis quoque reliquis satisfiat nec ne. Ita si contingat, nos in hypothesin falsam incidere, eam facilius emendare, quam ex simultanea omnium consideratione, prima statim vice, veram elicere licebit. Hæc regula in scientia naturali multum habet usum, non minus in inveniendo, quam in aliorum hypothesibus dijudicandis.

Licet abunde constet per demonstrationes, regularum, quibus utimur, ope numerum quæsitum inveniri; examina tamen non negliguntur, quibus convincimur nos in regularum applicatione non aberrasse. Docemur ergo

5. Consultum esse, ut dispiciamus, an veritates a priori deductæ experientiæ respondeant.

Plura non addimus, cum hæc speciminis tantum loco in medium proferantur.

CAPUT III.

De Ratione ac Proportione Quantitatum.

DEFINITIO XXXIX.

126. *Ratio* est ea homogeneorum relatio, quæ quantitatem unius determinat ex quantitate alterius, sine tertio homogeneo assumto. Homogenea, quæ comparantur, dicuntur *Termini Rationis* & in specie *Antecedens* vocatur, qui ad alterum refertur; *Consequens* vero, ad quem alter refertur.

SCHOLION I.

127. EUCLIDES *Rationem definit per* habitudinem magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem. *Sed hæc definitio incompleta: dantur enim & aliæ magnitudinum relationes, quæ sunt constantes, nec tamen in rationum numero continentur. Talis est sinus recti ad sinum complementi in Trigonometria. Completam reddidit Vir summus* LEIBNITIUS. *Equidem &* HOBBESIUS *Definitionis* Euclideæ *correctionem tentavit* (a); *sed infeliciter. Cum enim Rationem definiat per* magnitudinis ad magnitudinem relationem; *definitio ejus non modo id vitii habet, quod* Euclidea, *quod scilicet relationis speciem non determinet; verum etiam in eo peccat, quod speciem magnitudinum non exprimat, qua rationem inter se habere possunt.*

SCHOLION II.

128. *Ceterum hic de ratione quantitatum in genere, non tantum de ratione numerorum agimus, quia hæc doctrina non modo ad commensurabilia, sed etiam ad incommensurabilia, hoc est, ad quantitatum quodvis genus applicari debet.*

COROLLARIUM I.

129. Cum in fractionibus relatio numeratoris ad denominatorem sine tertio homogeneo assumto intelligatur (§. 59); erit ea ratio.

COROLLARIUM II.

130. Si duæ quantitates inter se comparantur sine tertia homogenea assumta, aut una alteri æqualis, aut inæqualis deprehenditur (§. 83). Ratio itaque vel æqualitatis, vel inæqualitatis.

COROLLARIUM III.

131. Si termini rationis fuerint inæquales,

(a) In Tractatu *De principiis & ratiocinatione Geometrarum*, c. XI. p. 22.

les, vel minor refertur ad majorem, vel major ad minorem (§. 21); minor nempe ad majorem tanquam pars ad totum, major vero ad minorem tanquam totum ad partem (§. 20): Ratio itaque determinat, quoties minus in majore contineatur, vel quoties majus minus contineat, hoc est, quantæ majoris parti minus æquetur: id quod divisio prodit (§. 69).

COROLLARIUM IV.

132. Ceterum quia ratio per se intelligibilis (§. 126), iis discernendis inservire potest, quæ compræsentia non sunt (§. 27).

DEFINITIO XL.

133. *Ratio majoris inæqualitatis* est, quam habet majus ad minus, ex. gr. 6 ad 3. *Ratio* vero minoris *inæqualitatis* est, quam habet minus ad majus, ex. gr. 3 ad 6.

DEFINITIO XLI.

134. *Ratio rationalis* dicitur, quæ est ut unitas, vel numerus rationalis, ad numerum rationalem, ex. gr. ut 3 ad 4. *Irrationalis* vocatur, quæ numeris rationalibus exprimi nequit.

SCHOLION.

135. *Sint duæ quantitates A & B, sitque A < B. Si A & B toties subtrahas, quoties fieri poterit, ex. gr. quinquies, relinquetur vel nihil, vel aliquid. In priori ergo casu A erit ad B ut* 1 *ad* 5, *hoc est, A in B quinquies continetur, seu* $A = \frac{1}{5} B$. *Ratio ergo est rationalis. In casu posteriori aut dabitur pars aliqua, quæ aliquoties ex A, ex. gr. ter, itidemque ex B, ex. gr. septies subducta nihil relinquit; aut nulla dabitur istiusmodi pars. Si prius: erit A ad B ut 3 ad 7, seu* $A = \frac{3}{7} B$, *adeoque ratio denuo rationalis. Si posterius: ratio ipsius A ad B numeris exprimi nequit rationalibus, hoc est, dici nequit, quanta pars ipsius B sit A. Suo autem loco ostendetur, quomodo pars illa aliquota communis inveniri possit, nec minus demonstrabitur, dari quantitates quæ rationem irrationalem habent. Hinc simul lumen affunditur Definitioni Rationis, dum ostendimus, quomodo ex comparatione duorum homogeneorum, sine tertio homogeneo assumto, ratio intelligi possit. Nimirum aut minus majoris, aut pars, quæ utrique inest, utriusque mensura constituitur, vel, quod perinde est, minus, aut prædicta pars, pro unitate assumitur, & in casu priore majus, in posteriore majus & minus per numeros exprimuntur: quos in ratione irrationali irrationales esse suo loco constabit.*

DEFINITIO XLII.

136. *Exponentem rationis* dico quotum, qui ex divisione antecedentis per consequentem emergit. Ex. gr. rationis 3 ad 2 exponens est $1\frac{1}{2}$; sed rationis 2 ad 3 est $\frac{2}{3}$. Vocatur is etiam *Denominator*, nec non *Nomen rationis*.

SCHOLION.

137. *In Geometria demonstrabitur, quod exponens rationis datæ exprimi possit linea, licet in numeris, vel rationalibus, vel irrationalibus, eundem exhibere non valeamus.*

COROLLARIUM I.

138. Si consequens est unitas, antecedens ipse exponens rationis; ex. gr. rationis 4 ad 1 exponens est 4.

COROLLARIUM II.

139. Numerus ergo quilibet integer exprimit rationem multi ad unum, seu multitudinis ad unitatem.

COROLLARIUM III.

140. Exponens rationis est ad unitatem ut antecedens ad consequentem (§. 69).

COROL-

COROLLARIUM IV.

141. Rationes per exponentes discernuntur (§. 131, 136), atque adeo, si antecedens A, consequens B, ratio ipsius A ad B commode exprimitur per A : B (§. 71).

DEFINITIO XLIII.

142. Si terminus minor est pars aliquota majoris, *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur ***multiplex***; *Ratio* vero minoris inæqualitatis *submultiplex*. Speciatim in casu primo *dupla*, si exponens 2; *tripla*, si 3, &c. in altero *subdupla*, si exponens $\frac{1}{2}$; *subtripla*, si $\frac{1}{3}$, &c. Ex. gr. 6 ad 2 habet rationem triplam, continet enim senarius binarium ter; contra 2 ad 6 est in ratione subtripla, continet enim binarius tertiam senarii partem.

DEFINITIO XLIV.

143. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur *superparticularis*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo vocatur *sesquialtera*, si exponens $1\frac{1}{2}$; *sesquitertia*, si $1\frac{1}{3}$, &c. in altero *subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{3}$; *subsesquitertia*, si $\frac{3}{4}$, &c. Ex. gr. 3 ad 2 est in ratione sesquialtera; 2 ad 3 in subsesquialtera.

DEFINITIO XLV.

144. Si terminus major minorem semel continet ac insuper partes ipsius aliquot aliquotas; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur *superpartiens*, *Ratio* minoris inæqualitatis *subsuperpartiens*. Speciatim in casu priore dicitur *superbipartiens tertias*, si exponens $1\frac{2}{3}$; *supertripartiens quartas*, si $1\frac{3}{4}$; *superquadripartiens septimas*, si $1\frac{4}{7}$, &c. in posteriore *subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{5}$; *subsupertripartiens quartas*, si $\frac{4}{7}$; *subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{11}$, &c. Ex. gr. 5 ad 3 est ratio superbipartiens tertias; sed 3 ad 5 ratio subsuperbipartiens tertias.

DEFINITIO XLVI.

145. Si terminus major minorem aliquoties continet & insuper partem ipsius aliquotam; *Ratio* majoris inæqualitatis vocatur ***multiplex superparticularis***; *Ratio* minoris inæqualitatis *submultiplex subsuperparticularis*. Speciatim in casu primo dicitur *dupla sesquialtera*, si exponens $2\frac{1}{2}$; *tripla sesquiquarta*, si $3\frac{1}{4}$, &c. in altero *subdupla subsesquialtera*, si exponens $\frac{2}{5}$; *subtripla subsesquiquarta*, si $\frac{4}{13}$, &c. Ex. gr. 16 ad 5 habet rationem triplam sesquiquintam; 4 ad 9 rationem subduplam subsesquiquartam.

DEFINITIO XLVII.

146. Denique si terminus major minorem aliquoties continet ac insuper aliquot partes ipsius aliquotas, *Ratio* majoris inæqualitatis dicitur ***multiplex superpartiens***; *Ratio* minoris inæqualitatis ***submultiplex subsuperpartiens***. Speciatim in casu primo vocatur ***dupla superbipartiens tertias***, si exponens $2\frac{2}{3}$; *tripla superquadripartiens septimas*, si $3\frac{4}{7}$, &c. in altero *subdupla subsuperbipartiens tertias*, si exponens $\frac{3}{8}$; *subtripla subsuperquadripartiens septimas*, si $\frac{7}{25}$, &c. Ex. gr. ratio 25 ad 7 est tripla superquadripartiens septimas; 3 ad 8 subdupla subsuperbipartiens tertias.

SCHOLION I.

147. *En genera & species rationum rationalium, quarum quidem nomina apud Recentiores rarius occurrunt (eorum enim loco terminis rationum minimis utuntur, ex. gr. pro dupla 2 : 1, pro sesquialtera 3 : 2;) non tamen ab eo ignorari possunt, qui scripta Mathematicorum evolvit. Ceterum jam* CLAVIUS *annotavit* (a) *exponentes rationis majoris inæqualitatis & re, & nomine; rationes vero minoris inæqualitatis re tantum, non autem nomine denominare. Facile vero in his nomen invenies, si denominatorem exponentis dividas per numeratorem. Ex. gr. si exponens fuerit* $\frac{5}{8}$; *erit* 8 : 5 = $1\frac{3}{5}$. *Unde innotescit, rationem vocari subsupertripartientem quintas. De nominibus rationum irrationalium nemo hactenus cogitavit.*

SCHOLION II.

148. *Nomina rationum rationalium facile memoriæ mandaturus, idemque perspecturus speciebus recensitis plures non dari, considerare debet, quotum ex divisione termini majoris per minorem emergentem, seu exponentem rationum majoris inæqualitatis, vel esse* 1°. *Numerum integrum, vel mixtum; hunc vero vel* 2°. *ex unitate & fractione, cujus numerator est unitas, vel* 3°. *ex unitate & fractione, cujus numerator est numerus, vel* 4°. *ex numero & fractione, cujus numerator est unitas, vel denique* 5°. *ex numero & fractione, cujus numerator numerus est, conflare. Habemus ergo in casu primo* rationes multiplices & submultiplices, *in secundo* superparticulares & subsuperparticulares, *in tertio* superpartientes & subsuperpartientes, *in quarto* multiplices superparticulares & submultiplices subsuperparticulares, *in quinto denique* multiplices superpartientes & submultiplices subsuperpartientes. *Rationes minoris inæqualitatis per proprios quoque exponentes determinari possunt. Aut enim exponens* 1°. *est fractio, cujus numerator unitas; aut fractio, cujus numerator unitate major, tumque vel simplum numeratoris, vel ejus multiplum denominatore minus. Si simplum numeratoris denominatore minus, ejus differentia a denominatore vel* 2°. *unitas est, vel* 3°. *unitate major. Similiter si multiplum numeratoris denominatore minus, differentia vel* 4°. *unitas est, vel* 5°. *unitate major. In casu primo* ratio *est* submultiplex; *in secundo* subsuperparticularis; *in tertio* subsuperpartiens; *in quarto* submultiplex subsuperparticularis; *in quinto* submultiplex subsuperpartiens.

(a) In *Comment. ad Elem.* V. EUCLIDIS. f. 179. Tom. 1. Oper.

DEFINITIO XLVIII.

149. *Rationes eædem* sunt, quarum antecedentes ad suos consequentes eodem modo referuntur, hoc est, quarum antecedentes per suos consequentes divisi dant exponentes æquales.

SCHOLION I.

150. *Per hanc definitionem agnosci posse etiam identitatem rationum irrationalium patet ex Schol. Def.* 42. (§. 137).

COROLLARIUM I.

151. Quoties ergo antecedens unius rationis suum consequentem, vel quantam consequentis partem continet; toties antecedens alterius suum consequentem, vel tantam consequentis partem continet: vel etiam quoties antecedens unius in consequente suo continetur, toties antecedens alterius continetur in suo consequente (§. 131).

COROLLARIUM II.

152. Si fuerit A ad B ut C ad D; erit A : B = C : D, seu, in exemplo singulari, 8 : 4 = 30 : 15. Et hoc modo identitatem rationum in posterum designabimus (§. 141).

SCHOLION II.

153. *Alii signis aliis utuntur. Communiter* A. B : : C. D *scribere solent. Sed secundum leges Artis characteristicæ signa scientifica non-scientificis præferri debent. Sunt autem signa scientifica, seu ad inveniendum apta, quæ per characteres derivativos exprimunt, quorum notiones ex aliis simplicioribus componuntur.*

COROLLARIUM III.

154. Cum rationes non discernantur nisi per exponentes (§. 141), in rationibus autem iisdem exponentes iidem sint (§. 149), rationes eædem sunt etiam similes (§. 24), & contra.

DEFINITIO XLIX.

155. Rationum duarum identitas, vel similitudo, dicitur *Proportio.* Et hinc quantitates eandem rationem habentes dicuntur *proportionales.* Ex. gr. Si A : B = C : D, dicuntur A, B, C & D, seu 8, 4, 30 & 15 proportionales.

DEFINITIO L.

156. *Proportio continua* est, si consequens primæ rationis idem est cum antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 6 : 12 : *Discreta* vero, si consequens primæ diversus ab antecedente secundæ, ut si 3 : 6 = 4 : 8. In proportione continua *Terminus*, qui consequentis primæ & antecedentis secundæ vicem tuetur, *medius proportionalis* appellatur. Ita numerus 6 est medius proportionalis inter 3 & 12.

SCHOLION.

157. Gregorius A S. VINCENTIO (a) *considerat quoque rationes, quas habent rationum exponentes, &* Proportionalitatem *vocat proportionem, quæ inter exponentes quatuor rationum intercedit, ut modos argumentandi in Geometria etiam a rationibus dissimilibus desumere liceat. Sed nos hac doctrina non utemur.*

(a) *Quadratura Circuli* lib. 8. f. 865.

DEFINITIO LI.

158. Rationum diversarum A : B & F : G *major* dicitur A : B, si fuerit A : B > F : G; contra *minor* F : G, si F : G < A : B. Unde & rationem majorem ac minorem hoc modo designabimus. Ex. gr. 6 ad 3 majorem habet rationem quam 5 ad 4, nam $6 : 2 (= 3) > 5 : 4 (= 1\frac{1}{4})$; sed 3 ad 6 minorem habet, quam 4 ad 5, nam $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

DEFINITIO LII.

159. *Ratio* ex duabus vel pluribus aliis *composita* dicitur, quam habet factum ex duarum vel plurium rationum antecedentibus ad factum ex earundem consequentibus. Ita 6 ad 96 est in ratione composita 2 ad 8 & 3 ad 12. In specie *duplicata* vocatur, quæ ex duabus; *triplicata*, quæ ex tribus; *quadruplicata*, quæ ex quatuor &c. & in genere *multiplicata*, quæ ex pluribus rationibus similibus componitur, multiplicata nempe uniuscujusque rationum similium. Ita 48 : 3 seu 16 : 1 est ratio duplicata ipsarum 4 : 1 & 12 : 3. Unde simul intelligitur, quænam *ratio* dicenda sit *subduplicata*, *subtriplicata*, *subquadruplicata* &c. & in genere *submultiplicata.* Nempe 4 : 1 est ratio subduplicata ipsius 16 : 1 vel 48 : 3.

THEOREMA XI.

160. *Quæ sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem, commensurabilia sunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Numeri rationalis integri pars aliquota est unitas (§. 40); fractus vero cum unitate partem aliquotam communem habet (§. 41). Quæ igitur sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem; eorum unum, vel est pars aliquota alterius, vel utriusque pars aliquota communis datur. Quare commensurabilia sunt (§. 31). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

161. Cum in divisione sit ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum (§. 69); si numerus rationalis per rationalem dividitur, unitas est ad quotum ut numerus rationalis ad numerum rationalem, atque hinc quotus commensurabilis unitati (§. 160), adeoque numerus rationalis (§. 39)

COROLLARIUM II.

162. Quoniam ergo in ratione rationali exponens rationis prodit, numero rationali per rationalem diviso (§. 134, 136); rationis rationalis exponens est numerus rationalis (§. 161).

THEOREMA XII.

163. *Commensurabilia sunt inter se, vel ut unitas ad numerum rationalem integrum, vel ut numerus rationalis integer ad alium rationalem integrum: incommensurabilia non item.*

DEMONSTRATIO.

Commensurabilium aut unum est pars aliquota alterius, aut utriusque datur pars aliquota communis (§. 31). Quodsi adeo in casu priore quantitas minor, in posteriore pars aliquota communis pro unitate assumatur; respondebit in priore quantitati majori, in posteriore utrique numerus rationalis integer (§. 40). Ergo in casu priore quantitates sunt inter se ut unitas, in posteriore ut numerus rationalis integer, ad numerum rationalem integrum. *Quod erat primum.*

Incommensurabilium nulla datur pars aliquota communis (§. 31). Nulla ergo datur unitas, cui commensurabilia existant. Quare cum omnis numerus rationalis unitati commensurabilis existat (§. 39); ipsa non sunt ut numerus rationalis ad numerum rationalem. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

164. Commensurabilium ratio est rationalis; incommensurabilium irrationalis (§. 134).

SCHOLION.

165. *Dari quantitates incommensurabiles, in Geometria demonstrabitur.*

COROLLARIUM II.

166. Rationis commensurabilium exponens est numerus rationalis (§. 162).

THEOREMA XIII.

167. *Rationes* A : B *&* C : D, *similes eidem tertiæ* F : G, *sunt etiam similes inter se: & similibus similes sunt inter se similes.*

DEMONSTRATIO.

Rationes similes eidem tertiæ sunt etiam eædem eidem tertiæ (§. 154).

6 : 3 = 8 : 4	
10 : 5 = 8 : 4	
Ergo 6 : 3 = 10 : 5	

Quare cum sit A : B = F : G & C : D = F : G (§. 152); erit A : B = C : D (§. 87); consequenter A ad B ut C ad D (§. 152). *Quod erat unum.*

Porro

Porro A : B = C : D, & F : G = H : E, itemque C. D = H : E, *per hypoth.* Sed A : B = H : E, *per demonstr.* Ergo etiam A : B = F : G, *per demonstr.* *Quod erat alterum.*

THEOREMA XIV.

168. *Idem C ad æqualia A & B, & æqualia A & B ad idem C, vel etiam ad æqualia C & D, eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

A = B, *per hypoth.* Ergo C : A = C : B (§. 71, 94); consequenter C ad A & B eandem rationem habet (§. 152). *Quod erat primum.*

Similiter quia A = B, *per hypoth.* erit A : C = B : C (§. 71, 94); consequenter A & B ad C eandem rationem habent (§. 152). *Quod erat secundum.*

Sit denique A = C & B = D, erit A : B = C : D (§. 71, 94); consequenter ratio utrobique eadem (§. 152). *Quod erat tertium.*

THEOREMA XV.

169. *Si fuerit A : B = C : D; erit etiam* invertendo *B : A = D : C.*

DEMONSTRATIO.

Sit quotus ex divisione ipsius A per B emergens E, & quotus ex divisione ipsius C per D emergens G; erit B ad A ut unitas ad E, & D ad C ut eadem unitas ad G (§. 69); consequenter B : A = 1 : E & B : C = 1 : G (§. 152). Sed A : B = C : D, *per hypoth.* seu E = G (§. 15). Ergo unitas eadem ad E & G eandem rationem habet (§. 168); consequenter B : A = D : C (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

170. *Partes similes P & p eandem rationem habent ad tota T & t: & si tota ad partes eandem rationem habent, partes sunt similes: & tota ad partes similes eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Habeat enim, si fieri potest, P ad T aliam rationem quam *p* ad *t*; partes *p* & P per diversitatem rationis ad tota a se invicem distingui poterunt (§. 132): Erunt adeo dissimiles (§. 24). Quod cum sit absurdum, utpote contra hypothesin; erit P ad T ut *p* ad *t*. *Quod erat unum.*

Si *t* : *p* = T : P, *per hypoth.* erit *p* : *t* = P : T (§. 169). Ergo, *per demonstrata*, P & *p* sunt partes similes. *Quod erat alterum.*

Si P & *p* sunt partes similes totorum T & *t*, erit P : T = *p* : *t*, *per num.* 1. adeoque T : P = *t* : *p* (§. 169), hoc est, tota ad partes similes eandem rationem habent.

THEOREMA XVII.

171. *Partes similes P & p sunt inter se ut tota T & t.*

DEMONSTRATIO.

Cum totum sit idem cum partibus suis simul sumtis (§. 9); quoties sumitur totum, toties etiam sumitur pars ejus quantalibet, ex. gr. quarta, vigesima, millesima, millionesima, aut quæ rationem aliam quamcunque ad totum habet. Quare si ponamus totum minus *t* toties sumi, donec toti T æquale fiat; quoties ipsum sumitur, toties etiam sumenda ejus pars *p*, donec parti ipsius T simili, quæ est P, æqua-

æqualis fiat. Toties itaque P continet *p*, quoties T ipsum *t*. Sunt ergo partes similes ut tota (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

172. *Notandum est, numerum, qui indicat, quoties sumatur totum minus, ut majori æquale fiat, non semper esse rationalem; sed irrationalem quoque esse posse: quo in casu tota ad se invicem rationem irrationalem habent.* Ex. gr. *In Geometria demonstrabimus latus quadrati, ut diagonali æquale fiat, toties sumi debere, quoties unitas continetur in radice ex binario. Evidens vero est, si latus quadrati sit divisum in duas partes, quarum una est pars quarta totius, altera continet tres quartas; partem quoque quartam toties sumi quoties unitas continetur in radice ex binario, donec parti quartæ diagonalis æqualis fiat.*

THEOREMA XVIII.

173. *Si* A:B = C:D; *erit etiam* alternando *seu* permutando A:C = B:D.

DEMONSTRATIO.

I. Si antecedentes A & C consequentibus B & D fuerint minores; eorum partes (§. 20), eæque similes (§. 170) haberi possunt. Sunt igitur ut tota, hoc est antecedentes A & C eam inter se rationem habent quam consequentes B & D (§. 171).

II. Si antecedentes A & C consequentibus B & D majores; tum quia A:B = C:D, *per hypoth.* erit B:A = D:C (§. 169); consequenter B:D = A:C *per cas.* 1. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

174. Ergo in divisione unitas ad divisorem ut quotus ad dividendum (§. 69).

COROLLARIUM II.

175. Si fuerit A:B = C:D, & B = D; erit etiam A = C. Est enim A:C = B:D (§. 173). Sed B = D, *per hypoth.* Ergo A = C (§. 149).

COROLLARIUM III.

176. Si fuerit B:A = D:C, & B = D; erit etiam A = C. Cum enim sit A:B = C:D (§. 169); erit etiam A = C (§. 175).

THEOREMA XIX.

177. *Quæ ad idem vel æqualia eandem habent rationem, æqualia sunt: & ad quæ idem vel æqualia eandem habent rationem, ea itidem æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

A:B = D:B, *per hypoth.* Ergo A:D = B:B (§. 173). Sed B = B (§. 81). Quare A = D (§. 149). Et idem eodem modo ostenditur, si A:B = D:C & B = C. *Quod erat unum.*

Similiter C:A = C:B, *per hypoth.* Ergo C:C = A:B (§. 173). Sed C = C (§. 81). Quare A = B (§. 149). Et idem eodem modo patet, si C:A = D:B & C = D. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XX.

178. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C multiplices; facta D & E sunt inter se ut A & B.*

DE-

DEMONSTRATIO.

6	12	Cum sit $1:C=A:D$ & $1:C=B:E$ (§. 66); erit $A:D=B:E$ (§. 167); consequenter $A:B=D:E$ (§. 173). *Q. e. d.*
3	3	
18	36	
6 : 12=18:36.		

SCHOLION.

179. *Cum C sit eadem quantitas in utroque casu, (per hypoth.) unitas quoque in utroque eadem est (§. 13); consequenter 1 : C eadem Ratio.*

COROLLARIUM.

180. Ergo si $A > B$, etiam $AC > BC$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia multiplices, factum prius est majus altero.

THEOREMA XXI.

181. *Si quantitates quascunque A & B per eandem tertiam C dividas; quoti F & G sunt inter se ut A & B.*

DEMONSTRATIO.

3) 24 : 12 / 8 : 4	Cum sit $1:C=F:A$ & $1:C=G:B$ (§. 174); erit $F:A=G:B$ (§. 167); consequenter $F:G=A:B$ (§. 173). *Q. e. d.*
8 : 4=24 : 24	

COROLLARIUM.

182. Si $A > B$, etiam $F > G$ (§. 149), hoc est, si majus & minus per idem vel æqualia dividas, quotus prior posteriore major est.

THEOREMA XXII.

183. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per idem E dividas; in casu priore quoti F & G ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad quotos H & K eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

3 : 6=12 : 24	Quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173).
3 3	
1 : 6 = 4 : 24	

Sed $A:E=F$, & $C:E=G$, *per hypoth.* Ergo $F:G=A:C$ (§. 181) $=B:D$ (§. 167); consequenter $F:B=G:D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Similiter quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $B:E=H$, & $D:E=K$ *per hypoth.* Ergo $B:D=H:K$ (§. 181); consequenter $A:C=H:K$ (§. 167), & hinc tandem $A:H=C:K$ (§. 173). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

184. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes vel consequentes per eandem quantitatem E multiplices; in casu priore facta AE & CE ad consequentes B & D; in posteriore antecedentes A & C ad facta BE & DE eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

2 : 6=3 : 9	Quia $A:B=C:D$, *per hypoth.* $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $EA:EC=A:C$ (§. 178).
6 6	
12 : 6=18 : 9	

Ergo $EA:EC=B:D$ (§. 167); consequenter $EA:B=EC:D$ (§. 173). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, esse $A:BE=C:DE$, *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIV.

185. *Si rationum similium A : B & C : D antecedentes per idem E & consequentes per idem F multiplices aut dividas; in casu priore facta, in posteriore*

quoti eandem inter se rationem habent.

DEMONSTRATIO.

3 : 6 = 12 : 24	
2 6 2 3	
6 : 18 = 24 : 72	

A : B = C : D, *per hypoth.* Ergo EA : B = EC : D (§. 184), consequenter EA : FB = EC : FD (§. *cit.*). *Quod erat unum.*

3 : 6 = 12 : 24	
3 2 3 2	
1 : 3 = 4 : 12	

Sit A : E = G, B : F = H, C : E = K, & D : F = L. Quoniam A : B = C : D, *per hypoth.* G : B = K : D (§. 183). Ergo & G : H = K : L (§. *cit.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXV.

186. *Pars antecedentis in ratione majore ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens minoris ad consequentem suum. Et majus antecedente rationis minoris ad consequentem eandem rationem habet, quam antecedens majoris ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Si A ad B rationem majorem habet quam C ad D; erit A : B > C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut minus quam A, hoc est, pars ipsius (§. 20), per B dividatur (§. 182): quæ pars si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in majore ratione, antecedentis pars eandem rationem habet ad consequentem, quam minoris antecedens ad suum (§. 152). *Quod erat unum.*

Similiter si A ad B minorem habet rationem, quam C ad D; erit A : B < C : D (§. 158). Ut igitur ratio prior alteri æqualis evadat, necesse est ut majus quam A, cujus adeo pars est A (§. 20), per B dividatur (§. 182): quod si dicatur F, erit F : B = C : D, hoc est, in ratione minore majus antecedente rationem eandem habet ad consequentem, quam majoris antecedens ad suum consequentem (§. 152). *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

187. *Si fuerint quotcunque rationes similes A : B, C : D, E : F, G : H, &c.; summa omnium antecedentium A + C + E + G, &c., est ad summam omnium consequentium B + D + F + G, &c., ut antecedens unius rationis A ad suum consequentem B.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus ex. gr. esse $A = \frac{1}{2}B$, $C = \frac{1}{2}D$, $E = \frac{1}{2}F$, $G = \frac{1}{2}H$; erit $A + C + E + G = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}H$ (§. 88), hoc est summa omnium antecedentium est subdupla summæ omnium consequentium; consequenter ut antecedens unius rationis ad suum consequentem. Eodem modo cum argumentatio procedat, si alia quæcunque ratio antecedentium ad consequentes ponatur, vel etiam antecedentes sint consequentibus majores; patet propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVII.

188. *Si fuerit ut totum A + C ad totum B + D, ita ablatum C ad ablatum D; erit etiam reliquum A ad reliquum B ut totum A + C ad totum B + D, vel ut ablatum C ad ablatum D.*

DE-

DEMONSTRATIO.

24 : 12	
6 : 3	
18 : 9	

Aut $A:B=C:D$, aut $A:B>C:D$, aut denique $A:B<C:D$ (§. 21). Ponamus $A:B>C:D$. Ergo pars ipsius A, quæ dicatur F, erit ad B ut C ad D (§. 186), hoc est, $F:B=C:D$ (§. 152), consequenter $F+C:B+D=C:D$ (§. 187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$, *per hypoth.* erit $F+C=A+C$ (§. 177), adeoque $F=A$ (§. 91). Sed F est pars ipsius A, *per demonstrata*. Pars igitur toti æqualis. Quod cum sit absurdum (§. 84), ut sit $A:B>C:D$ fieri nequit.

Sit jam $A:B<C:D$. Ergo majus ipso A, quod dicatur G, ad B eandem rationem habet, quam C ad D (§. 186), hoc est, $G:B=C:D$ (§. 152), consequenter $G+C:B+D=C:D$ (§. 187). Quare cum etiam sit $A+C:B+D=C:D$, *per hypoth.* erit $G+C=A+C$ (§. 177), adeoque $G=A$ (§. 91). Sed A est pars ipsius G, *per demonstrata*. Ergo pars toti æqualis. Quod cum sit absurdum, ut sit $A:B<C:D$ fieri nequit.

Quoniam itaque nec $A:B>C:D$, nec $A:B<C:D$, *per demonstrata*: erit utique $A:B=C:D$, consequenter $A:B=A+C:B+D$ (§. 187). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

189. *In rationibus similibus A : B & C : D, differentia antecedentium A—C est ad differentiam consequentium B—D ut antecedens rationis utriuslibet ad suum consequentem.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173). Ponamus $A>C$ & $B>D$; erunt A & B tota, C & D eorum partes (§. 9, 20). Quamobrem cum sit $A:B=C:D$, *per hypoth.* erit $A-C:B-D=A:B$, vel $=C:D$ (§. 188). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

190. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* componendo, *ut summa antecedentis & consequentis primæ rationis ad antecedentem vel consequentem primæ, ita summa antecedentis & consequentis secundæ ad antecedentem vel consequentem secundæ.*

DEMONSTRATIO.

4 : 2 = 10 : 5	
6 : 4 = 15 : 10	
vel 6 : 2 = 15 : 5	

Si $A:B=C:D$ *per hypoth.* erit $A:C=B:D$ (§. 173). Sed $A+B:C+D=A:C=B:D$ (§. 187). Ergo $A+B:A=C+D:C$; item $A+B:B=C+D:D$ (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXX.

191. *Si fuerit $A:B=a:b$ & $A:C=a:c$, &c. erit $A:A+B+C=a:a+b+c$.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam $A:B=a:b$, & $A:C=a:c$ *per hypoth.* erit $A:a=B:b=C:c$ (§. 173, 167). Quare $A:a=A+B+C:a+b+c$ (§. 187), & hinc $A:A+B+C=a:a+b+c$ (§. 173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

192. *Si fuerint proportiones quotcunque similes $A:B=C:D$, $E:F=G$:*

$=G:H$, $I:K=L:M$, *&c.*; *erit summa omnium antecedentium primarum rationum* $A+E+I$, *&c. ad summam omnium consequentium* $B+F+K$, *&c. ut summa omnium antecedentium secundarum rationum* $C+G+L$, *&c. ad summam omnium consequentium* $D+H+M$, *&c.*

DEMONSTRATIO.

Cum A: B, E:F, I:K, &c. itemque C:D, G:H, L:M, &c. sint rationes similes, *per hypoth.* erit A + E + I, &c.: B+F+K, &c. = A:B, & C + G + L, &c.: D+H+M, &c. = C:D (§. 187). Est vero A:B = C: D, *per hypoth.* Ergo A+E+I, &c.: B+F+K, &c. = C+G+L, &c.: D+H+M, &c. (§.167). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

193. *Si fuerit ut antecedens primæ rationis ad suum consequentem, ita antecedens alterius ad consequentem suum; erit etiam* dividendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus consequentem, ita differentia terminorum secundæ ad ejus consequentem: itemque* convertendo, *ut differentia terminorum primæ rationis ad ejus antecedentem ita differentia terminorum secundæ ad ejus antecedentem.*

DEMONSTRATIO.

6:4 = 15:10
2:4 = 5:10
2:6 = 5:15

Si fuerit A:B = C: D, *per hypoth.* erit A: C = B: D, (§. 173), consequenter A — B: C — D = B: D = A: C (§. 189). Ergo A — B: B = C — D: D, & A — B: A = C — D: C (§.173). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIII.

194. *Si fuerit* ordinate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ D ad consequentem suum E, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita consequens secundæ E ad aliud quidpiam F; erit* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut antecedens secundæ D ad F.*

DEMONSTRATIO.

4: 2 = 6: 3
2 : 8 = 3: 12
4: 8 = 6: 12

Quoniam A : B = D:E & B: C = E: F, *per hypoth.* erit A:D = B:E & B: E = C : F (§. 173); consequenter A: D = C: F (§. 167). Quare A: C = D: F (§.173). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

195. Quodsi fuerit A:B = D: E, & C:B = F:E; cum etiam sit B:C = E:F (§.169), erit A: C = D: F (§.194).

COROLLARIUM II.

196. Similiter si fuerit A:B = C: D, & A : F = C: G; cum etiam sit B : A = D: C (§.169), erit B: F = D: G (§.194).

COROLLARIUM III.

197. Si denique fuerit A:B = C: D, & F: A = G: C, cum etiam sit A: F = C: G (§.169), erit B: F = D: G (§.196).

THEOREMA XXXIV.

199. *Si fuerit* perturbate *ut antecedens primæ rationis A ad suum consequentem B, ita antecedens secundæ E ad suum consequentem F, & ut consequens primæ B ad aliud quidpiam C, ita aliud quidpiam D ad antecedentem secundæ E; erit etiam* ex æquo *antecedens primæ A ad C ut D ad consequentem secundæ F.*

DE-

DEMONSTRATIO.

$8:4 = 12:6$
$4:16 = 3:12$
$8:16 = 3:6$

Quoniam A : B = E : F, *per hypoth.* si ponatur B : C = F : G, erit A : C = E : G (*§.* 194). Est vero etiam B : C = D : E, *per hypoth.* Ergo D : E = F : G (§. 167), & D : F = E : G (§. 173); consequenter A : C = D : F (§. 167). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

199. Quodsi fuerit A : B = E : F, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (*§.* 169), erit A : C = D : F (*§.* 198).

COROLLARIUM II.

200. Similiter si fuerit B : A = F : E, & B : C = D : E; cum etiam sit A : B = E : F (*§.* 169), erit A : C = D : F (*§.* 198).

COROLLARIUM III.

201. Si porro fuerit B : A = F : E, & C : B = E : D; cum etiam sit B : C = D : E (*§.* 169), erit A : C = D : F (*§.* 200).

COROLLARIUM IV.

202. Si idem C, vel æqualia, per majus A & minus B dividas; quotus prior F erit minor posteriore G. Est enim A : C = 1 : F, & B : C = 1 : G (*§.* 174); adeoque C : B = G : 1 (*§.* 169). Ergo A : B = G : F (*§.* 198). Sed A > B, *per hypoth.* Ergo G > F (*§.* 149).

THEOREMA XXXV.

203. *Majus A ad idem C majorem rationem habet quam minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit A : C > B : C (§. 182), hoc est, A ad C majorem rationem habet, quam B ad C (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVI.

204. *Quod ad idem majorem habet rationem quam alterum, id altero majus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat A ad C rationem majorem quam B ad idem C, *per hypoth.* Ergo pars ipsius A eandem ad C rationem habet quam B ad idem C (§. 186), adeoque ipsi B æqualis est (§. 177). Quare A > B (§. 20). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

205. *Idem C ad majus A minorem habet rationem quam ad minus B.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam A > B, *per hypoth.* erit C : A < C : B (§. 202). Ergo C ad A minorem habet rationem quam ad B (§. 158). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

206. *Ad quod idem majorem rationem habet quam ad alterum, id altero minus est.*

DEMONSTRATIO.

Habeat C ad A rationem majorem, quam ad B, *per hypoth.* Ergo pars ipsius C, quæ dicatur D, ad A eandem rationem habet, quam ad B (§. 186), hoc est, D : A = C : B (§. 152), & hinc D : C = A : B (§. 173). Sed D < C (*§.* 20). Ergo A < B (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

207. *Duæ quantitates se mutuo multiplicantes idem factum gignunt.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

4	2
2	4
8=8	

Sint duo factores A & B, erit 1 : A = B : AB & 1 : B = A : BA (§. 66). Est vero etiam 1 : A = B : BA (§. 173), adeoque ob unitatem eandem, *per hypoth.* B : AB = B : BA (§. 167). Ergo AB = BA (§. 177).

COROLLARIUM.

208. Sint tres factores A, B & C. Quoniam AB = BA (§. 207); erit CAB = CBA (§. 93), adeoque & ABC = BAC (§. 207). Similiter quia CB = BC (§. 207); erit ACB = ABC (§. 93), adeoque & CBA = BCA (§. 207). Quare CAB = CBA = ABC = BAC = ACB = BCA (§. 87), hoc est, factum idem producitur, quocunque ordine efficientes in se invicem ducantur.

SCHOLION.

209. *Idem eodem modo ostenditur, si plures fuerint factores: sed demonstratio prolixior evadit, si plures tribus fuerint termini.*

THEOREMA XL.

210. *Si factum per multiplicandum dividitur; quotus est multiplicans: si per multiplicantem; quotus est multiplicandus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim multiplicandus ad factum ut unitas ad multiplicantem (§. 66). Est etiam multiplicandus ad factum (si hoc per illud dividi concipimus) ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus æqualis est multiplicanti (§. 177). *Quod erat unum.*

Quoniam unitas est ad multiplicantem ut multiplicandus ad factum (§. 66); eadem unitas ad multiplicandum ut multiplicans ad factum (§. 173). Sed si factum per multiplicantem dividis; multiplicans est ad factum ut unitas ad quotum (§. 69). Ergo quotus est æqualis multiplicando (§. 177). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

211. Omnia igitur facta sunt numeri compositi (§. 76).

THEOREMA XLI.

212. *Si quotus per divisorem multiplicatur, aut contra; factum est dividendus.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad divisorem ita quotus ad dividendum (§. 174). Sed si quotus per divisorem multiplicatur, erit ut unitas ad divisorem, ita quotus ad factum (§. 66). Ergo factum æquale est dividendo (§. 177). *Quod erat unum.*

Idem vero cum sit factum, si divisor per quotum multiplicetur (§. 207); erit quoque in hoc casu factum æquale dividendo. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XLII.

213. *Sint quatuor quæcunque quantitates proportionales A : B = C : D; sint totidem aliæ inter se quoque proportionales E : F = G : H: si posteriores singulas in singulas priores ducas; facta inter se proportionalia sunt, nempe AE : FB = GC : DH.*

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Cum sit *per hypoth.*

$$\frac{A : B = C : D \ \& \ E : F = G : H}{E \quad F \quad E \quad F \quad C \ D \quad C \ D}$$

erit EA : FB = EC : FD & CE : DF = CG : DH. (§. 185). Sed EC=CE & FD = DF (§. 207). Ergo EA : FB = CG : DH (§. 167) = GC : HD (§. 207). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIII.

214. *Rationis compositæ exponens est æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium.*

DEMONSTRATIO.

Si rationis primæ A : B exponens = *m*; secundæ C : D exponens sit = *n*. Erit *m* : 1 = A:B & *n* : 1 = C:D (§. 140). Ergo *mn* : 1 = AC : BD (§. 213); consequenter *mn* est exponens rationis AC : BD (§. 140), hoc est compositæ ex A:B & C : D (§. 159). *Q. e. d.*

SCHOLION.

215. *Sint rationes* 8 : 4 *&* 24 : 6. *Illius exponens est* 2, *hujus* 4. *Rationem compositam datarum habent* 192 *&* 24. *Sed* 192 : 24 = 8, *quod est factum ex* 2 *in* 4. *Ceterum eadem demonstratio locum habet, si plures fuerint rationes.*

THEOREMA XLIV.

216. *Si plures fuerint quantitates continue proportionales A, B, C, D, &c.; prima A ad tertiam C est in ratione duplicata, ad quartam D in ratione triplicata, &c. prima A ad secundam B.*

DEMONSTRATIO.

1. Quoniam A : B = B : C, *per hypoth.* AB ad BC habet rationem duplicatam ipsius A ad B (§. 159). Sed AB : BC = A : C (§. 181). Ergo etiam A ad C rationem duplicatam habet ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat unum.*

2. Quoniam A : B = B : C = C : D. *per hypoth.* ABC est ad BCD in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 159). Sed ABC : BCD = A : D (§. 178). Ergo etiam A ad D est in ratione triplicata ipsius A ad B (§. 167). *Quod erat secundum.*

3. Facile apparet, quod eodem modo demonstrari possit, primum terminum habere ad quintum rationem quadruplicatam; ad sextum quintuplicatam, &c. primi ad secundum. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

217. *Si fuerit quacunque quantitatum A, B, C, D, E, F, &c. series; ratio prima A ad ultimam F componitur ex rationibus quantitatum extremis interjacentium A : B, B : C, C : D, D : E, E : F &c.*

DEMONSTRATIO.

Si enim omnes antecedentes, itidemque omnes consequentes in se invicem multiplices, facta ABCDE & BCDEF sunt in ratione composita rationum A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, &c. (§. 159). Sed ABCDE : BCDEF = A : F (§. 178). Ergo etiam A ad F est in ratione composita omnium modo recensitarum (§. 167). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

218. *Rationes composita ex rationibus, quarum singula singulis æquales sunt, inter se æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

$6:3 = 4:2$	Sit A : B = C : D,
$3:1 = 12:4$	E : F = G : H, I : K
$5:1 = 20:4$	= L : M, *per hypoth.*
	erit AE : BF = CG :
$90:3 = 960:32$	DH (§. 213), adeo-
$= 30$	que & AEI : BFK
	= CGL : DHM (§.

cit.). Ratio vero AEI : BFK componitur ex rationibus A : B, E : F & I : K; ratio CGL : DHM ex rationibus C : D, G : H, L : M (§. 159). Ergo constat propositum. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVII.

219. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales A, B, C & D; aquemultiplices primæ atque tertiæ A & C, itemque secundæ ac quartæ B & D, juxta quamlibet multiplicationem, utraque utramque vel una superant, vel una aquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparata.*

DEMONSTRATIO.

Denotentur æquemultiplices ipsarum A & C per *m*A & *m*C, itemque æquemultiplices ipsarum B & D, per *n*B & *n*D. Cum sit A : B = C : D, *per hypoth.* erit etiam *m*A : *n*B = *m*C : *n*D (§. 185); consequenter *m*A : *m*C = *n*B : *n*D (§. 173). Quamobrem si *m*A = *m*C, erit *n*B = *n*D; si *m*A > *m*C, etiam *n*B > *n*D; si *m*A < *m*C, etiam *n*B < *n*D (§. 151). *Q. e. d.*

SCHOLION.

220. *Hac proprietate proportionalium utitur* EUCLIDES (*a*) *in iis definiendis, ac inde ceteras demonstrat.*

(*a*) Elem. V. def. 5.

CAPUT IV.

De speciebus Arithmeticæ in numeris fractis.

THEOREMA XLVIII.

221. *Si numerator est æqualis denominatori; fractio $\frac{4}{4}$ æquivalet integro: si minor; fractio $\frac{3}{4}$ minor est integro: si major; fractio $\frac{5}{4}$ integro seu unitate major est.*

DEMONSTRATIO.

Denominator enim indicat unitatem seu integrum in partes æquales (ex. gr. in nostro casu in 4) divisum, & numerator numerat partes istiusmodi in casu aliquo datas (§. 59). Quodsi ergo numerator denominatori æqualis, *per hypoth.* tot dantur partes, quot habet integrum. Ergo fractio integro æqualis (§. 86). *Quod erat primum.*

Si numerator denominatore minor; *per hypoth.* aliquot saltem dantur partes integri, non omnes. Ergo fractio tantum aliquot partibus integri æqualis; consequenter eadem minor (§. 20). *Quod erat secundum.*

Si denique numerator major est denominatore; *per hypoth.* plures dantur partes, quam habet integrum. Sed tot partes, quot habet integrum, integro æquales sunt (§. 86). Ergo integrum parti fractionis æquale est; consequenter ipsa integro major (§. 20). *Quod erat tertium.*

SCHOLION.

222. Fractiones *integro æquales, vel eodem majores, dicuntur vulgo* spuriæ; *quia proprie loquendo fractiones non sunt nisi quæ integro minores* (§. 38).

PROBLEMA XVII.

223. *Invenire, quot integra fractio* ($\frac{8}{4}$), *quæ integro major, contineat.*

RESOLUTIO.

Numerator 8 per denominatorem 4 dividatur: dico, quotum 2 indicare quod petebatur.

DEMONSTRATIO.

Quotus enim 2 indicat, quoties denominator 4 in numeratore 8 contineatur (§. 69). Sed denominator idem est cum integro (§. 59). Ergo quotus indicat, quoties integrum in fractione contineatur. *Q. e. d.*

PROBLEMA XVIII.

224. *Integros numeros reducere ad fractionem denominatoris dati.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicetur numerus integer per denominatorem datum.
2. Factum scribatur loco numeratoris.

Ita reperies $3 = \frac{24}{8}$, $5 = \frac{30}{6}$, $7 = \frac{28}{4}$.

DEMONSTRATIO.

Est nempe factum ad denominatorem datum, ut numerus integer ad unitatem (§. 66, 169). Sed unitas & denominator datus sunt idem integrum (§. 59). Ergo fractio & numerus integer æquales sunt (§. 177). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

225. *Fractiones homogeneæ æquales sunt, quarum numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent: major est, cujus numerator habet rationem majorem: minor vero, cujus numerator habet minorem.*

DEMONSTRATIO.

Cum fractiones inter se sint homogeneæ, *ex hypoth.* ad eandem unitatem referuntur (§. 35), adeoque ipsarum denominatores idem totum referunt (§. 59). Quare si numeratores ad suos denominatores eandem rationem habent, fractiones æquales sunt (§. 177): cujus vero fractionis numerator ad denominatorem suum rationem majorem habet, ea major est: cujus numerator minorem habet, ea minor est (§. 204). *Q. e. d.*

Ex. gr. $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$. Sed $\frac{2}{24} < \frac{2}{6}$.

SCHOLION.

226. *Intelligitur adeo identitas fractionum, si numerator unius toties contineatur in denominatore suo, quoties numerator alterius in suo continetur. Fractio minor esse intelligitur, si numerator ipsius pluries continetur in suo denominatore, quam numerator alterius in denominatore suo: id quod divisio denominatoris per numeratorem prodit.*

 COROL-

COROLLARIUM.

227. Quodsi ergo tam numerator, quam denominator alicujus fractionis ($\frac{4}{6}$) per eundem numerum (2) multiplicetur vel dividatur; in casu priore facta ($\frac{8}{12}$), in posteriore quoti ($\frac{2}{3}$) constituunt fractionem datæ ($\frac{4}{6}$) æquivalentem (§. 178, 181).

PROBLEMA XIX.

228. *Invenire communem mensuram maximam duorum numerorum.*

RESOLUTIO.

1. Dividatur numerus major per minorem.
2. Divisor primæ divisionis, seu numerus datus minor, denuo dividatur per residuum primæ divisionis.
3. Similiter divisor secundæ divisionis dividatur per residuum secundæ, & ita porro, donec nihil remaneat.

Dico, divisorem ultimum esse communem mensuram maximam numerorum datorum.

Ex. gr. Sint numeri dati 168 & 240; reperietur eorum communis mensura maxima 24 hunc in modum:

```
 7
 182          24          2
 240(1       168(2       72   (3
 168          72         24
```

Similiter communis mensura maxima numerorum 95 & 47 reperitur 1.

DEMONSTRATIO.

Divisor ultimus 24 metitur divisorem antecedentis (in nostro quidem casu secundæ) divisionis 72, (*per hypoth. & §. 74*). Ergo & metitur dividendum antecedentis (hoc est, in nostro casu secundæ) divisionis 168, quippe ex dividendo ultimæ divisionis 72, aliquoties (hic quidem bis) sumto & ejus divisore 24 compositum. Metitur adeo numerum unum datorum 168 & residuum primæ divisionis 72, adeoque & numerum alterum datorum 240, quippe ex minore 168 aliquoties (in nostro casu semel) sumto & residuo primæ divisionis 72 compositum. Est itaque communis numerorum datorum mensura (§. 78).

Esse vero communem mensuram maximam ordine retrogrado per indirectum demonstratur. Ponamus enim numero invento 24 majorem esse mensuram numerorum datorum 240 & 168 communem. Patet igitur ex antecedentibus, quod etiam metiri debeat residuum primæ, seu divisorem secundæ divisionis 72; adeoque & residuum secundæ divisionis, seu divisorem tertiæ, hoc est, in nostro casu inventam communem mensuram 24. Sed numerus is eadem major est, *ex hyp.* Ergo communem mensuram inventam 24 metietur numerus major, quam 24. Quod cum sit absurdum (§. 74), major communis mensura non datur. Est igitur ea, quam invenimus, maxima. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

229. *Qui demonstrationem uno quasi obtutu comprehendere cupiunt; illos hac numerorum datorum resolutio juvabit.*

I. $72 = 3 \cdot 24$, per divis. tert.

II. $168 = 2 \cdot 72 + 24$, per divis. sec.
$= 2 \cdot 3 \cdot 24 + 24$, per num. I, $= 7 \cdot 24$.

III. $240 = 1 \cdot 168 + 72$, per divis. prim.
$= 7 \cdot 24 + 3 \cdot 24$, per num. I & II
$= 10 \cdot 24$.

SCHO-

SCHOLION II.

230. ***In lineis communis mensura maxima invenitur per mutuam earundem a se invicem subtractionem. In numeris autem compendii gratia divisio subtractioni substituitur: ut exemplum ostendit.***

240	96	48
168	72	24
72	24	24
96	48	0

PROBLEMA XX.

231. *Fractionem datam ad minores terminos reducere; h. e. invenire fractionem datæ* $(\frac{20}{48})$ *æquivalentem, sed minoribus numeris expressam.*

RESOLUTIO.

Dividatur tam numerator 20, quam denominator 48, per eundem numerum 4, qui utrumque metitur: quoti 5 & 12 componunt fractionem quæsitam $\frac{5}{12}$ (§. 227).

COROLLARIUM I.

232. Si ergo divisio fit per communem mensuram maximam numeratoris ac denominatoris (§. 228); fractio ad terminos minimos reducitur.

COROLLARIUM II.

233. Si numeratorem ac denominatorem fractionis datæ sola unitas metitur; ad minores terminos reduci nequit.

SCHOLION.

234. *Molestius accidit inexercitatis communem mensuram maximam quærere, quam, iterata per mensuras minores sponte animadversas divisione, fractiones reducere.*

PROBLEMA XXI.

235. *Duas vel plures fractiones datas ad eandem denominationem reducere; h. e. invenire fractiones, quæ datis æquales sunt, & communi denominatore gaudent.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si fractiones duæ dentur, quælibet integra multiplicetur per denominatorem alterius.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}$ & $\frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Casus II. Si plures dentur, tam numerator, quam denominator uniuscujusque ducatur in factum ex denominatoribus reliquarum.

Ex. gr. $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ & $\frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 4}$ & $\frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{6 \cdot 3 \cdot 4}$ & $\frac{3 \cdot 3 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{48}{72}$ & $\frac{12}{72}$ & $\frac{54}{72}$.

DEMONSTRATIO.

Fractiones communem habere denominatorem, patet per §. 93 & §. 207, 208. Quod vero æquivaleant primum propositis, manifestum est per §. 227. Constat ergo propositum. *Q. e. d.*

PROBLEMA XXII.

236. *Fractiones addere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos denominatores habuerint, reducantur ad eundem (§. 235).
2. Addantur numeratores (§. 96) & summæ subscribatur denominator communis.

Ex. gr. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{10}{15} + \frac{12}{15}$ (§. 235) $= \frac{22}{15}$ $= 1\frac{7}{15}$ (§. 223).

$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{48}{72} + \frac{12}{72} + \frac{54}{72}$ (§. 235) $= \frac{114}{72} = 1\frac{42}{72}$ (§. 223) $= 1\frac{7}{12}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Cum denominatores sint nomina unitatum, ex quibus numeratores componuntur (§. 59); numeratores tantum adduntur. Quoniam vero

addi nequeunt, nisi fuerint homogenei (§. 61); ad eandem denominationem sunt reducendi (§. 35). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIII.

237. *Fractionem datam ex alia data subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si fractiones datæ diversos habent denominatores, reducantur ad eandem denominationem (§. 235).
2. Numerator unius ex numeratore alterius subducatur (§. 103) & residuo denominator communis subscribatur.

Ex. gr. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (§. 231) & $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{6}{10} - \frac{5}{10}$ (§. 235) $= \frac{1}{10}$.

THEOREMA L.

238. *Fractio æquatur numeratori per denominatorem diviso; hoc est,* $\frac{3}{4} = 3:4$.

DEMONSTRATIO.

Est enim fractio $\frac{3}{4}$ ad unitatem, seu integrum, ut numerator 3 ad denominatorem 4 (§. 38, 59). Quare cum sit ut antecedens ad consequentem ita exponens rationis ad unitatem (§. 140); si antecedens sumatur numerator 3, consequens denominator 4, erit fractio $\frac{3}{4}$ exponens rationis (§. 177). Æquatur ergo fractio numeratori per denominatorem diviso (§. 136). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXIV.

239. *Fractionem per fractionem multiplicare.*

RESOLUTIO.

Ducatur numerator unius fractionis in numeratorem, & denominator unius in denominatorem alterius; facta constituunt fractionem quæsitam.

Ex. gr. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (§. 231).

DEMONSTRATIO.

Sit $\frac{A}{B}$ $(\frac{2}{3}) = A:B$ (§. 238) $= F$, & $\frac{C}{D}$ $(\frac{1}{2}) = C:D$ (§. *cit.*) $= G$; erit $B:A = 1:F$, & $D:C = 1:G$ (§. 69). Ergo $BD:AC = 1:FG$ (§. 213), hoc est, $\frac{AC}{BD}$ $(\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2}) = \frac{FG}{1}$ (§. 169) $= FG$ $(\frac{2}{6})$. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

240. *Non mirum, quod factum factoribus minus, cum revera divisio sit, quæ multiplicatio vocatur. Ex. gr.* $\frac{2}{3}$ *multiplicare per* $\frac{1}{2}$ *idem est ac invenire dimidium duarum partium tertiarum.*

SCHOLION II.

241. *Hinc fractionum multiplicatio sequente modo facilius demonstratur.* Si fractio $\frac{4}{5}$ multiplicanda per $\frac{2}{3}$, duæ partes tertiæ quatuor quintarum inveniendæ. Data igitur fractio $\frac{4}{5}$ instar totius considerata dividenda est in tot partes æquales, quot multiplicatoris denominator 3 habet unitates, scilicet in nostro casu in tres, & pars ista multiplicanda per numeratorem multiplicatoris, nempe hic per 2 (§. 59).

SCHOLION III.

242. *Vix autem opus est ut annotemus, si fractio per numerum integrum multiplicanda, ducendum esse solum numeratorem in integrum numerum datum. Ex. gr. factum ex* $\frac{3}{7}$ *in 2 est* $\frac{6}{7}$.

PROBLEMA XXV.

243. *Fractionem* $(\frac{4}{5})$ *per aliam fractionem* $(\frac{2}{3})$ *dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur. Ex. gr. loco $\frac{2}{3}$ scribe $\frac{3}{2}$.
2. Divisor inversus ducatur in dividendum

dum (§. 239): quod prodit $\frac{12}{10}$, seu $1\frac{2}{5}$ (§. 223), est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Quoniam divisor ad dividendum ut unitas ad quotum (§. 69); erit etiam dividendus ad divisorem ut quotus ad unitatem (§. 169). Quodsi fractiones ad eandem denominationem reducantur (§. 235), cum eædem sint æquales quotis ex divisione numeratorum per denominatorem communem (§. 238); erit numerator fractionis dividendæ ad numeratorem dividentis ut fractio dividenda ad fractionem dividentem (§. 181); consequenter in hoc casu numerator dividendæ ad numeratorem dividentis ut quotus ad unitatem (§. 167). Quare fractiones datæ ad communem denominatorem reducendæ sunt, & numerator dividendæ per numeratorem dividentis dividi debet, ut habeatur quotus ex divisione fractionis dividendæ per dividentem emergens (§. 177). Enimvero dum fractiones duæ ad eandem denominationem reducuntur, numerator primæ enascitur ex numeratore ipsius dato in denominatorem secundæ, numerator vero secundæ ex ipsius numeratore dato in denominatorem primæ ducto (§. 235). Obtinemus adeo numeros, ex quorum divisione quotus quæsitus emergit, si divisor inversus (*juxta* §. 239) in fractionem dividendam ducatur. *Q. e. d.*

SCHOLION.

244. *Neque vero mirum est, quod quoti numeri integri esse possint. Una enim fractio alteram ter, quater, millies &c. continere potest. Apparet adeo, cum fractiones sint rationes (§. 141), eas dividere idem esse ac rationum rationes investigare.*

PROBLEMA XXVI.

245. *Integrum (3) per fractionem ($\frac{4}{7}$) dividere.*

RESOLUTIO.

1. Divisor invertatur, ut in Problemate præcedente (§. 243). Ex. gr. loco $\frac{4}{7}$ scribe $\frac{7}{4}$.
2. Numerus integer datus 3 ducatur in numeratorem 7 divisoris inversi.
3. Facto subscribatur ejusdem denominator 4: quod prodit $\frac{21}{4}$ sive $5\frac{1}{4}$ est quotus quæsitus.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum demonstratione Problematis præcedentis (§. 243).

CAPUT

CAPUT V.

De Potentiis numerorum, Genesi præsertim ac Analysi numerorum Quadratorum & Cubicorum.

DEFINITIO LIII.

246. Si numerus quicunque 2 in se ipsum ducatur; factum 4 *Numerus Quadratus*: ipse autem hujus intuitu *Radix Quadrata* appellatur.

COROLLARIUM.

247. Cum sit ut unitas ad Radicem quadratam, ita Radix ad ipsum Quadratum (§. *66*, 246); erit Radix media proportionalis inter unitatem & Quadratum (§. *156*).

DEFINITIO LIV.

248. Si numerus quadratus 4 porro per radicem 2 multiplicetur; factum 8 dicitur *Numerus Cubicus* seu *Cubus*, & radix 2 ejus intuitu *Radix Cubica*.

COROLLARIUM.

249. Cum sit ut unitas ad Radicem, ita Radix ad Quadratum (*§. 66*, 246) & ut unitas ad Radicem ita Quadratum ad Cubum (*66*, 248); erit etiam Radix ad Quadratum ut Quadratum ad Cubum (*§. 167*), hoc est, Unitas, Radix, Quadratum & Cubus in continua proportione progrediuntur (*§. 156*), & Radix Cubica est primus ex duobus numeris mediis continue proportionalibus inter Unitatem & Cubum.

DEFINITIO LV.

250. Cum istiusmodi multiplicatio in infinitum continuari possit; facta inde genita generali *Potestatum, Potentiarum*, *Dignitatum* nomine appellari solent. VIETA eadem *Magnitudines scalares* vocat.

DEFINITIO LVI.

251. *Exponens dignitatis* est numerus, qui indicat, quoties dignitas data per radicem dividenda, antequam ad unitatem perveniatur. Ita exponens Quadrati est 2, Cubi 3 (§. *246*, 248).

DEFINITIO LVII.

252. Hodie tantum non omnes dignitates optime distinguunt per exponentes, ita ut Radix dicatur *Dignitas prima*, Quadratum *secunda*, Cubus *tertia* &c. Qui *Arabes* sequuntur, singulis potentiis peculiaria imponunt nomina, diversa tamen ab iis, quibus cum DIOPHANTO (*a*) utuntur VIETA (*b*) & OUGHTREDUS (*c*). Nomina *Arabum* sunt: *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum* seu *Biquadratum*, *Surdesolidum*, *Quadratum Cubi*, *Surdesolidum secundum*, *Quadratiquadrati Quadratum*, *Cubus Cubi*, *Quadratum Surdesolidi*, *Surdesolidum tertium* &c. Nomina DIOPHANTI sunt; *Latus* seu *Radix*, *Quadratum*, *Cubus*, *Quadratoquadratum*, *Quadratocubus*, *Cubocubus*, *Quadratoquadratocubus*, *Quadratocubocubus*, *Cubocubocubus* &c.

SCHO-

(*a*) In *Libris Arithmeticorum*.
(*b*) In *Isagoge in Artem Analyt.* c. 3. f. m. 3.
(*c*) In *Clave Mathem.* c. 12. p. m. 34.

SCHOLION.

253. *Multi quadratum vocant* Zenſum. *Hinc compoſita:* Zenſizenſus, Zenſicubus, Zenſizenzenſus, Zenſurdeſolidus &c.

HYPOTHESIS XII.

254. *Qui* Arabum *denominationibus uſi, Potentiarum ſignis ſequentibus utuntur:* 1. R, 2. ℨ, 3. C, 4. ℨℨ, 5. ß, 6. ℨC, 7. Bß, 8. ℨℨℨ, 9. CC, 10. ℨß, 11. Cß &c. *Multo commodius* CARTESIUS *(a), monito* KEPLERI *(b) obſecutus, radici ſuperius a dextris jungit exponentem*, ex. gr. *ſi* a *fuerit radix, erunt Potentiæ ipſam ſequentes*, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 &c. *vel, ſi* $a = 2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 &c. *ita ut ſit* $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ &c.

DEFINITIO LVIII.

255. *Quantitatem ad dignitatem deſideratam evehere* idem eſt ac invenire factum ex ipſa aliquoties in ſe ducta emergens. Ex. gr. 2 evehere ad dignitatem tertiam idem eſt ac invenire factum 8, cujus factores 2. 2. 2.

DEFINITIO LIX.

256. *Ex dignitate data radicem extrahere, vel latus educere* idem eſt ac invenire numerum 2, qui aliquoties in ſe ipſum ductus datam potentiam (ex. gr. tertiam) 8 producit.

SCHOLION.

257. *Cum dignitates ſuperiores nonniſi in Analyſi uſum habeant; in præſenti geneſin & analyſin Quadratorum & Cuborum tantum tradimus. Radices vero quadratas ac cubicas extracturus omnium digitorum numeros quadratos & cubicos noſſe debet, quos ſequens tabula exhibet:*

Radices.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrati.	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubi.	1	8	27	64	125	216	343	512	729

(a) In *Geometria*.
(b) *Harmonices mundi* lib. 1. f. 35. 36.

DEFINITIO LX.

258. *Radix* tam quadrata, quam cubica, aut dignitatis ſuperioris cujuſcunque dicitur *Binomia*, ſi ex duabus: *Trinomia*, ſi ex tribus: *Multinomia* ſive *Polynomia*, ſi ex pluribus, quam duabus partibus conſtat.

THEOREMA LI.

259. *Potentiæ ejuſdem gradus ſunt in ratione tantuplicata laterum, quot unitates habet exponens earundem; hoc eſt, Quadrata habent rationem duplicatam: Cubi triplicatam: Quadrato-quadrata quadruplicatam: &c. rationem ſuarum radicum.*

DEMONSTRATIO.

Potentiæ oriuntur, ſi radices A & B aliquoties in ſeipſas ducas (§. 250). Quare cum eadem radix A ad eandem radicem B eandem habeat rationem; ratio Quadratorum componitur ex duabus, Cuborum ex tribus, Quadrato-quadratorum ex quatuor, &c. reliquarum Potentiarum ex tot rationibus ſimilibus, quot exponens earundem habet unitates. Ergo Quadrata habent rationem duplicatam, Cubi triplicatam, &c. ceteræ Potentiæ rationem tantuplicatam ſuarum radicum, quot unitates habet exponens earundem (§. 159).

THEO-

THEOREMA LII.

260. *Quantitatum proportionalium Potentiæ eædem ſunt etiam proportionales.*

DEMONSTRATIO.

Habent enim Potentiæ eandem rationem multiplicatam ipſarum A : B, B : C, C : D, D : E &c. vel A : B, C : D, E : F &c. (§. 259). Sed hæ rationes omnes inter ſe eædem ſunt, *per hypoth.* Ergo potentiæ iſtæ, v. gr. A^3, B^3, C^3, D^3, E^3, &c. conſtituunt rationes compoſitas ex rationibus, quarum ſingulæ ſingulis æquales ſunt (§. 250); conſequenter eaſdem (§. 218); atque adeo proportionales ſunt (§. 155). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

261. *Numerus quadratus radicis binomiæ, componitur ex Quadrato partis primæ, ex Facto dupli primæ in alteram & ex Quadrato partis alterius.*

DEMONSTRATIO.

Prodit enim numerus Quadratus, ſi Radix in ſeipſam ducitur (§. 246). Utraque vero pars radicis ſigillatim ducitur in utramque ſimul (§. 111). Quare productum componi debet 1°. ex facto partis primæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis primæ (§. 246); 2°. ex facto partis primæ in ſecundam & ex facto ſecundæ in primam, hoc eſt, ex duplo facto primæ in ſecundam, ſeu ex Facto dupli primæ in ſecundam (§. 207, 208); 3°. ex facto partis ſecundæ in ſeipſam, hoc eſt, ex Quadrato partis ſecundæ (§. 246). *Q. e. d.*

SCHOLION.

262. *Demonſtratio eſt ocularis, ſi, in quocunque exemplo ſingulari, multiplicatio non actu peragitur, ſed ſaltem indicatur; quo in caſu exempli univerſalis vices tuetur: id nimirum non infelicius quam figuræ in Geometria repræſentant, quod ſingularia in univerſum omnia commune habent. Ex. gr. ſit radix binomia* 34, *aut* 30 + 4; *erit*

```
  30 + 4   Radix binomia.
  30 + 4
 --------
     16    Quadratum partis II.
    120 }
    120 }  Facta ex I in II.
    900    Quadratum partis I.
 --------
   1156    Quadratum totius.
```

Egregium hoc artificium vires imaginationis mire extendit & intellectum juvat tam in demonſtrationibus concipiendis, quam in propoſitionibus inveniendis.

COROLLARIUM I.

263. Cum pars dextra, ſive ſecunda, inter unitates, ſiniſtra ſive prima, inter decades locum obtineat (§. 50); Quadratum illius in loco dextimo, Factum ex unius duplo in alteram in ſecundo, Quadratum denique alterum in tertio a dextimo terminari debet (§. 49).

SCHOLION II.

264. *Scilicet Quadratum partis dextimæ nullam adjunctam habet cyphram; duplo Facto ex parte una in alteram cyphra una, Quadrato autem partis ſiniſtræ duæ adjunguntur; ut numeri ſolitarie poſiti juſtum locum naniſcantur* (§. 49).

COROLLARIUM II.

265. Si radix multinomia fuerit; partes duæ aut plures ſiniſtimæ habeantur pro una, & extemplo patebit, Quadratum numeri cujuſcunque componi ex Quadratis ſingularum partium & Factis ex duplo partis cujuſ-

cujuſlibet in omnes ipſa ſiniſteriores: ut adeo Theorema unum compoſitioni omnium numerorum Quadratorum ſufficiat.

SCHOLION III.

266. *Sit radix 346 : ſumatur 340 pro parte una & 6 pro altera; erit (§. 261).*

```
    340 + 6
    340 + 6
  ------------
         36   Quadratum pars III.
       2040 } Facta ex parte III in I &
       2040 }        II ſimul.
       1600   Quadratum partis II.
      12000 }
      12000 } Facta ex I in II.
      90000   Quadratum partis I.
  ------------
     119716   Quadratum totius.
```

COROLLARIUM III.

267. Quonam in loco ſingula producta terminentur, ex Corollario primo & ejus Scholio intelligitur (§. 263, 264). Habenda nimirum eſt ratio cyphrarum numeris in ſe invicem ductis adjungendarum, ſi ſolitarii ponantur, ut juſtum nanciſcantur locum (§. 49).

SCHOLION IV.

268. *Extractio Radicis Quadratæ, alias tædii plena, facillima evadit, ubi Quadratis per Theorema præſens componendis operam prius impenderis.*

PROBLEMA XXVII.

269. *Ex numero quocunque dato Radicem Quadratam extrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Numerus propoſitus diſtinguatur in claſſes, binas notas claſſi unicuique aſſignando, initio a dextra facto. Tot enim erunt partes Radicis, quot claſſes habentur (§. 265, 267). Notandum vero, quod claſſi ſiniſtimæ interdum nonniſi nota unica relinquatur.
2. Jam cum in claſſe ſiniſtima reperiatur Quadratum notæ ſiniſtimæ Radicis (§. *cit.*); in *Tabula Radicum* (§. 275) quæratur numerus Quadratus ei, qui claſſem ſiniſtimam occupat, vel æqualis, vel eodem proxime minor, & ex ipſo ſubtrahatur; Radix vero ejus poſt lunulam ſcribatur.
3. Quoti inventi duplum ponatur ſub nota ſiniſtima claſſis ſubſequentis, & inde porro ſiniſtrorſum, ſi ex notis pluribus conſtiterit. Inveſtigetur novus quotus per Abacum *Pythagoricum* (§. 109), inventuſque poſt lunulam ſcribatur: eſt enim pars ſecunda Radicis (§. 261, 210).
4. Idem quotus ponatur ſub nota dextima illius claſſis, & factum ex numero ſubſcripto integro in diviſorem (§. 263) ſubducatur, ut in diviſione moris eſt.
5. Quodſi operatio, juxta regulam tertiam & quartam, in reliquis claſſibus iteretur; prodibit Radix quæſita (§. 265, 267).

```
Ex. gr. 11 | 56 (34       11 | 97 | 16   (346
         9 | ::            9 | :: | ::
        -------          ---------------
         2 | 56            2 | 97 | ::
             6*                6* | ::
         2   56            2   56 | ::
        -------          ---------------
             0                 41 | 16
                                6 | 86
                               41 | 16
                               ---------
                                    0
```

PROBLEMA XXVIII.

270. *Radicem Quadratam ex fractione data extrahere, cujus numerator & denominator est numerus quadratus.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

Quoniam numerum fractum per fractum multiplicans unius numeratorem in numeratorem alterius, & denominatorem pariter in denominatorem alterius ducit (§. 239); Quadratum autem ex ductu ejusdem numeri in seipsum enascitur (§. 246); Radicem Quadratam extracturus, eam sigillatim ex numeratore ac denominatore extrahere tenetur.

Ita Radix Quadrata ex $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$; ex $\frac{49}{144}$ vero $\frac{7}{12}$.

COROLLARIUM I.

271. Cum numeri integri ad fractionem denominatoris dati reducantur, si per hunc multiplicentur, & facto tanquam numeratori denominator datus subscribatur (§. 224); si numerus datus, qui Quadratus non est, ad fractionem reducatur, cujus denominator est Quadratus & ex fractione extrahatur Radix (§. 270): quæ prodit fractio Radicem prope veram exhibet in istiusmodi partibus, quas denominatoris Quadrati Radix indicat.

SCHOLION I.

272. *Ex. gr. Si ex 2 extrahenda Radix prope vera, quæ non deficiat in partibus sextis; duc 2 in 36, ut prodeat fractio $\frac{72}{36}$, cujus Radix $\frac{8}{6}$, sive $1\frac{2}{6}$, exhibet Radicem a vera magnitudine parte sexta non differentem, seu cujus defectus minor est quam $\frac{1}{6}$.*

COROLLARIUM II.

273. Quoniam numerum per articulum primarium, veluti 10, 100, 1000 &c. multiplicaturus, eidem non nisi cyphras 0, 00, 000 &c. unitati adhærentes adjungere teneris (§. 112); Radicem prope veram in fractionibus decimalibus desiderans, numero qui Quadratus non est, 2, 4, 6 &c. cyphras junge dextrorsum & operationem continua: ita enim prodibit Radix prope vera in partibus decimis, centesimis, millesimis &c.

SCHOLION II.

274. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Quadrata ex 345; prodibit* $18\frac{57}{100}$.

```
3|45(18 57/100
1|::
-- -----
2|45
 (28)
 224|
------
 2.1.0.0
 (3|65)
 1 8 25
 --------
   2 7.5.00
    (37 07)
   2 5 9 4 9
   ---------
     1 5 5 1
```

SCHOLION III.

275. *Si Tabulis numerorum Quadratorum pro Radicibus ab 1 usque ad 1000 utaris; in iis evolvi potest numerus Quadratus proxime minor eo, qui tres classes sinisteriores occu-*

8697.5	$(294\frac{9}{10}$
86436	
539'0.0	
(5889)	
53001	
899	

occupat. Ita sine ullo labore habentur tres notæ priores, ex. gr. in nostro casu 294. Plures notæ una inveniuntur, si Tabulæ longius extendantur.

THEOREMA LIV.

276. *Numerus Cubicus Radicis binomiæ componitur ex numeris Cubicis duarum partium, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam & ex Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam.*

DEMONSTRATIO.

Numerus Cubicus prodit, si Quadratum per Radicem multiplicetur (§. 248). Sed Quadratum Radicis binomiæ componitur ex Quadratis partium & Facto duplo ex parte una in alteram (§. 261). Quare Cubus componitur ex Cubo partis primæ, ex triplo Facto Quadrati partis primæ in secundam, ex triplo Facto Quadrati partis secundæ in primam, hoc est, ex Facto tripli Quadrati partis primæ in secundam, & Facto tripli Quadrati partis secundæ in primam (§. 207), atque ex Cubo partis secundæ (§. 246, 248). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

277. *Demonstrationem ocularem denuo sistit exemplum singulare, in quo multiplicatio tantum indicatur. Sit ex. gr. Radix* 34 *seu* 30 + 4, *erit*

30 + 4	*Radix*
16	*Quadrat. part.* II.
120 120	*Facta ex* I *in* II.
900	*Quadrat. part.* I.
64	*Cubus part.* II.
480 480	*Facta ex Quadrat.* II. *in* I.
3600	*Factum ex Quadrat.* I. *in* II.
480	*Fact. ex Quadrat.* II. *in* I.
3600 3600	*Facta ex Quadrat.* I. *in* II.
27000	*Cubus part.* I.
39304	*Cubus totius.*

COROLLARIUM I.

278. Cum pars dextra inter unitates, sinistra inter decades locum obtineat (§. 50); numerus Cubicus dextræ in loco dextimo, Factum ex triplo Quadrato ejus in sinistram in secundo, Factum ex triplo Quadrato sinistræ in dextram in tertio, Cubus denique partis sinistræ in quarto loco terminatur (§. 49).

COROLLARIUM II.

279. Si Radix multinomia fuerit, duæ vel plures notæ ~~dextimæ~~ sinistimæ pro una habentur, ut binomiæ formam mentiatur; extemplo patet, quod Cubus quicunque componatur ex Cubis singularum partium radicis & ex Factis tripli Quadrati quarumlibet sinisteriorum in proxime dexteriorem, itemque ex Factis tripli Quadrati cujuslibet dexterioris in omnes sinisteriores.

SCHOLION II.

280. *Sit Radix* 346. *Sume* 340 *pro parte una radicis, erit* 6 *pars altera, consequenter* (§. 276).

346 346	
90000	*Quadrat. part.* I.
12000 12000	*Facta ex* I *in* II.
1600	*Quadrat. part.* II.
115600	*Quadrat.* I *&* II *simul.*
2040 2040	*Facta ex* III *in* I *&* II *simul.*
36	*Quadrat. part.* III.
27000000	*Cubus part.* I.
3600000 3600000	*Facta ex Quadr.* I *in* II.
480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
3600000	*Fact. ex Quadr.* I *in* II.
480000 480000	*Fact. ex Quadr.* II *in* I.
64000	*Cubus part.* II.
693600 693600	*Facta ex Quadr.* I *&* II *simul in* III.
12240	*F. ex Quad.* III *in* I *&* II *sim.*
693600	*F. ex Quadr.* I *&* II *sim. in* III.
12240 12240	*Fact. ex Quadr.* III *in* I *&* II *simul.*
216	*Cubus part.* III.
41421736	*Cubus totius.*

Notandum scilicet, sectionem numeri in duas partes arbitrariam esse; cumque Theorema generaliter de Radice utcunque in duas partes divisa loquatur, idem quoque ad quamlibet sectionem applicari posse. Ex. gr. *numerus* 346 *non modo, stante Theoremate, in* 340 *&* 6, *vel in* 300 *&* 46, *verum etiam in* 195 *&* 151, *in* 89 *&* 257, *& in duas quascunque alias partes dividi potest: id quod etiam tentanti palam fit. Ceterum idem valere in numeris Quadratis, immo in genere in Potentiis quibuscunque, me tacente intelligitur.*

COROLLARIUM III.

281. In quibus autem locis singula terminentur facta, ex Corollario primo (§. 278) colligitur: habenda nimirum & hic est ratio cyphrarum numeris in se invicem ductis adjungendarum, si solitarii ponantur. *Vide exemplum in Schol. prac.* (§. 280).

PROBLEMA XXIX.

282. *Ex numero dato Radicem Cubicam extrahere.*

RESOLUTIO ET DEMONSTRATIO.

1. Numerus datus distinguatur in classes, tres notas unicuique assignando, initio a dextris facto. Etenim ex tot notis Radix componitur, quot classes emergunt (§. 278, 281). Notandum vero, non repugnare, ut classi sinistimæ una, vel duæ notæ cedant.
2. In *Tabula Radicum* (§. 257) quæratur numerus Cubicus eo proxime minor numero, qui in classe sinistima continetur, nisi ipse in eadem inveniatur, atque ab hoc subtrahatur; ejus vero Radix post lunulam scribatur: est enim pars prima Radicis (§. 274).
3. Quoti inventi Quadratum triplum (§. 278, 281) scribatur sub nota sinistima classis subsequentis, & inde porro sinistrorsum si ex pluribus notis constiterit: quo facto quæratur quotus, qui erit pars secunda Radicis (§. *cit.* & §. 210.)
4. Divisor ducatur in novum quotum, & productum sub eo deleto scribatur; sub nota vero media classis ejusdem terminetur Factum ex triplo

triplo Quadrato novi quoti in præcedentem; ſub dextima denique Cubus novi quoti. Hæc tria facta in unam ſummam collecta ex notis numeri Cubici ſupraſcriptis ſubtrahantur (*§. cit.*).

5. Quodſi operatio per reliquas claſſes, juxta regulam tertiam & quartam continuetur; prodibit Radix quæſita (§. 279).

Ex. gr.	47	437	928 (362
	27		
	20	437	
Diviſor	(2	7)..	
Fact. ex d. in q.	16	2..	
Fac. ex 3 □ n.q. in pr.	3	24.	
Cubus novi quoti		216	
Summa factor.	19	656	
		781	928
Diviſor		(388	8)..
Fact. ex Div. in q. n.		777	6..
Fact. ex 3 □ n. q. in pr.		4	32.
Cubus n. q.			8
Summa factorum		781	928
		000	000

PROBLEMA XXX.

283. *Radicem Cubicam ex fractione extrahere, cujus numerator & denominator Cubus eſt.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Eodem, quo ſupra (§. 270), modo patet, Radicem ſigillatim ex numeratore ac denominatore extrahendam eſſe.

Ita radix ex $\frac{27}{343}$ eſt $\frac{3}{7}$; ex $\frac{64}{729}$ vero $\frac{4}{9}$.

COROLLARIUM I.

284. Hinc porro eodem, quo ſupra, (*§.* 271), modo conſequitur, Radicem prope veram in fractione dati denominatoris inveniri, ſi numerus, qui Cubus non eſt, per hujus denominatoris Cubum multiplicetur, & Radici Cubicæ ex facto extractæ tanquam numeratori denominator datus ſubjiciatur.

SCHOLION I.

285. Ex. gr. *Si ex* 12 *extrahenda Radix Cubica prope vera, defectu minore quam* $\frac{1}{8}$; *ducatur* 12 *in* 512 *Cubum ipſius* 8, *& ex facto* 6144 *extrahatur Radix Cubica* 18, *erit* $\frac{18}{8}$, *ſeu* $2\frac{2}{8}$, *Radix prope vera, cujus defectus eſt minor quam* $\frac{1}{8}$.

COROLLARIUM I.

286. Immo inde ulterius eodem, quo ſupra (*§.* 273), modo fluit, Radicem prope veram in fractionibus decimalibus inveniri, ſi 3, 6, 9 &c. cyphræ numero non Cubo dextrorſum pro decimis, centeſimis, milleſimis &c. partibus jungantur, & operatio (§. 282) continuetur.

SCHOLION II.

287. Ex. gr. *Sit extrahenda Radix Cubica ex* 3; *eam reperies* $1\frac{44}{100}$.

3 (1$\frac{44}{100}$		
1		
	2	0.0.0
		3..
	1	2..
		48.
		64
	1	744
	256.	0.0.0
	58	8..
	235	2..
	6	72.
		64
	241	984
	14	016

SCHO-

SCHOLION III.

288. *Si Tabulis numerorum Cubicorum utaris, idem operæ compendium facere licet, quod supra (§. 275) in extrahenda Radice Quadrata commendavimus.*

PROBLEMA XXXI.

289. *Examinare extractionem Radicis Quadratæ ac Cubicæ.*

RESOLUTIO.

I. Radix Quadrata inventa ducatur in se ipsam, & facto residuum, si quod fuerit, addatur. Quodsi numerus prodeat, ex quo Radix extracta; erit numerus inventus Radix Quadrata dati, vel exacta, vel (si talem non habeat) prope vera (§. 246).

```
   1857
   1857
 -------
  12999
  9285
 14856
 1857
 -------
3448449
   1551
 -------
3450000
```

Ex. gr. Radicem Quadratam prope veram ex 345 supra (§. 274) reperimus $18\frac{57}{100}$. Duc Radicem 1857 in seipsam & facto 3448449 adde residuum 1551: prodibit numerus 345, ex quo extractio fieri debebat, quatuor cyphris auctus: ut in extractione ad inveniendas centesimas factum fuerat.

II. Radix Cubica inventa ducatur in seipsam, & factum denuo in eandem. Producto posteriori addatur, si quod fuerit, residuum. Quodsi numerus prodeat, ex quo extractio facta, operatio rite peracta (§. 248).

```
   144
   144
 -------
   576
  576
 144
 -------
 20736
   144
 -------
 82944
 82944
20736
 -------
2985984
  14016
 -------
3000000
```

Ex. gr. Superius (§. 287) ex 3 extracta Radix est $1\frac{44}{100}$. Duc hanc Radicem 144 in seipsam, & factum 20736 denuo in 144. Producto alteri 2985984 adde, quod supra residuum erat, 14016. Aggregatum est ~~Radix~~ 3 sex cyphris aucta, ut in operatione factum fuerat.

THEOREMA LV.

290. *Exponens rationis Quadratorum est Quadratum: Cuborum Cubus: & in genere Potentiarum cujuscunque gradus Potentia ejusdem gradus exponentis Radicum.*

DEMONSTRATIO.

Quadrata enim habent rationem duplicatam; Cubi triplicatam: & in genere Potentiæ cujuscunque gradus rationem multiplicatam suarum Radicum (§. 259). Quare cum exponens rationis compositæ sit æqualis facto, quod producunt exponentes simplicium (§. 214), exponens vero rationum simplicium, ex quibus componuntur duplicatæ, triplicatæ, & in genere multiplicatæ quæcunque, idem fit (§. 159); exponens rationis duplicatæ erit Quadratum (§. 246), triplicatæ Cubus (§. 248), & in genere multiplicatæ cujuscunque Potentia exponentis Radicum (§. 250). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

291. *Si ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem, numerus integer prodit; etiam ex divisione Radicis per Radicem integer prodire debet.*

DEMONSTRATIO.

Quotus ex divisione numeri Quadrati per Quadratum, Cubi per Cubum, & in genere Potentiæ cujuscunque per aliam similem emergens est exponens rationis Quadratorum, Cuborum, vel in genere Potentiarum similium se mutuo dividentium (§. 136), adeoque Quadratum, Cubus & in genere potentia exponentis rationis Radicum (§. 290). Quare cum idem sit numerus rationalis integer, *per hypoth.* erit idem numerus rationalis integer Quadratus, Cubus, vel Potentia alterius gradus: cujus quoniam Radix itidem rationalis integer esse debet (§. 250); etiam exponens Radicum numerus rationalis integer erit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

292. Quare si Radix Radicem non metitur, nec Quadratum Quadratum, nec Cubus Cubum, nec Potentia quæcunque aliam similem metitur (§. 74); consequenter fractio integro major ex istiusmodi Quadratis, Cubis, vel Potentiis quibuscunque similibus composita ad numerum integrum irreducibilis (§. 223).

THEOREMA LVII.

293. *Si numeri integri non datur Radix in integris, nec dabitur per fractos.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus dari numerum fractum, qui sit Radix. Ex ejus itaque iterata multiplicatione per seipsum produci debet numerus datus (§. 250). Sed quotiescunque fractum per seipsum multiplicas, productum semper est fractus (§. 239), isque in præsente casu ad integrum irreducibilis (§. 292). Quare cum numerus datus sit integer, *ex hypoth.* fractus ejus Radix esse nequit. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

294. Jam cum numeri primi in se ex nullo alio numero in se aliquoties ducto oriantur (§. 75); ex numeris primis in se nulla perfecta Radix extrahi potest in integris (§. 256), adeoque nec per fractos dari potest (§. 293).

HYPOTHESIS XIII.

295. *Interdum utile est, extractionem Radicis tantum indicari, præsertim si perfecta haberi nequit. Est autem signum radicale sequens* ($\sqrt{}$): *cui in vertice jungitur exponens dignitatis, si altioris gradus, quam quadrata.* Ex. gr. $\sqrt[2]{}$ denotat Radicem quadratam ex 2; $\sqrt[3]{5}$ denotat Radicem cubicam ex 5.

SCHOLION.

296. *In Geometria & Analysi demonstrabitur, tales Radices, quæ actu dari non possunt, esse ad unitatem ut rectam lineam ad rectam aliam; consequenter numeros* (§. 10), *eosque irrationales, cum ex hypothesi rationales non sint. Dicuntur vulgo numeri surdi: quamvis olim hujus vocis significatus strictior fuerit* (b). *Et olim, & nunc interdum* radicales *nuncupari sueverunt.*

(b) Vid. STIFELIUS in *Arithm. integra* lib. 2. c. 12. p. 134.

CAPUT VI.

De Regulis Proportionum.

THEOREMA LVIII.

297. *Si fuerint quatuor quantitates proportionales; factum extremarum æquatur facto mediarum.*

DEMONSTRATIO.

6 : 3 = 8 : 4
4   3
——————
24 = 24

A : B = C : D (*per hypoth.* & §. 152). Ergo AD : BC = CD : DC (§. 185). Sed CD = DC (§. 207). Igitur AD = BC (§. 149). *Q. e. d.*

THEOREMA LIX.

298. *Si fuerint tres quantitates continue proportionales; factum extremarum est æquale mediæ quadrato.*

DEMONSTRATIO.

6 : 12 = 12 : 24
12   6
——————
144 = 144

Quoniam enim A : B = B : C (*per hypoth.* & §. 156, 152); erit AC = BB (§. 297). Sed BB est Quadratum ipsius B (§. 250). Ergo factum extremarum AC æquatur Quadrato mediæ. *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

299. *Si quantitas AD, producta ex duabus aliis se mutuo multiplicantibus A & D fuerit æqualis alteri BC, ex duabus aliis B & C eodem modo producta; erit A : B = C : D.*

DEMONSTRATIO.

6   8
4   3
——————
24 = 24
4 : 8 = 3 : 6

AC : AD = C : D (§. 178). Sed AD = BC, *per hypoth.* Ergo AC : BC = C : D (§. 168); consequenter A : B = C : D (§. 181). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

300. Si ergo in serie quatuor quantitatum factum ex secunda in tertiam æquale sit facto ex prima in quartam; erunt quantitates istæ proportionales.

PROBLEMA XXXII.

301. *Inter duos numeros (8 & 72) medium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Datorum unus 72 multiplicetur per alterum 8 (§. 111).
2. Ex facto 576 extrahatur Radix quadrata 24 (§. 269); quæ erit numerus quæsitus (§. 298).

PROBLEMA XXXIII.

302. *Datis tribus numeris 3, 12, 5; quartum: aut duobus, tertium proportionalem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Secundus 12 ducatur in tertium 5; aut in altero casu secundus in seipsum.
2. Factum 60 dividatur per primum 3. Quotus 20 est quartus: in altero casu tertius quæsitus.

DE-

DEMONSTRATIO.

Si enim terminum secundum per tertium, aut in altero casu secundum per seipsum multiplicas; factum ex primo in quartum, in casu altero ex primo in tertium prodit (§. 297, 298). Quodsi ergo hoc per primum dividis; quotus est terminus quartus, in casu altero tertius (§. 210). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

303. Data qualibet fractio converti potest in aliam æqualem datæ denominationis. Quodsi enim, *per Probl. præs.* ad denominatorem & numeratorem fractionis datæ atque denominatorem desideratæ quæratur numerus quartus proportionalis; erit is numerator fractionis quæsitæ (§. 225).

Ex. gr. sit fractio $\frac{2}{3}$ convertenda in aliam cujus denominator 24, reperietur ea $\frac{16}{24}$.

$$\begin{array}{r} 3 \text{---} 2 \text{---} 24 \\ 2 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$48 (16 \atop 33$$

COROLLARIUM II.

304. Quodsi numerus partium, in quas integrum aliquod communi more dividitur, pro denominatore assumitur; valor fractionis datæ in mensura vulgari reperitur. Ex. gr. Cum apud nos thalerus in 24 grossos dividatur, ex ante allato exemplo apparet, 16 grossos æquivalere duabus tertiis unius thaleri.

COROLLARIUM III.

305. Si vero denominator assumitur 10, 100, 1000 &c. fractiones datæ in decimales convertuntur. Ita reperiemus $\frac{2}{3} = \frac{666666}{1000000}$ &c. in infinitum; $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$; $\frac{3}{7} = \frac{42857}{100000}$ fere.

SCHOLION I.

306. *In fractionibus decimalibus denominator omitti solet, quia ex meris cyphris & præfixa unitate constat. Ejus vero loco punctum (.) numeratori præfigitur & loca vacua replentur cyphra, ita ut, ex. gr. duæ cyphræ præponantur, si fractio millesimis incipiat. Ita loco* $\frac{23}{100}$ *scribimus* 0. 23; *loco* $5\frac{47}{10000}$ *scribimus* 5. 0047. *Est vero harum fractionum non exiguus in Mathesi usus, quas primus in condendis Tabulis sinuum adhibuit* Johannes REGIOMONTANUS.

SCHOLION II.

307. *Resolutio hujus Problematis vulgo* Regula trium *appellatur, quia ex tribus numeris invenitur quartus. Usus ejus amplissimus tam in vita communi, quam in scientiis. Hinc* Regula aurea *vocatur. Facile autem apparet, hac Regula nullibi esse utendum, nisi ubi de numerorum datorum proportione constiterit.* Ex. gr. *Sit vas ingens aqua repletum per exiguum in fundo foramen effluxura, si aperiatur. Ponamus, intra 2 minuta prima effluere 3 congios. Inveniri debet, quanto tempore 100 congii effluant. Tres in hoc casu dantur numeri, quartus inveniendus. Enimvero vel ipsa experientia docet, aquam sub initium celerius, postea tardius effluere; consequenter quantitatem aquæ effluentis non esse tempori proportionalem. Quamobrem hæc quæstio per Regulam trium solvi nequit.*

SCHOLION III.

308. *Quæ in commercium veniunt, pretiis suis proportionalia sunt. Qui enim duplum mercis accipit, duplum; qui triplum accipit, triplum pretium solvit. Dato igitur pretio quantitatis cujusdam determinatæ mercis, per Regulam trium invenitur pretium quantitatis cujuscunque alterius datæ, aut quantitas mercis dato cuicunque alteri pretio respondens. Ex. gr. pretium 3 librarum sunt 4 thaleri, quantum est*

 pre-

pretium 17 librarum? Cum sit, ut 3 libræ ad 17 libras, ita illarum pretium (quod est 4 thalerorum) ad pretium harum; hoc quidem ita invenitur:

3 L. — 17 L. — 4 Th.
4 | 2 (22⅔ th.
— | 68
68 | 33

Item: 3 libræ veneunt 4 thaleris, quot $22\frac{2}{3}$ *thaleris? Cum sint ut 4 thaleri ad* $22\frac{2}{3}$, *ita 3 libræ ad quæsitas; harum numerus ita innotescit:*

4 Th. — $22\frac{2}{3}$ Th. — 3 L.
3 | 2
— | 68 (17 L.
68 | 44

Hinc simul patet, quomodo Regula trium examinetur, hoc est, inveniatur, utrum operatio per eam rite peracta, nec ne.

Scholion IV.

309. *Similiter merces operariorum est tempori proportionalis, quo labore defunguntur; etiam quantitas laboris eidem tempori proportionalis, si æqualibus articulis æqualia pensa absolvuntur; eadem numero operariorum proportionalis, si pensa æqualia singuli absolvunt. Ex. gr. Intra 2 horas 6 libri folia perleguntur: Quanto horarum spatio 360 perlegi poterunt?*

6 F. — 360 F. — 2 H.
2 | 1
— | 720 (120 H.
720 | 666

Scholion V.

310. *Si numeri dati fuerint heterogenei, non eandem proportionem habent, quam res ipsis respondentes: ad homogeneos igitur reducendi. Ita thaleri in grossos, grossi in nummos, libræ in semuncias, horæ in minuta &c. convertuntur. Ex. gr. 3 libræ & 4 semunciæ veneunt 2 thaleris & 4 grossis, quanti libræ 2? Calculus talis est*

3 L. 4 S. — 2 L. — 2 Th. 4. gr.
32 | 32 | 24
— | — | —
100 S. — 64 S. — 52 gr.
52
—
128
320 | 3328 (33 $\frac{28}{100}$ seu $\frac{7}{25}$ g.
— | 1100
3328

Quodsi nosse cupias, quot nummis conveniant $\frac{7}{25}$ *grossi, ita reperies* (§. 304).

25 — 7 — 12
7 | 29 (3 $\frac{9}{25}$ num.
— | 84
84 | 25

Si nummus ulterius divideretur, poterat quoque valor $\frac{9}{25}$ *unius nummi eodem modo reperiri: sed cum tanti non sit ut inveniatur, fractio illa tuto negligitur.*

Scholion VI.

311. *In scriptis Arithmeticorum* Regula trium inversa *occurrit, qua terminus datorum primus duci jubetur in secundum & factum dividi per tertium, contraria nimirum ratione, qua in* Regula trium directa *usi sumus* (§. 302), *quia scilicet termini contra naturam proportionis ordinantur. Sed ea opus non est, si numeri dati, prout proportio exigit, ordinentur. Ex. gr. 125 milites operi exstruendo 6 menses impendunt: quantus requiritur militum numerus, ut intra 2 absolvatur. Evidens est, quod sit, ut spatium 2 mensium ad spatium 6 mensium, ita numerus militum, qui opus intra sex menses absolvunt, ad numerum militum, qui intra duos idem exstruunt. Quo minore enim temporis intervallo exstruitur,*

tur, eo major militum numerus requiritur. En calculi typum:

2 M. — 6 M. — 125 Mil.
6
750

22
750 (375 Mil.
222

SCHOLION VII.

312. *Interdum gemina Regulæ trium applicatione opus est, antequam numerus quæsitus innotescat. Ea vulgo pro peculiari Regula venditatur & ab aliis* Regula de quinque, *ab aliis* Regula composita *appellatur. Ex. gr. 300 thaleri dant intra 2 annos usuram 36 thalerorum, quantam dabunt 20000 thaleri intra 12 annos. Hic per Regulam trium primùm invenitur, quanta sit usura a 20000 expectanda intra 2 annos. Dein per eandem investigatur, quanta eadem intra 12 annos existat:*

300 Th. – 20000 Th. – 36 Us.
2 — 20000
720000 (2400 Us. — 720000
33000

2 A. – 12 A. – 2400 Us.
12

28800 (14400 Us. 4800
222 — 24

28800

SCHOLION VIII.

313. *Exemplis istiusmodi Regula trium semel applicata satisfacere potest. Cum enim in nostro casu bis 300 thaleri eandem dent usuram intra 1 annum, quam 300 intra 2, & duodecies 20000 tantam intra 1 annum, quanta 20000 intra 12; omissis temporis circumstantiis ita inferatur: bis 300, id est 600 thaleri dant usuram (intra annum scilicet) 36, quantam dabunt duodecies 20000, id est 240000 thaleri (iidem intra annum?)*

600 Th. — 240000 Th. — 36 us.
36

1440000 — 22
72 — 8640000 (14400
— 6666600

8640000

Posterior hæc methodus priori præfertur, quod in illa ad fractionum tædia sæpe prolabimur.

SCHOLION IX.

314. *Dantur & alii casus, in quibus iterata Regulæ trium applicationi supersedere non licet. Ita, si commune sociorum lucrum vel damnum inter eos distribuendum, toties applicatur quot sunt socii. Est enim ut summa collatorum ad lucrum vel damnum commune, ita collatum quodlibet partiale ad lucrum vel damnum partiale ipsi respondens. Ex. gr. Lucrum commune trium personarum est 2000 thalerorum, collatum primi 1000, secundi 500, tertii 300: inveniri debent lucra partialia singulis convenientia. En typum calculi:*

Collatum primi 1000 Th.
secundi 500
tertii 300

Summa Collatorum 1800 Th.
1800 Th. — 1000 Th. — 2000 Th.
2 000

2000000

111
11112
2000000 ($1111\frac{2}{18}$ Lucrum primi.
1888800
111
1800 Th. — 500 Th. — 2000 Th.
2 000
1000000

111
555
1000000 ($555\frac{10}{18}$ Lucrum ſecundi.
188800
11
1800 Th. — 300 Th. — 2000 Th.
2 000
600000

33
3666
6000000 ($333\frac{6}{18}$ Lucrum tertii.
188800
11

EXAMEN.

$1111\frac{2}{18}$	Lucrum primi
$555\frac{10}{18}$	ſecundi
$333\frac{6}{18}$	tertii
2000 Th.	Lucrum commune.

SCHOLION X.

315. *Non deſunt alia exempla, quæ calculum eundem requirunt, ut cum, in Medicina aut Artibus aliis, ex data ratione quam pondera miſcibilium inter ſe habent, inveniuntur pondera miſcibilium requiſita, ut mixtum integrum ſit ponderis dati. Ex. gr. Tria ſimplicia compoſitionem alicujus medicamenti ingrediuntur, doſis unius eſt* 4, *alterius* 5, *tertii* 2 *unciarum: inveniri debent doſes ſingulorum requiſitæ, ut pondus compoſiti ſit* 8 *librarum. En calculi typum:*

Pondus {primi / ſecundi / tertii} ſimplicis 4 Unc. / 5 / 2
Summa 11 Unc.

11 Unc. – 8 L. – 4 Unc.
16
128 Unc. 1
4 176
511 ($46\frac{6}{11}$ Pond. ſimp. primi
512 111
1

11 Unc. – 128 Unc. – 5 Unc.
5 1
192
640 640 ($58\frac{2}{11}$ pond. ſimp. ſecund.
111
1

11 Unc. – 128 Unc. – 2 Unc.
2 33
256 ($23\frac{3}{11}$ Pond. ſimp. tertii.
256 111
1

EXAMEN.

Pondus ſimplicis	primi	$46\frac{6}{11}$ Unc.
	ſecundi	$58\frac{2}{11}$
	tertii	$23\frac{3}{11}$
Pondus mixti		128 Unc. = 8 lib.

SCHOLION XI.

316. *Subinde compendiis locus datur, quæ* Practicæ Italicæ *nomen ferunt. Ex iis utiliſſima commemoramus. Nimirum quoniam per Regulam trium ad tres numeros datos invenitur quartus proportionalis* (§. 302), *primus & ſecundus* (§. 181) *vel etiam primus & tertius* (§. 183) *per eundem, ſi fieri poteſt, numerum exacte dividantur, & quoti in ipſorum loca ſurrogentur: ceu ex ſubſequente appareat exemplo.*

Pre-

Pretium 3 Lib. *est* 9 Thal. *quantum* 7 libr.
3) 1 3 3

Fac. 21 Thal.

Pretium 14 Lib. *est* 26 Thal. *quant.* 7 libr.
7) 2 2) 1

Fac. 13 Thal.

SCHOLION XII.

317. *Si numerus primus vel tertius fuerit 1 & alter eorum non nimis magnus, medius autem heterogeneus, absque reductione in* Schol. 5 (§. 310) *praescripta calculus initur; ut sequens exemplum docet.*

Pret. 1 Lib. *est* 3 th. 8 gr. 6 num. *quant.* 5 L.
5

16 th. 18 gr. 6 num.

Manifestum scilicet est, bis 6 nummos conficere grossum unum, adeoque quinquies 6, grossos 2 & nummos 6. Similiter ter 8 grossi thalerum 1, & insuper bis 8 grossos 16 efficiunt. Quod si ergo thalerus iste 15 reliquis, & 2 priores grossi 16 reliquis addantur, prodibit pretium quaesitum 16 th. 18 gr. 6 num.

SCHOLION XIII.

318. *Si terminus primus vel secundus fuerit 1, & in priore casu secundus aut tertius, in posteriore primus in factores resolvi potest; integram saepe operationem sine scriptionis subsidio mens absolvit: id quod exempla, quae sequuntur, docent.*

Pretium 1 libr. *est* 24 th. *quantum* 20 libr.
4 4
6

80
6

Fac. 480 th.

Pretium 12 libr. *est* 18 th. *quantum* 1 libr.
3 2
4 ~~18~~(~~6~~(1½ th.
~~3~~ *

Potest etiam numerus datus resolvi partim in factores, partim in partes componentes. Ex. gr. 1 libra constat 9 grossis, quodnam est pretium 35 librarum?

Quoniam	*1 libra*	*constat*	*9 grossis*
constabunt	*3 lib.*	*1 thal.*	*3 gr.*
	30 lib.	*11 thal.*	*6 gr.*
	5 lib.	*1 thal.*	*21 gr.*
	35 lib.	*13 thal.*	*9 gr.*

Hic nempe numerus 35, per quem multiplicatio fieri debet, resolvitur in partes 30 & 5, pars vero altera 30 in factores 3 & 10.

SCHOLION XIV.

319. *Si numerorum datorum unus fuerit 1, multa compendia similia multiplicatio & divisio, sine Abaci* Pythagorici *subsidio peragenda (§. 116, 120), suppeditat. Ex. gr. pretium 9 librarum est 20 thalerorum, quantum est pretium unius? Statim hic apparet, haberi pretium desideratum, si parti decimae illius, id est 2 thaleris, addatur pars nona hujus decimae, id est, $\frac{2}{9}$ unius thaleri, ut adeo inveniatur $2\frac{2}{9}$ thal. Item: Pretium 5 librarum est 54 thalerorum, quantum erit pretium 1 librae? R. Quoniam pretium quaesitum est quinta pars dati, duplum partis decimae pretii dati $10\frac{4}{5}$ thal. erit quaesitum. Item: Pretium 1 librae est 18 grossorum, quantum erit librarum 19? R. Quoniam 19=20−1, a duplo pretii dati cyphra aucti (360) subducatur simplum (18), residuum erit pretium (342 grossorum) quaesitum.*

SCHOLION XV.

320. *Si duo termini ejusdem denominationis unitate differant, singulari quodam compendio utimur, quod ex subjunctis exemplis manifestum. Ex. gr. Pretium 5 librarum est 30 thalerorum, quantum erit 4 librarum? R. Quoniam pretium 4 librarum una parte quinta deficere debet a pretio 5 librarum; pretium datum 30 dividatur per 5 &*

5 *& quotus 6 ab eodem subtrahatur, relinquitur quæsitum 24. Item: pretium 8 librarum est 24 thalerorum, quantum erit librarum 9? R. Quia pretium 9 librarum una parte octava excedit pretium 8 librarum, pretium datum 24 dividatur per 8 & quotus 3 eidem addatur, summa 27 erit quæsitum.*

SCHOLION XVI.

321. *Nonnunquam compendiis pluribus una uti datur.* Ex. gr.

Pret. 100 libr. *est* 30 th. 4 gr. *quant.* 50 lib.
50) 2 2) — 1
Fac. 15 th. 2 gr.

It. Pret. 60 libr. *est* 80 th. *quant.* 2520 lib.
60) 1 6 42
480 6
7 7
Fac. 3360 thal.

CAPUT VII.

De Quantitatibus Æquidifferentibus.

DEFINITIO LXI.

322. Si in serie trium quantitatum eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ secundæ ac tertiæ; eas *continue Æquidifferentes* voco. Si vero in serie quatuor eadem fuerit differentia primæ & secundæ, quæ tertiæ ac quartæ, *discretim Æquidifferentes* appello. Ita 3, 6, 7 & 10 sunt numeri discretim æquidifferentes: 3, 6, & 9 numeri continue æquidifferentes.

SCHOLION.

323. *Dicuntur hæ quantitates vulgo* arithmetice proportionales, (*& vere proportionales, de quibus ante*, geometrice proportionales *appellari solent, ut ab iis distinguantur:) sed minus proprie, nec ad mentem Veterum.*

COROLLARIUM I.

324. Si termini semper crescunt, in continue æquidifferentibus terminus secundus est aggregatum ex primo & differentia; tertius summa ex secundo & differentia: si decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; secundum aggregatum ex tertio & differentia (§. 106).

COROLLARIUM II.

325. Similiter in discretim æquidifferentibus si termini crescunt, secundus est aggregatum ex primo & differentia; quartus ex tertio & differentia: si vero decrescunt, primus est aggregatum ex secundo & differentia; tertius ex quarto & differentia (§. 106).

THEOREMA LXI.

326. *Si fuerint tres quantitates continue æquidifferentes; summa primi & tertii est medii dupla.*

DEMONSTRATIO.

4. 7 10
7 4
14=14

Si enim termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, tertius ex secundo & differentia (§. 324), adeoque ex primo

mo & differentia dupla. Quare si tertio addatur primus; summa primi & tertii constabit ex primo duplo & differentia dupla Erit adeo secundi dupla. *Q.e.d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si termini decrescunt.

SCHOLION.

327. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

II = I + D
III = II + D

Ergo III = I + 2D
Hinc III + I = 2I + 2D = 2II.

THEOREMA LXII.

328. *Si fuerint quatuor quantitates æquidifferentes; summa primi & quarti æqualis est summæ secundi & tertii.*

DEMONSTRATIO.

3−5=8−10	
8 3	
13 = 13	

Si termini crescunt, secundus componitur ex primo & differentia, quartus ex tertio & differentia (§. 325). Quare si primus quarto addatur, aggregatum ex primo, tertio & differentia constat: Si vero secundum tertio addas, aggregatum ex primo, differentia & tertio componitur. Sunt ergo aggregata inter se æqualia (§. 88). *Q. e. d.*

Eodem modo demonstratio procedit, si consequentes termini fuerint antecedentibus minores.

SCHOLION.

329. *Si terminus primus sit I, secundus II, tertius III, quartus IV, differentia D; demonstratio ocularis erit istiusmodi:*

II = I + D   IV = III + D
III   III   I   I
II + III = III + I + D   IV + I = I + III + D

PROBLEMA XXXIV.

330. *Inter duos numeros* 9 *&* 13 *medium æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Addantur numeri dati 9 & 13.
2. Summa 22 dividatur bifariam sive per 2.

Quotus 11 erit numerus quæsitus (§. 326).

PROBLEMA XXXV.

331. *Datis tribus numeris* 8, 5, 9, *quartum æquidifferentem invenire.*

RESOLUTIO.

1. Numerus secundus 5 addatur tertio 9.
2. A summa 14 subtrahatur primus 8.

Residuus 6 est quartus quæsitus. (§. 328).

CAPUT VIII.

De Logarithmis.

DEFINITIO LXII.

332. Series quantitatum juxta eandem rationem crescentium vel decrescentium vocatur *Progressio geometrica*. Ex. gr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128; vel 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

DEFINITIO LXIII.

333. Series quantitatum secundum eandem differentiam crescentium vel decrescentium dicitur *Progressio arithmetica*. Ex. gr. 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, vel 32, 28, 24, 20, 16, 12, 8, 4.

DEFINITIO LXIV.

334. Si numeris in ratione geometrica progredientibus subscribantur totidem alii æquidifferentes; dicuntur hi illorum *Logarithmi*: STIFELIUS in *Arithmetica* sua (*a*) *Exponentes* vocat. Ex. gr. sint duæ progressiones:
Geom. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512.
Arith. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
erit 0 logarithmus termini primi 1; 5 logarithmus sexti 32; 7 logarithmus octavi 128; &c.

COROLLARIUM I.

335. Si progressio arithmetica fuerit series numerorum naturalium & a cyphra incipiat, ut in exemplo allato; logarithmi designant distantias numerorum proportionalium ab unitate.

(*a*) Lib. 3. c. 5. p. 249. b.

COROLLARIUM II.

336. Cumque in progressione geometrica ab unitate incipiente termini sint dignitates ordine naturali se mutuo excipientes (§. 250, 332); si progressio arithmetica eadem sit, quæ in exemplo allato, logarithmi sunt exponentes dignitatum (§. 251). Ex. gr. 2 est dignitas prima, ejusque exponens 1; 64 dignitas sexta, ejusque exponens 6.

THEOREMA LXIII.

337. *Si logarithmus unitatis sit 0; erit logarithmus facti æqualis aggregato ex logarithmis efficientium.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut unitas ad factorem unum, ita factor alter ad factum (§. 66). Quare logarithmus facti est æquidifferentium quartus ad logarithmum unitatis & logarithmos efficientium (§. 334); adeoque differentia inter logarithmum unitatis & summam logarithmorum efficientium (§. 332). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo summa ex logarithmis efficientium est logarithmus facti. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

338. Cum factores quadrati sint inter se æquales, hoc est, Quadratum sit factum ex Radice in seipsam (§. 246); logarithmus Quadrati est duplus logarithmi Radicis.

COROL-

COROLLARIUM II.

339. Eodem modo patet, logarithmum Cubi esse triplum (§. 248); Biquadrati quadruplum; Potentiæ quintæ quintuplum; sextæ sextuplum &c. logarithmi Radicis (§. 250).

COROLLARIUM III.

340. Est ergo unitas ad exponentem dignitatis, ut logarithmus Radicis ad logarithmum Potentiæ, seu ipsius Dignitatis (§. 251, 255).

COROLLARIUM IV.

341. Quare logarithmus Potentiæ prodit, si logarithmum Radicis multiplices per exponentem ejus (§. 65); adeoque logarithmus Radicis habetur, si logarithmus Dignitatis per ejus exponentem dividatur (§. 210).

SCHOLION.

342. *Ex. gr. 3 summa logarithmorum 1 & 2 est logarithmus producti 8 ex 2 in 4. Similiter 7 summa logarithmorum 2 & 5 est logarithmus producti 128 ex 4 in 32. Porro 3 logarithmus Radicis Quadratæ 8 est dimidius logarithmi 6 Quadrati 64, & 2 logarithmus Radicis Cubicæ 4 est subtriplus logarithmi 6 Cubi 64.*

THEOREMA LXIV.

343. *Si logarithmus unitatis est 0; erit logarithmus quoti æqualis differentiæ logarithmorum divisoris & dividendi.*

DEMONSTRATIO.

Est enim ut divisor ad dividendum ita unitas ad quotum (§. 69). Quare logarithmus quoti est æquidifferentium quartus ad logarithmos divisoris & dividendi atque logarithmum unitatis (§. 334), adeoque differentia inter logarithmum divisoris & summam logarithmorum dividendi & unitatis (§. 331). Sed logarithmus unitatis est 0, *per hypoth.* Ergo differentia logarithmi divisoris a logarithmo dividendi est logarithmus quoti. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

344. *Ex. gr. 2 differentia inter 7 & 5 est logarithmus quoti 4 ex 128 per 32. Similiter 5 differentia inter 8 & 3 est logarithmus quoti 32 ex 256 per 8.*

SCHOLION II.

345. *Progressiones arithmeticas cum geometricis confert, logarithmorum proprietates hactenus recensitas recenset, atque varios eorum usus monstrat* STIFELIUS (a): *qui tamen longe cedunt usui logarithmorum in Trigonometria a* Justo BYRGIO *primum reperto* (b), *sed a* Johanne NEPERO *supra laudato primum ostenso* (c).

PROBLEMA XXXVI.

346. *Numeri cujuscunque logarithmum invenire, ac Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus construere.*

RESOLUTIO.

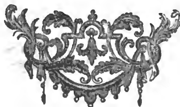
1. Quoniam 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. progressionem geometricam constituunt (§. 332); eorum logarithmi arbitrario assumi possunt, modo sint numeri in progressione arithmetica progredientes (§. 334). Ut igitur intermediorum logarithmos per fractiones decimales exprimere liceat; assumantur
0. 00000000, 1. 00000000,
2. 00000000, 3. 00000000,
4. 00000000 &c.

L 2 2. Equi-

(a) In *Arithmet.* lib. 1. c. 4. p. 35. & seqq. & lib. 3. c. 5. p. 249. b. & 50. (b) KEPLERUS in *Tabulis Rudolphinis* c. 3. f. 11. (c) In *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptione.*

2. Equidem manifestum est, (§. 334) numerorum, qui in scala progressionis geometricæ non continentur, logarithmos accuratos haberi non posse; adeo tamen veris propinquos repetire licet, ut, si usum spectes, accuratis æquipolleant. Quod ut appareat, ponamus inveniendum esse logarithmum novenarii seu *9*. Inter 1.0000000(A)& 10.0000000 (B) quæratur medius proportionalis C (§. 301) & inter eorum logarithmos 0. 00000000 atque 1.00000000 medius æquidifferens (§. 330), qui erit logarithmus ipsius C (§. 334), hoc est numeri ternarium superantis $\frac{1622777}{10000000}$, adeoque a novenario multum distantis. Quæratur inter B & C alius medius proportionalis D, qui ad novenarium propius accedit, & inter B & D adhuc alius E, & ita porro alii inter numeros novenario proxime majores & minores, donec tandem reperiatur *9*. 0000000, hoc est, $9\frac{0000000}{10000000}$ (§. 305): qui cum a novenario ne unica quidem particula millionesima differat; ejus logarithmus citra errandi periculum pro logarithmo novenarii habetur. Error enim semper minor esse debet unica millionesima. Quærantur itaque in quolibet casu logarithmi mediorum proportionalium, & ita habebitur tandem logarithmus novenarii prope verus 0.*95424251*.

3. Si eodem modo inter A & C numeros medios proportionales quæras, & convenientes logarithmos singulis assignes, invenietur tandem logarithmus numeri 2, & ita porro.



CALCULI

CALCULI TYPUS.

	Numeri medii proportionales.	Logarithmi.		Numerii medii proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000	O	9.0021388	0.95434570
C	3.1622777	0.50000000	Q	9.0008737	0.95428467
B	10.0000000	1.00000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	Q	9.0008737	0.95428467
D	5.6234132	0.75000000	R	9 0002412	0.95425415
C	3.1622777	0.50000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95421689
D	5.6234132	0.75000000	P	8.9996088	0.95422363
B	10.0000000	1.00000000	R	9.0002412	0.95425415
F	8.6596432	0.93750000	T	9.0000831	0.95424652
E	7.4989421	0.87500000	S	8.9999250	0.95423889
B	10.0000000	1.00000000	T	9.0000831	0.95424652
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
F	8.6596432	0.93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
H	8.9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
F	8.6596432	0 93750000	S	8.9999250	0.95423889
G	9.3057204	0.96875000	V	9.0000041	0.95424271
I	6.1398170	0.96093750	Y	8.9999845	0.95424217
H	8 9768713	0.95312500	X	8.9999650	0.95424080
I	9.1398170	0.96093750	V	9.0000041	0.95424271
K	9 0579777	0.95703125	Z:	8.9999943	0.95424223
H	8.9768713	0.95312500	Y	8.9999845	0.95424217
K	9.0579777	0.95703125	V	9.0000041	0.95424271
L	9.0173333	0.95507812	a	8.9999992	0.95424247
H	8.9768713	0.95312500	Z	8.9999943	0.95424223
L	9.0173333	0.95507812	V	9.0000041	0.95424271
M	8.9970796	0.95410156	b	9.0000016	0.95424259
H	8.9768713	0.95312500	a	8.9999992	0.95424247
L	9.0173333	0.95507812	b	9.0000016	0.95424259
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
M	8.9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
N	9.0072008	0.95458984	c	9.0000004	0.95424253
O	9.0021388	0.95434570	d	8.9999998	0.95424250
M	8 9970796	0.95410156	a	8.9999992	0.95424247
O	9.0021388	0.95434570	c	9.0000004	0.95424253
P	8.9996088	0.95422363	e	9.0000000	0.95424251
M	8.9970796	0.95410156	d	8.9999998	0.95424250

4. Enim vero non opus eſt, ut omnium numerorum logarithmi tanto labore inveſtigentur: compoſiti enim cum per alios numeros dividi poſſint (§. 76), adeoque & ex aliis ſe mutuo multiplicantibus (§. 212) oriantur, eorum logarithmi, *per Theor. 63 & 64* (§. 337 *& ſeqq.*) inveniuntur. Ex. gr. ſi logarithmus numeri 9 biſecetur, prodit logarithmus 0.47712125 numeri 3 (§. 338).

COROLLARIUM.

347. Characteriſtica igitur logarithmorum pro numeris ab 1 ad 10, eſt 0; pro numeris a 10 ad 100, eſt 1; pro numeris a 100 ad 1000, eſt 2; &c.

SCHOLION.

348. *Canonem logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 uſque ad 20000, & a 90000 ad 100000, primus conſtruxit* Henricus BRIGGIUS, *Profeſſor Geometriæ Savilianus in Academia Oxonienſi, ex conſilio tamen primi inventoris* NEPERI (a), *& methodum conſtruendi una expoſuit in ſua* Arithmetica Logarithmica. *Lacunam inter* 20000 *&* 90000 *mox explevit* Adrianus VLACCUS (b). *In libellis vulgaribus habetur tantum Canon logarithmorum pro numeris ab 1 uſque ad 10000.*

PROBLEMA XXXVII.

349. *Invenire logarithmum pro numeris majoribus, quam in Canone continentur, minoribus tamen* 10000000.

RESOLUTIO.

1. Reſecentur 4 notæ ad ſiniſtram numeri dati, & earum ex Canone excerpatur logarithmus.
2. Characteriſticæ tot addantur unitates, quot notæ ad dextram reſiduæ (§. 347).

(a) Vide præfat. ad *Arithmeticam Logarithm.*
(b) In altera editione *Arithmetica Logarithmica* BRIGGII.

3. Logarithmus inventus ſubtrahatur a proxime ſequente in Canone.
4. Inferatur: ut differentia numerorum in Canone evolutorum, ad differentiam tabularem logarithmorum ipſis reſpondentium; ita notæ reſiduæ numeri dati, ad differentiam logarithmicam, *per Probl. 33* (§. 302) inveniendam: quæ ſi
5. Addatur logarithmo *per n. 1 & 2* invento; ſumma erit logarithmus quæſitus.

Ex. gr. quæritur logarithmus numeri 92375. Reſeca quatuor notas 9237 & characteriſticam 3 logarithmi iis in tabulis minoribus reſpondentis 3. 9655309 auge unitate. Hinc
e logarith. numeri 9238 = 3. 9655780
ſubduc. log. num. 9237 = 3. 9655309

relinquitur differ. tabul. - - 471
Inferatur: 10 — 471 — 5
5) 2 — 1 (§. 316).
235

Jam logarithmo 4. 9655309
addatur different. inventa 235

Summa eſt logar. quæſ. 4.9655544

SCHOLION.

350. *Differentiæ equidem logarithmorum non ſunt differentiis numerorum proportionales: ad praxin tamen, ubi in minimis ſcrupuloſi non ſumus, methodus tradita ſufficit, ſi præſertim notæ reſiduæ numeri dati non fuerint adeo multæ. Certe in noſtro caſu adeo exactum reperimus, ut accuratior in Tabulis majoribus* BRIGGII *non occurrat.*

PROBLEMA XXXVIII.

351. *Invenire logarithmum fractionis, cujus numerator minor denominatore.*

RESO-

RESOLUTIO.

1. Logarithmus numeratoris ſubtrahatur a logarithmo denominatoris.
2. Reſiduo præfigatur ſignum ſubtractionis —.

Ex. gr. Quærendus eſt logarithmus fractionis $\frac{3}{7}$.

Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus 3 = 0.4771213
Logarithmus $\frac{3}{7}$ = —0.3679767

DEMONSTRATIO.

Cum fractio ſit quotus, ex diviſione numeratoris per denominatorem emergens (§. 238); logarithmus ejus eſt differentia logarithmorum numeratoris ac denominatoris (§. 343); adeoque ſi numerator minor denominatore, major logarithmus e minore ſubtrahendus, quo in caſu differentia evadit negativa (§. 105). *Q. e. d.*

SCHOLION.

352. *Logarithmum fractionis propriæ eſſe negativum, ſi unitatis ſit* 0, *jam notavit* STIFELIUS (a), *& mirum non eſt. Fractio enim minor unitate* (§. 221). *Sed unitatis logarithmus eſt* 0 (§. 346). *Ergo fractionis logarithmus eſt nihilo minor.*

COROLLARIUM I.

353. Cum in fractione ſpuria $\frac{9}{5}$ numerator ſit major denominatore; ejus logarithmus habetur, ſi logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris ſubtrahitur (§. 238, 343).

Logarithmus 9 = 0.9542425
Logarithmus 5 = 0.6989700
Logarithmus $\frac{9}{5}$ = 0.2552725

COROLLARIUM II.

354. Quoniam integra cum adhærente fractione $3\frac{2}{7}$ ad fractionem ſpuriam $\frac{23}{7}$ reduci poſſunt (§. 224); eodem modo invenietur eorum logarithmus.

Logarithmus 23 = 1.3617278
Logarithmus 7 = 0.8450980
Logarithmus $3\frac{2}{7}$ = 0.5166289

PROBLEMA XXXIX.

355. *Invenire numerum logarithmo reſpondentem, qui in Tabulis accuratus non occurrit.*

RESOLUTIO.

I. Si numerus, cui convenit logarithmus, inter 1000 & 10000 cadit, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 3 (§. 347);

1. Logarithmus proxime minor dato ſubtrahatur a proxime majore, itidemque a logarithmo dato.
2. Inferatur: ut differentia prior ad 100, ita ſecunda ad partes centeſimas *per Probl.* 33 (§. 302) inveniendas & numero, qui logarithmo proxime minori in Tabulis reſpondet, addendas, ut habeatur numerus prope verus, cui logarithmus datus convenit.

Ex. gr. Quæratur numerus reſpondens Logarithmo 3.7589982

Logarithmus proxime major 3.7590632
——————— minor 3.7589875
Differentia prima 757
Logarithmus datus 3.7589982
— proxime minor. 3.7589875
Differentia ſecunda 107

757 — 100 — 107   107.00 (14
                100   757
             10700   313.0
                          3028
                          102

Cum numerus logarithmo minori conveniens ſit 5741; quæſitus erit $5741\frac{14}{100}$.

II. Si numerus, cui convenit logarithmus datus, inter 1 & 1000 locum reperiat, hoc eſt, ſi characteriſtica fuerit 0, 1, vel 2 (§. 347); characteriſtica mutatur

(a) In *Arithmet. integra*, lib. 3. c. 5. p. 249. b.

tatur in 3, & logarithmus quæritur inter 1000 & 10000: qui enim ibi eidem respondet numerus, tot fractiones decimales adjunctas habet, quot characteristicæ unitates accessere (§. 346).

Ex. gr. Quæratur numerus logarithmo 1.9201662 conveniens. Cum in Tabulis proxime minori respondeat numerus 83; logarithmus idem evolvitur sub characteristica 3 post 8300, ubi proxime minori respondet numerus 8321. Est itaque quæsitus $83\frac{21}{100}$. Quodsi fractionibus his non fueris contentus per casum primum minores istis inveniri possunt.

PROBLEMA XL.

356. *Invenire numerum convenientem logarithmo majori iis qui in Tabulis continentur.*

RESOLUTIO.

1. A logarithmo dato subtrahatur logarithmus numeri 10, vel 100, vel 1000, vel 10000, donec relinquatur logarithmus ultimo Tabulæ minor.
2. Quæratur numerus ei respondens (§. 355) &
3. Multiplicetur per 10, vel 100, vel 1000, vel 10000.

Factum est numerus quæsitus (§ 346).

Ex. gr. Quærendus est numerus logarithmi 7.7589982. Subtrahatur logarithmus numeri 10000, qui est 4.0000000, ut relinquatur 3.7589982, cui respondens numerus $5741\frac{11}{100}$ ducatur in 10000 factum 57411100 erit numerus quæsitus.

SCHOLION.

357. *Facile apparet, subtrahi posse logarithmum numeri cujuscunque in Tabula occurrentem, modo per eundem numerum multiplicetur, qui logarithmo residuo respondet. Sed operatio tædiosa evadit.*

PROBLEMA XLI.

358. *Invenire numerum dato logarithmo defectivo respondentem.*

RESOLUTIO.

1. Dato logarithmo defectivo addatur logarithmus ultimus Tabulæ, sive numeri 10000, hoc est, ille ab hoc subtrahatur.
2. Logarithmo residuo conveniens numerus quæratur (§. 355).

Dico, hunc esse numeratorem fractionis, cujus denominator est 10000.

Ex. gr. Quæratur fractio respondens Logar. defectivo —0. 3679767. Hic ex 4.0000000 subd.

relinquit 3.6320233, cui convenit numerus $4285\frac{71}{100}$. Est ergo fractio quæsita $\frac{428571}{1000000}$.

DEMONSTRATIO.

Cum fractio sit quotus ex divisione numeratoris per denominatorem emergens (§. 138); erit unitas ad fractionem ut denominator ad numeratorem (§. 69). Sed ut unitas ad fractionem dato logarithmo defectivo respondentem, ita 10000 ad numerum logarithmo residuo convenientem (§. 337, 66). Ergo si 10000 sumatur pro denominatore, erit numerus iste numerator fractionis quæsitæ (§. 305). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

359. *Datis tribus numeris invenire quartum proportionalem.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus secundi addatur logarithmo tertii.
2. Ab aggregato subtrahatur logarithmus primi.

Residuus est logarithmus quarti quæsiti (§. 302, 337, 343). Ex.

Ex. gr. Sint numeri dati 4, 68 & 3.

Logarith. 68 = 1.8325089
Logarith. 3 = 0.4771213

Aggregatum = 2.3096302
Logarithm. 4 = 0.6020600

Logarith. quæs. 1.7075702,
cui in Tabulis respondet numerus 51.

SCHOLION.

360. *Problematis hujus usus præstantissimus in Trigonometria elucet: cujus gratia pro numeris etiam naturalibus quæsiti sunt a* BRIGGIO *&* VLACCO *logarithmi, cum* NEPERUS *tantum Canonem, utut diversæ indolis, logarithmorum pro sinibus & tangentibus construxisset. Tyrones igitur hanc de logarithmis doctrinam tantisper seponant, donec ad Trigonometriam pedem promoverint.*

CAPUT IX.

De Fractionibus Decimalibus.

DEFINITIO LXV.

361. *Fractio decimalis* est, cujus denominator est *articulus* quidam *primarius* 10, 100, 1000, 10000 &c. (§. 305).

COROLLARIUM I.

362. Progrediuntur adeo denominatores in ratione decupla.

SCHOLION I.

363. Ex. gr. *Si fuerit fractio decimalis* $\frac{342857}{100000}$, *eadem æquivalet huic seriei:* $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$, *cujus denominatores* 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 *in ratione decupla progrediuntur.*

COROLLARIUM II.

364. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, sunt 0, 1, 2, 3, 4, 5 (§. 346); si fractiones decimales sub forma numerorum integrorum scribantur, veluti in nostro casu loco $\frac{342857}{100000}$ aut $\frac{3}{1}+\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{7}{100000}$ scribatur 3. 42857 (§. 306), loco denominatorum numeratoribus solitarie positis opportune tanquam *apices* adjiciuntur logarithmi. Ita loco fractionis $\frac{342857}{100000}$ scribimus $3^{0}.\ 4^{\prime}\ 2^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}\ 5^{IV}\ 7^{V}$.

COROLLARIUM III.

365. Quoniam apices, qui sunt logarithmi denominatorum fractionum decimalium, in serie numerorum naturalium progrediuntur; sufficit notæ ultimæ adjici apicem convenientem, ceteris omissis, veluti in nostro casu $3.\ 42857^{V}$.

COROLLARIUM IV.

366. Cum logarithmus fractionis inveniatur, si logarithmus denominatoris a logarithmo numeratoris subtrahitur (§. 351), denominator autem fractionis decimalis sit articulus primarius (§. 361), adeoque ejus logarithmus præter characteristicam nonnisi meris cyphris constet (§. 346): a characteristica logarithmi numeratoris fractionis decimalis nonnisi characteristica logarithmi denominatoris subtrahenda, ut habeatur logarithmus fractionis decimalis.

SCHOLION II.

367. *Ex. gr. Si fractio decimalis fuerit* 8. 735; *logarithmus numeratoris* 8735 *est* 3. 9412629, *denominatoris* 1000 *vero* 3. 0000000, *adeoque logarithmus fractionis decimalis datæ* 0. 9412629. *Si fractio decimalis fuerit* 0. 324; *logarithmus numeratoris est* 2. 5105456, *denominatoris* 1000 *vero* 3. 0000000; *consequenter logarithmus fractionis decimalis* — 1. 5105456. *Iidem ergo*

sunt logarithmi fractionum decimalium, qui numerorum integrorum, nisi quod characteristica differant.

COROLLARIUM V.

368. Quia characteristica logarithmi denominatoris fractionis decimalis eadem est cum apice ultimæ notæ (§. 364); logarithmus fractionis decimalis prodit, si a logarithmi numeratoris characteristica apex ultimæ notæ subducitur (§. 366).

SCHOLION III.

369. *Ex. gr. In fractione decimali* 8.735''' *apex ultimæ notæ est* 3; *a logarithmi igitur numeri* 8735, *qui est*, 3. 9412629, *characteristica* 3 *subducitur ternarius, ut prodeat logarithmus fractionis decimalis* 0. 9412629. *Apex iste tot continet unitates, quot denominator habet cyphras, seu quot a puncto sequuntur notæ: unde patet, si nullus adscriptus fuerit apex, tot unitates a characteristica numeratoris subduci, quot denominator cyphras habet, seu quot notæ punctum sequuntur.*

DEFINITIO LXVI.

370. *Fractio decimalis exacta est*, quæ veram exhibet rationem partis, quam designat, ad totum.

Ex. gr. 0. 8 $=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$ exprimit rationem partis 4 ad totum 5 veram, cum sit 8 : 10 = 4 : 5 (§. 181).

DEFINITIO LXVII.

371. *Fractio decimalis approximans* est, quæ rationem partis, quam designat, ad totum exhibet prope veram; nempe vel vera minorem, vel majorem; defectu tamen vel excessu infra unitatem notæ ultimæ convenientem existente.

Ex. gr. $\frac{3}{7} >$ 0. 42857, sed $<$ 0. 42858. Exprimit adeo fractio approximans $\frac{42857}{100000}$ rationem nonnisi prope veram, defectu scilicet existente minore quam $\frac{1}{100000}$.

DEFINITIO LXVIII.

372. *Notæ* fractionum decimalium *ejusdem ordinis* dicuntur, quarum iidem sunt denominatores vel apices.

Ex. gr. Si duæ fuerint fractiones decimales 0. 42857 & 0. 0047, notæ 8 & 4 ejusdem ordinis sunt, quoniam utrique respondens denominator est 1000 vel apex ''': nam 8 designat $\frac{8}{1000}$ & 4 denotat $\frac{4}{1000}$.

PROBLEMA XLIII.

373. *Fractiones decimales addere, vel a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam fractiones decimales, perinde ac numeri integri, constant ex notis, quarum unitates in ratione decupla progrediuntur (§. 364); notis ejusdem ordinis sub se invicem scriptis, additio & subtractio eodem modo peragitur ac in numeris vulgaribus (§. 98, 103) nisi quod in approximantibus locus ultimus sit incertus (§. 371).

Vide exempla

I. Additionis:

3. 50782	0. 0638
0. 0003	0. 00562
51. 247	7. 138
54. 75512	7. 20742

II. Subtractionis.

2. 7864	0. 95436
0. 158	0. 08512
2. 6284	0. 86924

PROBLEMA XLIV.

374. *Fractiones decimales per se invicem multiplicare.*

RESO-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), multiplicatio peragitur ut in integris (§. 111); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex facti notarum in se invicem ductarum inveniatur, si earum apices addantur (§. 337).

Ex. gr. Si multiplicanda fuerit fractio decimalis $\frac{42857}{100000}$ per $\frac{47}{10000}$ hoc est, 0.42857 per 0. 0047 multiplicatio peragitur communi more ducendo 42857 primum in 7, & deinde in 4, sive 40. Quoniam vero apex ultimus multiplicandi est 5 & multiplicatoris 4; summa 9 dat apicem ultimum producti: unde apparet a sinistris adjiciendas esse tres cyphras, quarum prima puncto notata designat locum integrorum.

```
  0.42857
  0.0047
 ---------
   299999
  171428
 ---------
0.002014279
```

COROLLARIUM I.

375. Quodsi factor unus fuerit fractio decimalis approximans, cum fieri possit, ut multiplum notæ deficientis, quæ ultimam *6* proxime sequitur, sit novenario major, consequenter multiplum notæ ultimæ *6* inde augeatur (§. 111); in facto numerus locorum, in quibus notæ sunt incertæ, numerum notarum in factore exacto unitate superat, veluti in nostro exemplo notæ tres ultimæ 584 sunt incertæ, adeoque factum sumitur 0. 801.

```
  2.3576+
     0.34
 --------
   94304
  70728
 --------
 0.801584
```

COROLLARIUM II.

376. Si uterque factor fuerit approximans, eodem modo intelligitur, loca in facto incerta unitate excedere numerum notarum factoris longioris, veluti in adjecto exemplo, in quo numerus longior constat notis 5, loca incerta sunt numero *6*, adeoque nonnisi duæ notæ sinisteriores 11 certæ sunt. In exemplo anteriore si factor 0. 34 ponatur quoque approximans, nulla prorsus nota certa est.

```
  18.357
    6.34
 ---------
   73428
  55071
 110142
 ---------
 116.38338
```

COROLLARIUM III.

377. Quodsi nota deficiens, quæ proxime sequitur, ultimæ fuerit æqualis in multiplicando & multiplicator exactus; tum in multiplicatione apparet, quot unitatibus augeri debeat multiplum notæ dextimæ, ut nulla in facto nota incerta evadat. Ex. gr. in nostro exemplo, ubi nota deficiens est *6*, facto ex *6* in 8 adjiciuntur 4 & alteri ex *6* in *6* adduntur *3*.

```
  0.6666
     6.8
 -------
  53332
 39999
 -------
 453322
```

SCHOLION.

378. *Casus alios brevitatis gratia prætermittimus.*

PROBLEMA XLV.

379. *Fractionem decimalem per decimalem dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Si fractiones decimales ad formam numerorum integrorum reducantur (§. 306), divisio peragitur ut in numeris integris (§. 117); hoc unice notato, quod, quoniam apices sunt logarithmi denominatorum (§. 364), apex

apex quoti inveniatur, si apex divisoris ab apice dividendi subtrahatur (§. 343), & dividendo adjungantur cyphræ, si divisor major fuerit vel dividendum non metiatur.

Ex. gr. Si 0. 002014279 dividatur per 0. 0047, quotus est 0. 42857 (§. 374, 210). Nimirum 2014279 dividitur per 47, ut obtineatur quotus 42857. Jam cum notæ divisoris 4 conveniat apex 3, & notæ dividendi 0 apex 4, differentia 1 est apex notæ primæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a partibus decimis, ut omnia loca compleantur eidem præfigitur cyphra, cum nullum fractioni adhæreat integrum. Similiter si 0. 002014279 dividatur per 0. 42857, quotus est 0. 0047 (§. *cit.*). Nimirum 2014279 dividitur per 42857, ut obtineatur quotus 47. Jam cum notæ dividendi 0 conveniat apex 4 & notæ divisoris 4 apex 1, differentia 3 est apex notæ quoti 4. Cum adeo quotus incipiat a particulis millesimis (§. 364), eidem præfigendæ sunt cyphræ 3, ut habeatur fractio completa 0. 0047.

COROLLARIUM I.

380. Quodsi divisor fuerit fractio decimalis approximans, adeoque nota ultima vel justo major, vel minor (§. 371); factum ex divisore in quotum duabus ultimis notis deficere potest. Quare cum a notis dividendi vel justo plus, vel minus subtrahatur; ubi divisor ad easdem fuerit promotus, notæ quoti incertæ evadent. Ex. gr. Si dividendus fuerit 21. 3456 & divisor 3. 82 fractio approximans, nonnisi unica nota quoti 5 certa est.

COROLLARIUM II.

381. Si dividendus fuerit fractio decimalis approximans, divisor exactus; nonnisi notam quoti ultimam subinde incertam evadere posse patet.

COROLLARIUM III.

382. Si & divisor, & dividendus fuerint fractiones approximantes, evidens est porro in determinandis locis certis respiciendum esse vel dividendum, vel divisorem, prout divisoris, vel dividendi nota deficiens propior fuerit primæ divisoris notæ. Ex. gr. Si divisor sit 2. 5786, dividendus 3. 067, adeoque cyphris augendus, ut divisio fieri possit; evidens est certitudinem expirare in nota tertia dividendi 6, consequenter junctis duabus cyphris divisionem eo usque continuari, ut prodeat quotus certus 1. 1.

PROBLEMA XLV.

383. *Notas certas, in multiplicatione & divisione fractionum decimalium approximantium, accuratius determinare.*

RESOLUTIO.

Notæ factorum dextimæ sumantur nunc justo majores, nunc justo minores; in divisione nunc nota dextima in dividendo justo major, in divisore justo minor & contra: quæ in utraque multiplicatione ac divisione eædem proveniunt notæ, eæ sunt accuratæ.

Quodsi ergo in exemplo superiori multiplicationis, ubi notæ ultimæ factorum ponuntur justo minores, eorum loco sumantur 18. 358 & 6. 35; factum quod obtinetur 116. 57330 convenit cum superiori 116. 38338 quoad tres notas dextimas 116: eæ igitur solæ certæ sunt. Patet autem certam sic fieri notam tertiam 6, quæ per superiora in dubio relinquebatur (§. 376). Similiter si in exemplo divisionis superiori (§. 382) nunc 3. 068 dividas per 2. 5786, nunc 3. 067 per 2. 5787, quotus utrobi-

```
    18.358
      6.35
  --------
    91790
   55074
  110148
  --------
 116.57330
```

utrobique est 1. 1: unde patet, nonnisi duas istas notas certas esse, quas superius tales agnovimus.

SCHOLION.

384. *Ipsa praxis loquetur, nos subinde posse esse contentos, quod notas certas agnoscamus, quæ per superiora (§. 376, 382) tales deprehenduntur, ut adeo tædio repetitæ multiplicationis vel divisionis supersedere queamus.*

CAPUT X.

De Fractionibus Sexagesimalibus.

DEFINITIO LXIX.

385. FRactiones *sexagesimales* sunt, quarum denominatores crescunt in ratione sexagecupla. Dicuntur etiam *Minutiæ physicales.*

SCHOLION.

386. Ex. gr. *Si integrum sit* 1, *fractiones istiusmodi sunt* $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, $\frac{1}{216000}$ &c.

COROLLARIUM.

387. Quoniam logarithmi progressionis geometricæ 1, 60, 3600, 216000, 12960000, &c. sunt 0, 1, 2, 3, 4, &c. (§. 334); si fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum scribendæ, numeratoribus solitarie positis, perinde ac in fractionibus decimalibus, tanquam apices adjiciendi sunt logarithmi. Ex. gr. $\frac{3}{1} = 3^{0}$, $\frac{35}{60} = 35'$, $\frac{46}{3600} = 46''$ &c.

DEFINITIO LXX.

388. Pars sexagesima integri dicitur *Minutum* sive *scrupulum primum*; pars sexagesima minuti primi *Minutum* sive *scrupulum secundum*; pars sexagesima minuti secundi *Minutum* sive *scrupulum tertium*; & ita porro.

COROLLARIUM.

389. Scrupuli adeo primi apex, sive index, est 1, secundi 2, tertii 3, & ita porro (§. 387).

SCHOLION.

390. *Hac ratione fractiones reducuntur ad numeros integros, ut integrorum instar tractari queant.*

PROBLEMA XLVI.

391. *Fractiones sexagesimales addere.*

RESOLUTIO.

Additio eodem prorsus modo peragitur, quo numeri heterogenei in unam summam colliguntur (§. 99).

Ex. gr.	35^{0}	$46'$	$8''$	$15'''$
	17	20	15	40
		14	18	
	53	20	41	55

PROBLEMA XLVII.

392. *Fractiones sexagesimales a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

Subtrahuntur a se invicem eodem prorsus modo, quo numerorum heterogeneorum subtractio fieri solet (§. 104).

Ex. gr	28^{0}.	$15'$.	$4''$.	$20'''$
	17	29	18	45
	10	45	45	35

Nimirum unitas mutuo petita a specie majore hic valet 60. Ita $1'' = 60'''$, $1' = 60''$, $1^{0} = 60'$ (§. 388).

PROBLEMA XLVIII.

393. *Fractiones sexagesimales per sexagesimales multiplicare.*

RESOLUTIO.

Multiplicatio fractionum ſexageſimalium coincidit cum multiplicatione decimalium (§. 374), niſi quod ex ſpecie minore abjiciatur toties ſexagenarius, quoties fieri poteſt, & tot ſpeciei proxime majori addantur unitates, quoties ſexagenarius fuit abjectus (§. 388): id quod diviſio per 60 prodit (§. 223).

Ex. gr. Si multiplicandus 3° 15′ 38″, multiplicator 2° 18′ 47″. Duc ſingulas partes multiplicandi 1°. in 47, 2°. in 18, 3°. in 2; erit factum ex 38 in 47 = 1786 ſcr. quartis = 29‴ 46ⁱᵛ. Scribuntur adeo 46 pro ſpecie minima infra lineam cum ſuo apice & 29‴ reſervantur ſpeciei proxime ſequenti annumeranda. Cum igitur factum ex 47″ in 15′ = 705‴; additis 29 prodibunt 734‴ = 12″. 14‴. Scribuntur adeo 14 infra lineam & 12″ reſervantur facto proxime ſequenti ex 3° in 47″ addenda. Eodem modo ubi perrexeris, obtinebuntur tandem facta partialia, quæ in unam ſummam (§. 391) collecta exhibent factum quæſitum 7° 32′ 30″ 38‴ 46ⁱᵛ aut, ſi prope verum quæſiveris, 7° 32′ 31″, cum ſpecies proxime major dimidium illius ſuperet, aut 30 fuerit major. Vide exemplum:

		3°	15′	38″
		2	18	47
	2	33	14	46ⁱᵛ
	58	41	24	
6	31	16		
7°	32′	30″	38‴	46ⁱᵛ

SCHOLION.

394. *Ne tædia diviſionis devoranda ſint, conſtructus eſt* Canon hexacontadon, *qui facta in ſpecies reſoluta exhibet, veluti factum ex* 38 *in* 47 = 29. 46. *Ratio conſtructionis ex operatione in Problemate præcepta patet; modo notetur, perinde ac in Abaco* Pythagorico (§. 109), *factorum unum a latere, alterum in fronte Canonis deſcribi.*

PROBLEMA XLIX.

395. *Fractiones ſexageſimales per ſexageſimales dividere.*

RESOLUTIO.

Diviſio peragitur ut in fractionibus decimalibus; niſi quod in multiplicatione quoti per diviſorem tenenda ſint, quæ paulo ante in multiplicatione præcepimus (§. 393), &, ubi ſpecies dividendi prima fuerit minor ſpecie diviſoris prima, iſta reducenda ſit ad ſpeciem proxime minorem, & ſequenti addenda, ut diviſioni ſit locus.

Ex. gr. Si 7° 32′ 30″ 38‴ 46ⁱᵛ dividere jubeamur per 2° 18′ 47″; quære quoties 2 in 7 contineatur, & quoti loco ſcribe 3°. Duc 3° in 2° 18′ 47″ & factum 6° 56′ 21″ ſubtrahe ex 7° 32′ 30″, ut relinquatur 36′ 9″. Junge reſiduo ſpeciem ſequentem 38 & diviſionem eodem modo continua, donec ea tandem fuerit abſoluta; quemadmodum ex typo exempli liquet:

2° 18′)	7°	32′	30″	38‴	46ⁱᵛ	(3° 15′
47″	6	56	21	::	::	38″
		36	9	38	::	
		34	41	45	::	
		1	27	53	::	
		ſive	,87	53	46	
			87	53	46	
				0		

SCHOLION.

396. *Non abſimili modo algorithmus fractionum aliarum quarumcunque abſolvitur, quarum denominatores in ratione quacunque data progrediuntur, veluti in duodecupla, quæ olim in diviſione menſuræ linearum obtinuit.*

FINIS ARITHMETICÆ.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PRÆFATIO.

EREXIGUUS eſt eorum numerus, qui Geometriæ pretium ſuum ſtatuunt: notatione enim deluſi cum Arte agrimenſoria eam peſſime confundunt, nec ea animo ipſorum obverſatur idea, quam nomen tam auguſtum excitare debebat. Omnis nimirum cognitionis diſtinctæ fundamenta jacit Geometria cum Arithmetica, ita ut non minor in ſcientiis quam in artibus ejus ſit uſus. Equidem ob Problemata, quorum reſolutionem trado, nonniſi ad locorum diſtantias variorumque objectorum altitudines, agrorum & camporum areas, corporumque molem dimetiendum conducere videtur; contrarium tamen luce meridiana clarius elucebit, cum ad reliquas Matheſeos partes inferius applicabitur. Non hic repeto, quæ de vi Geometriæ in perficiendo intellectu jam ſuperius (*a*) dicta ſunt. Ne vero hoc fructu careret Geometriæ ſtudium, a rigore in demonſtrando recedendum minime fuit. Hinc definio, quæ vulgo definiri non ſolent, & paſſim demonſtro, quæ ſine probatione

(*a*) In Commentat. de Methodo §. 52, 53.

tione ad aliis assumuntur. Equidem haud difficulter prævideo, fore ut imperitis improbetur hic ausus; sed sufficit eum probari peritis, & quod majus est, methodum nostram præstare, ne extra Mathesin ratiocinaturi in scopulos incidamus, in quos plerumque omnes hactenus incidisse, supra etiam (*b*) annotavimus. EUCLIDES & ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus LEIBNITIUS similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in Geometria esse usum; ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in Geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo a me facillime demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ nonnisi per ambages demonstrari solent. Nec injucundum arbitror, quod figurarum constructiones inter principia demonstrandi nunc obtineant locum, quæ alias praxi tantum inserviebant. Placuit tamen in nova hac editione mea similitudinis notione uti, cum *Leibnitiana* clarior sit. Tyrones, definitionibus evolutis, neglecta demonstratione Problemata solvant. Hoc labore perfuncti ex Theorematum hypothesibus figuras construant, & demonstrationes empiricas superaddant, quarum in ipsa pertractatione fit mentio (*c*). Tandem eo ordine Elementa relegant, quo conscripta sunt. Qui vero mentis acie pollent, illamque diu possunt habere attentam, difficultates non sentient, etiamsi prima statim vice ad singula animum advertant,

(*b*) L. c. §. 52.
(*c*) In Schol. Theor. 7. §. 158.

ELEMENTA

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS PRIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ EXHIBET.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ.

DEFINITIO I.

1 *Geometria* est Scientia extensorum quatenus terminata sunt, hoc est, Linearum, Superficierum, & Solidorum.

SCHOLION.

2. *Quemadmodum extensio ex simultanea alicujus rei per locum diffusione oritur; ita in mente repræsentatur, dum multa in uno continuo simul percipimus. Hinc notio extensionis non modo totius ac partium notiones involvit* (§. 9 Arith.); *sed eadem in rerum aliarum notiones irrepit, quæ ideo per lineas, superficies, ac solida repræsentari possunt. Unde est, quod Geometria rebus plurimis applicari possit, ejusque adeo quam latissime pateat usus.*

DEFINITIO II.

3 *Congruere* dicuntur, quorum iidem termini esse possunt. Nempe *Congruentia* est coincidentia terminorum.

SCHOLION.

4. *Ne definitio negotium facessat, vitanda est vocis* termini *æquivocatio: id quod in sequentibus satis cavetur. A termini vero definitione consulto abstinemus, ne ad demonstrationes metaphysicas dilabamur.*

DEFINITIO III.

5. *Eundem situm habere* dicuntur, inter quæ idem extensum poni potest.

DEFINITIO IV.

6. *Punctum* est, quod quaquaversum seipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos.

COROLLARIUM I.

7. Ergo omne punctum alteri cuicunque congruit (§. 3).

COROLLARIUM II.

8. Nec ullas in eo distinguere licet partes.

SCHOLION.

9. *Hinc* EUCLIDES: Punctum est, *inquit*, cujus pars nulla est. *Nec sine ratione punctum*

punctum ut individuum concipiunt Geometræ, utut tale quid nec imaginari, nec pingere valeamus. In praxi enim ipsa geometrica summo cum studio cavendum, ne punctum pars lineæ habeatur, cujus terminus existit.

DEFINITIO V.

Tab. I. Fig. 1. 10. *Linea* describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B movetur.

COROLLARIUM I.

11. Termini igitur lineæ secundum longitudinem sunt puncta A & B; secundum latitudinem & profunditatem ipsa sui terminus est (§. *6*).

COROLLARIUM II.

12. Quoniam punctum partes nullas habet (§. 8); linea nec lata, nec profunda esse potest, sed in solam longitudinem extenditur.

SCHOLION I.

13. *Quid ergo mirum, quod secundum latitudinem & profunditatem non habeat terminos a se distinctos, vi Cor. 1.* (§. 11)?

SCHOLION II.

14. *Quamvis corpus omne tribus dimensionibus præditum sit, nec una a reliquis actu separari queat; necessarium tamen ac perutile est, ut unam absque reliquis consideremus. Necessitatem intellectus finitudo injungit, qui ad multa una diffundi nequit & hinc per abstractionem divellere tenetur, quæ nexu indivulso natura conjunxit. Utilitatem hujus abstractionis casus innumeri persuadent, in quibus unam dimensionem, neglectis ceteris, cognoscere jubemur; ex. gr. altitudinem turris sine latitudine ac profunditate ipsius, latitudinem fluminis sine longitudine ac profunditate ejusdem.*

DEFINITIO VI.

15. *Distantia* est linea brevissima inter duo.

SCHOLION.

16. *Ita ex. gr. distantia arboris a domo est linea brevissima, qua ab illa ad hanc duci potest.*

DEFINITIO VII.

17. *Linea recta* AB est, cujus pars quæcumque est toti similis. Tab. I. Fig. 1.

COROLLARIUM I.

18. Lineæ igitur rectæ non differunt nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

19. Cum lineæ describantur, si punctum ab uno puncto ad alterum movetur (§. 10); motus puncti describentis in omnibus lineæ partibus idem esse debet: secus enim, diversitate hujus motus, partes a se invicem distinguerentur, adeoque similes non forent (§. 24 *Arithm.*), contra definitionem (§. 17). Quoniam itaque motus puncti differre nequit nisi celeritate, ac directione; celeritas vero ad descriptionem rectæ nil confert; sola directionis habenda est ratio; consequenter recta describitur, si punctum ab uno puncto A ad alterum B eadem directione movetur.

POSTULATUM I.

20. *A quovis puncto A ad quodvis punctum B posse duci lineam rectam.*

POSTULATUM II.

21. *Lineam rectam terminatam AB utrinque produci posse.*

DEFINITIO VIII.

22. *Linea curva* est, cujus partes toti dissimiles.

DEFINITIO IX.

23. *Metiri* idem est ac quantitatem aliquam pro unitate assumere ac aliarum

rum homogenearum rationem ad candem exprimere. Quantitas, quæ pro unitate assumitur, *Mensura* dicitur.

SCHOLION.

24. *Hæc Definitio latior praxi respondet: strictius* EUCLIDES *mensuram definit per quantitatem, quæ aliquoties repetita alteri sit æqualis: quam nos, in Arithmetica, partem aliquotam diximus.*

DEFINITIO X.

25. Hinc *Mensura linearum* est linea recta arbitrariæ longitudinis, in partes minores pro lubitu dividenda & subdividenda. Dividitur autem hodie a Geometris in 10 partes æquales, qui *Pedes* vocantur: unde ipsa *Decempeda* appellatur. Pes subdividitur in 10 *Digitos*; digitus in 10 *Lineas*; & ita porro.

SCHOLION.

26. *Mensuræ longitudo & divisio non eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter* Willebrordum SNELLIUM *(a), exponunt* RICCIOLUS *(b),* MALLETUS *(c),* EISENSCHMIDIUS *(d), aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat Tabula sequens in particulis istiusmodi, qualium Pes regius Parisinus est* 1440. *Continet is nempe* 12 *digitos, digitus* 12 *lineolas, lineola* 10 *particulas, adeoque Pes integer particulas* 1440.

(a) In ERATOSTHENE *Batavo*, lib. 2. c. 1. usque ad 5. p. 121. & seqq.
(b) In *Geogr. Reform.* lib. 2. c. 7. f. 43 & seqq.
(c) *Geometrie pratique*, lib. 1. p. 108.
(d) In *Disquisit. nova de ponderibus & mensuris veterum Rom. Græc. & Hebr.* Sect. 3. c. 1. p. 93. & seqq.

Pes Regius Parisinus	1440	Constantinopolitanus	3120
Rhenanus	$1391\frac{3}{10}$	Bononiensis	$1682\frac{2}{5}$
Romanus	1320	Argentorat.	$1282\frac{1}{4}$
Londinen.	1350	Norimberg.	$1346\frac{3}{4}$
Suecicus	1320	Dantiscanus	$1271\frac{1}{2}$
Danicus	$1403\frac{3}{7}$	Halensis	1320
Venetus	1540		

SCHOLION II.

27. *Divisionem mensuræ decimalem primus introduxit* STEVINUS, *teste ipsius* Geometria practica, *dubio procul exemplo* REGIOMONTANI. *Indicem autem decempedarum constituit* 0, *pedum* 1, *digitorum* 2, *linearum* 3 *&c. tanquam denominatorum logarithmos* (§. 364 Arithm.) *quos circello inclusos numeris adscribit. Sed commodius* Joannes BAYERUS *in* Logistica decimali *&* Stereometria *logarithmos characteribus Romanis expressos apicibus numerorum adscribit. Ex. gr. tres perticæ, quinque pedes, septem digiti & octo lineæ ita scribuntur:* $3^{\circ}\ 5^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$. *Commodissimum sæpe accidit, si numeri integra, sive decempedas, designantes a fractionibus decimalibus, pedibus nempe, digitis, lineis &c. puncto separentur, uti monuimus in Arithmetica* (§. 306). *Ita loco* $3^{\circ}\ 5^{\prime}\ 7^{\prime\prime}\ 8^{\prime\prime\prime}$ *scribemus* 3. 578. *Admodum R. P.* Franciscus NOEL *autor est (e), divisionem decimalem non modo in mensuris, sed & ponderibus Sinicis adhiberi.*

DEFINITIO XI.

28. *Superficies* est magnitudo duabus dimensionibus prædita, seu in longitudinem & latitudinem extensa.

COROLLARIUM.

29. Termini superficiei secundum longitudinem & latitudinem sunt lineæ; secundum profunditatem ipsamet terminus sui existit.

(e) In *Observationibus Mathematico-Physicis in India & China factis*, c. 7. p. 104 & seqq.

SCHOLION.

30. *Nimirum in longitudine nullum assumi potest punctum, cui non respondeat aliqua linea secundum latitudinem, & contra.*

DEFINITIO XII.

31. Per *Perimetrum* intelligimus continuum, quo aliud continuum terminatur.

DEFINITIO XIII.

32. *Figura* est continuum perimetro terminatum.

SCHOLION.

33. *Dicitur tam de superficiebus, quam de solidis. In priori casu perimetri sunt lineæ; in posteriori superficies.*

DEFINITIO XIV.

34. *Figura rectilinea* est, cujus perimeter ex lineis rectis; *Curvilinea*, cujus perimeter ex curvis; *Mixtilinea*, cujus perimeter partim ex rectis, partim ex curvis constat.

DEFINITIO XV.

35. *Latus* est linea, quæ est pars perimetri figuræ superficialis.

DEFINITIO XVI.

36. *Planum* seu *figura plana* est, si e quovis puncto perimetri ad quodlibet ejusdem rectam in eadem ducere licet.

DEFINITIO XVII.

Tab. I. Fig. 2. 37. *Circulus* est figura plana, linea in se redeunte terminata, ex cujus singulis punctis ad punctum intermedium C, quod *Centrum* vocari solet, ductæ rectæ sunt inter se æquales. Linea illa *Peripheria* dicitur.

DEFINITIO XVIII.

38. *Chorda* AB est recta a peripheria ad peripheriam ducta.

DEFINITIO XIX.

39. *Diameter* AE est chorda per centrum C transiens. Ejus dimidium AC, sive recta CD ex centro C ad peripheriam ducta, dicitur *Semidiameter*, item *Radius*. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM.

40. Radii ergo unius circuli inter se æquales sunt (§. 37).

DEFINITIO XX.

41. *Arcus* est pars quantalibet peripheriæ AFB: *Gradus* vero est pars ejusdem trecentesima sexagesima. Quilibet gradus in 60 *Minuta prima*; minutum quodlibet primum in 60 *secunda*; secundum unumquodque in 60 *tertia* &c. subdividitur. EUCLIDES arcum quoque *peripheriam* vocat.

COROLLARIUM.

42. Cum peripheria cujuslibet circuli in 360 gradus dividatur; circuli majoris gradus sunt majores gradibus minoris.

SCHOLION.

43. *Scrupula graduum sunt fractiones sexagesimales* (§. 385 Arithm.) *& apicibus suis notantur* (§. 387 Arithm.). *Gradui tanquam integro, seu unitati, cessit* o; *minuto primo* 1; *secundo* 2; *tertio* 3; *&c. consequenter gradus cum suis scrupulis eodem modo scribuntur, quo decempeda cum suis* (§. 27). *Ex. gr. 3 gradus, 25 minuta, 16 secunda, ita scribes:* $3^{\circ}\ 25'\ 16''$. *Etsi autem Ægyptii veteres, quibus hanc divisionem acceptam ferunt, hoc artificio computum Astronomicum a fractionibus liberaverint, cum fractiones sexagesimales instar numerorum integrorum tractari possint, nec sine prudenti consilio eundem in finem eum graduum numerum fecerint, qui per 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, exacte divi-*

dividitur, nec minus eum fuerint exponentem rationis, juxta quam scrupula decrescunt, quem 2, 3, 4, 5 *& 6 metiuntur; non tamen sine ratione suaserunt, post* STEVINUM (*a*), OUGHTREDUS (*b*), WALLISIUS (*c*), *aliique, ut sepositis fractionibus sexagesimalibus, decimales reciperentur: nulla enim in decimalibus reductione minorum fractionum ad majores, vel majorum ad minores opus est; sexagesimales vero non sine tædio reducuntur. Multiplicatio quoque & divisio decimalium facilior quam sexagesimalium* (§. 364, & seqq. 393, & seqq. Arithm.). *Id consilium secuti sunt* Henricus BRIGGIUS *in* Canone triangulorum artificiali *apud* Henricum GELLIBRAND *in* Trigonometria Britannica, Joannes NEWTON *in* Astronomia *pariter ac* Trigonometria Britannica, & Nicolaus MERCATOR *in* Institutionibus Astronomicis. STEVINUS (*d*) *contendit, eandem circuli divisionem antiquitus, in* Seculo sapiente, *quod adstruere conatur, obtinuisse.*

DEFINITIO XXI.

44. *Circuli concentrici* sunt, qui idem centrum habent: *Excentrici* vero, qui habent diversa.

DEFINITIO XXII.

Tab. I. Fig. 2. 45. *Segmentum circuli* est pars ipsius AFBA, arcu AFB & chorda AB comprehensa. Dicitur *Segmentum majus*, quod semicirculo majus est; *minus* vero, quod minus est.

DEFINITIO XXIII.

46. *Sector circuli* est pars ejus ACD duobus radiis AC & CD, atque arcu AD comprehensa.

DEFINITIO XXIV.

Tab. I. Fig. 3. 47. Recta HI circulum in L *tangit*, si ipsi ita occurrit, ut producta tota extra circulum cadat. Circulus vero circulum *intus tangit*, si huic occurrens totus intra hunc; *extus vero tangit*, si eidem occurrens totus extra hunc cadit. Tab. I. Fig. 5. Fig. 4.

(*a*) In præf. ad Tract. *de Logistica decimali.*
(*b*) *Clavis Mathemat.* c. 1. p. m. 2.
(*c*) *Algebra* c. 9. f. 39. Vol. II. *Oper. Math.*
(*d*) In *Cosmographia* lib. 1. def. 6. f. 109. *Operum* Gallice editorum.

COROLLARIUM I.

48. Recta CL, ex centro C ad contactum L ducta, est radius circuli (§. 39).

COROLLARIUM II.

49. Circuli ergo se extus tangentes in L diversa centra C & c habent, adeoque eccentrici sunt (§. 44). Fig. 4.

DEFINITIO XXV.

50. Linea AB lineam CD *secat* in E, si eam dirimit in partes CE & ED cis & ultra ipsam sitas. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

51. Cum etiam CD ipsam AB dirimat in partes AE & EB cis & ultra CD sitas; si AB secet CD in E, etiam vicissim CD secabit AB in eodem puncto E.

COROLLARIUM II.

52. Si recta MN circulum in O secet, pars ejus ON intra circulum cadit (§. 37). Fig. 7.

COROLLARIUM III.

53. Si circulus circulum secet, cum utriusque peripheria in se redeat (§. 37), pars peripheriæ unius circuli intra alterum cadat necesse est.

DEFINITIO XXVI.

54. *Angulus* est duarum linearum AB & AC in uno puncto A concurrentium mutua inclinatio. Lineæ AB & AC dicuntur *Crura*; punctum concursus A *Vertex anguli*. Tab. I. Fig. 9.

SCHOLION.

55. *Angulus hic, vel unica littera A vertici ejus adscripta, vel ad evitandam in casibus nonnullis confusionem tribus litteris* BAC *indigitatur, ita ut vertici adscripta medio loco ponatur. Sæpe nomen angulo imponit littera minor, veluti* x, *eidem inscripta. Utimur vero angulis ad linearum situm determinandum.*

DEFINITIO XXVII.

56. *Angulus insistere* dicitur lineæ, in qua crura ejus terminantur.

DEFINITIO XXVIII.

Tab. I. Fig. 9. 57. *Mensura anguli* BAC est arcus DE ex vertice A, radio prorsus arbitrario AE, intra crura ejus AC & AB descriptus.

COROLLARIUM.

58. Anguli ergo distinguuntur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam: distinguuntur enim per illos arcus, arcus vero per rationem ad peripheriam distinguere licet (§. 41 *Geom.* & §. 132 *Arithm.*). Et eadem de causa quantitas anguli æstimatur ex ratione arcus istius ad peripheriam.

SCHOLION.

59. *Tot scilicet graduum & scrupulorum dicitur esse angulus, quot graduum & scrupulorum est arcus DE* (§. 41).

DEFINITIO XXIX.

Tab. I. Fig. 10. 60. *Anguli contigui* FGH & HGI sunt, quorum idem est vertex G & crus unum commune GH.

DEFINITIO XXX.

Tab. I. Fig. 6. 61. Rectæ lineæ AE & EB *in directum* sitæ sunt, si ejusdem rectæ AB partes existunt.

DEFINITIO XXXI.

62. *Angulus deinceps positus* AEC dicitur, qui oritur anguli AED latere uno ED in C producto.

COROLLARIUM I.

63. Habent adeo anguli deinceps positi AEC & AED crus unum AE commune, & crus alterum unius CE in directum situm est cruri alteri alterius ED (§. 61).

COROLLARIUM II.

64. Hinc anguli deinceps positi sunt contigui, sed non contra (§. 60).

DEFINITIO XXXII.

65. *Angulus rectus* KLM est, cui deinceps positus KLN æqualis est. Tab. I. Fig. 11.

DEFINITIO XXXIII.

66. *Angulus obliquus* AEC est, cui deinceps positus AED inæqualis. *Angulus acutus* AEC est obliquus minor recto. *Angulus obtusus* AED est obliquus recto major. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXIV.

67. *Anguli verticales, o* & *x*, sunt, si crura unius AE & EC in directum jacent cruribus alterius EB & ED. Tab. I. Fig. 6.

DEFINITIO XXXV.

68. Si lineæ ST duæ aliæ OA & RB a diversis plagis in diversis punctis A & B occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *x* & *y*, dicuntur *alterni*. Tab. I. Fig. 12.

DEFINITIO XXXVI.

69. Si vero lineæ ST duæ aliæ AP & BR itidem in diversis punctis A & B, sed ab eadem plaga occurrant, *anguli*, quos cum ea efficiunt, *u* & *y*, item *z* & *y*, dicuntur *oppositi*: & quidem *u* dicitur *oppositus externus*, *z* vero *oppositus internus* ipsius *y*.

DEFINITIO XXXVII.

70. *Angulus ad peripheriam* est angulus ABD, cujus vertex B & crura BA atque BD in peripheria terminantur. Dicitur etiam *Angulus in segmento*. Tab. I. Fig. 13.

COROLLARIUM.

71. Intercipitur adeo a duabus chordis AB & BD (§. 38 & 54), atque arcui AD insistit (§. 56).

DEFINITIO XXXVIII.

72. *Angulus ad centrum* est angulus ACD, cujus vertex in centro circuli C est, crura vero AC & CD in peripheria terminantur. Co-

COROLLARIUM.

Tab. I. *Fig.* 13. 73. Angulus ad centrum a duobus radiis intercipitur (§. 59), atque arcui AD insistit (§. 41, 56); consequenter arcus AD ejus mensura (§. 57).

DEFINITIO XXXIX.

Tab. I. *Fig.* 14. 74. *Angulus extra centrum* HKI est, cujus vertex K extra centrum est, crura vero HK & IK in peripheria terminantur.

COROLLARIUM.

75. Insistit ergo arcui HI (§. 41, 56).

DEFINITIO XL.

Tab. I. *Fig.* 3. 76. *Angulus contactus* HLM est, quem arcus circuli ML cum tangente HL ad contactum efficit.

DEFINITIO XLI.

77. *Angulus segmenti* MLH vel MLI est, quem chorda ML cum tangente HL vel LI ad contactum L efficit.

DEFINITIO XLII.

Tab. I. *Fig.* 11. 78. *Linea* KL *perpendicularis* aut *normalis* est ad alteram LM, si cum ea efficit rectum angulum.

COROLLARIUM.

79. Si igitur LK ad NM perpendicularis, anguli ad L deinceps positi æquales sunt (§. 65), & contra.

DEFINITIO XLIII.

Tab. I. *Fig.* 9. 80. *Linea* AB est ad alteram AC *obliqua*, si cum ea efficit angulum obliquum.

DEFINITIO XLIV.

Tab. I. *Fig.* 12. 81. *Linea* OP *parallela* est alteri QR, si ubique eandem ab ea distantiam servat.

COROLLARIUM.

82. Lineæ ergo parallelæ in infinitum continuatæ non concurrunt.

DEFINITIO XLV.

83. *Lineæ convergentes* IO & VQ sunt, quarum distantia continuo fit minor. Tab. I. *Fig.* 15.

DEFINITIO XLVI.

84. *Lineæ divergentes* IN & VP sunt, quarum distantia continuo fit major.

DEFINITIO XLVII.

85. *Opponi* dicuntur, e quorum uno ad alterum perpendicularem ducere licet.

SCHOLION.

86. Puncta, absolute considerata, *dicuntur* punctis opponi, *si fuerint termini ejusdem rectæ. Nimirum cum recta sit brevissima linea inter duos terminos* (§. 191), *qualis etiam est perpendicularis inter eas, quæ a puncto ad lineam vel superficiem duci possunt* (§. 224); *perpendicularis vicem in eo casu subit, ubi punctum alterutrum extra lineam vel superficiem sumitur,*

DEFINITIO XLVIII.

87. *Triangulum* est figura tribus lineis terminata.

DEFINITIO XLIX.

88. *Triangulum æquilaterum* ABC est, cujus omnia latera inter se æqualia sunt. In genere *Figura æquilatera* dicitur, cujus latera singula inter se æqualia. Tab. I. *Fig.* 16.

DEFINITIO L.

89. *Triangulum æquicrurum* sive *Isosceles* DEF est, quod duo latera æqualia habet. Tab. I. *Fig.* 17.

DEFINITIO LI.

90. *Triangulum scalenum* ACB est, cujus nullum latus alteri æquale, seu cujus singula latera sunt inter se inæqualia. Tab. I. *Fig.* 18.

DEFI-

DEFINITIO LII.

Tab. I. Fig. 19. 91. *Triangulum rectangulum* KML est, cujus angulus unus K rectus est.

DEFINITIO LIII.

Tab. I. Fig. 20. 92. *Triangulum obtusangulum* PNO est, cujus angulus unus N est obtusus.

DEFINITIO LIV.

Tab. I. Fig. 16. 93. *Triangulum acutangulum* ACB est, cujus singuli anguli sunt acuti.

DEFINITIO LV.

94. *Triangulum obliquangulum* est, cujus singuli anguli sunt obliqui.

DEFINITIO LVI.

Tab. I. Fig. 19. 95. *Hypothenusa* ML est latus, in triangulo rectangulo, angulo recto K oppositum.

DEFINITIO LVII.

96. *Catheti* sunt latera trianguli rectanguli MK & KL angulum rectum K intercipientes.

DEFINITIO LVIII.

97. *Figura quadrilatera* est, cujus perimeter ex quatuor lateribus constat. *Rectangula* dicitur, si anguli ejus singuli fuerint recti; *obliquangula*, si obliqui.

DEFINITIO LIX.

Tab. I. Fig. 21. 98. *Quadratum* ABDC est figura quadrilatera, æquilatera, rectangula.

DEFINITIO LX.

Tab. I. Fig. 22. 99. *Rhombus* EFHG est figura quadrilatera, æquilatera, obliquangula.

DEFINITIO LXI.

Tab. I. Fig. 23. 100. *Rectangulum*, sive *oblongum*, MLKI est figura quadrilatera, rectangula, latera opposita ML & IK, item IM & LK æqualia habens.

DEFINITIO LXII.

101. *Rhomboides* NOPQ est figura quadrilatera, obliquangula, latera opposita OP & NQ, item ON & PQ, æqualia habens. Tab. I. Fig. 24.

DEFINITIO LXIII.

102. *Parallelogrammum* est figura quadrilatera, cujus latera opposita sunt parallela.

DEFINITIO LXIV.

103. *Trapezium* RTUS est figura quadrilatera, non parallelogramma. Quidam *Trapezium* appellant figuram quadrilateram, cujus duo tantum latera opposita sunt parallela, quæ alias *Trapezium parallelarum basium* dici solet: figura vero, cujus neutrum latus alteri parallelum, *Trapezoides* iisdem dicitur. Tab. I. Fig. 25.

DEFINITIO LXV.

104. *Figura polygona*, seu *multilatera*, ABCED, vel FGHKI, est, cujus perimeter ex pluribus, quam quatuor, lateribus componitur. Quodsi latera fuerint quinque, *Pentagonum*; si sex, *Hexagonum*; si septem, *Heptagonum*; si octo, *Octogonum* &c. dicitur. Tab. I. Fig. 26. 27.

DEFINITIO LXVI.

105. *Figura æquiangula* est, cujus singuli anguli æquales sunt.

DEFINITIO LXVII.

106. *Figura regularis* est figura æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXVIII.

107. *Figura irregularis* est, quæ non simul æquilatera & æquiangula.

DEFINITIO LXIX.

108. *Figuræ inter se æquilateræ* dicuntur,

cuntur, si singula latera unius fuerint sigillatim æqualia singulis lateribus homologis alterius.

DEFINITIO LXX.

109. *Figuræ inter se æquiangulæ* sunt, si singuli anguli unius singulis angulis homologis alterius æquales sunt.

DEFINITIO LXXI.

110. Dicuntur vero tam *anguli* quam *latera homologa*, si eundem ordinem a primo in utraque figura servent.

DEFINITIO LXXII.

Tab. I. Fig. 24. 111. *Diagonalis* PN est recta ex vertice anguli unius P in verticem alterius N ducta.

DEFINITIO LXXIII.

Tab. I. Fig. 19. 112. *Basis figuræ* est perimetri pars ima KL.

COROLLARIUM.

113. Cum situs figuræ ipsi non sit essentialis, quamlibet perimetri partem, seu latus figuræ quodlibet, pro basi assumere licet.

DEFINITIO LXXIV.

Tab. I. Fig. 19. 114. *Vertex figuræ* M est vertex anguli basi KL oppositi.

DEFINITIO LXXV.

115. *Altitudo figuræ* est distantia verticis a basi.

DEFINITIO LXXVI.

116. *Figura* ABCDE dicitur *Circulo inscripta*, si peripheria per vertices singulorum angulorum ipsius transit; tuncque *Circulus figuræ* dicitur *circumscriptus*. Tab. VI. Fig. 107.

DEFINITIO LXXVII.

117. *Figura abcde* dicitur *Circulo circumscripta*, si singula ejus latera peripheriam tangant; tumque *Circulus figuræ* dicitur *inscriptus*.

DEFINITIO LXXVIII.

118. *Mensura figuræ* est quadratum, cujus latus perticæ æquale, diciturque *pertica quadrata*; & in *pedes quadratos*, sicut pes quadratus in *digitos quadratos* dividitur.

DEFINITIO LXXIX.

119. *Eodem modo determinari* dicuntur, si data, per quæ unum determinatur, fuerint similia datis, per quæ determinatur alterum, & utrobique ex datis similibus per easdem regulas reliqua determinantur.

COROLLARIUM.

120. Quæ itaque eodem modo determinantur, in iis coincidunt ea, per quæ discerni debent; adeoque similia sunt (§. 24 *Arith.*)

CAPUT II.

De Propositionibus quibusdam Fundamentalibus.

PROBLEMA I.

Tab. I. Fig. 28. 121. A *Dato puncto* A *ad datum punctum* B *lineam rectam ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta

Linea recta ducitur juxta regulam EF ad puncta data A & B applicatam Tab. I. Fig. 28.

gra-

Tab. I. graphio HI, penna, aut plumbagine.
Fig. 28. II. In ligno vel saxo

Recta delineatur etiam sine regula, si filum, creta vel cerussa delibutum, punctis datis A & B apprimatur, &, medio digitis prehenso, sursum trahatur, moxque iterum demittatur.

III. In campo

Tab. I. Fig. 29. Recta designatur per baculos LK in punctis datis, beneficio libellæ M, ad horizontem perpendiculariter defixos, quorum summitati muccinium, aut folium chartæ mundæ alligatur, si e longinquo videri debeant.

Scholion I.

122. *Cum regulæ orichalceæ & argenteæ chartam facile nigrent; iis præferuntur, quæ ex lignis Indicis parantur, ut ebenina. His enim accuratam politiem inducere licet, ne sordes facile adhærescant, nec fibræ exiguæ calami graphiique motum uniformem impediant: quod quernis, nuceis, & his similibus familiare vitium.*

Scholion II.

123. *Pennæ optimæ sunt, quæ ex corvorum alis evelluntur: propterea quod, anserinis duriores, lineis subtilioribus & purioribus ducendis inserviunt. Baculi vero LK cuspide ferrea K muniuntur, ut eo facilius in terra, præsertim duriore, defigi queant.*

Scholion III.

124. *Utendum vero est atramento, non communi, sed Sinico: tum quia commune ob corrosivitatem vitrioli, quod ipsum ingreditur, chalybeam graphii cuspidem arrodit; tum quia Sinicum facilius effluit, etiamsi atrius sit communi. Accedit, quod Sinico lineæ nitidiores ducantur, quam communi.*

Problema II.

125. *Duobus baculis in solo defixis, tertium, vel plures, in eadem recta cum iis infigere.*

Resolutio.

Baculus ita infigitur, ut oculo in unum directo ceteri non appareant.

Ratio a luminis rectilinea propagatione petenda, de qua in *Opticis*.

Problema III.

126. *Lineam rectam metiri.*

Resolutio.

Ad manus sit necesse est mensura (§. 23). Nimirum, pro lineis in charta datis, abscindantur ex RT 10 partes æquales longitudinis arbitrariæ, quæ pedes designent: intervallum vero 10 pedum RS in residuum lineæ transferatur, quoties fieri potest (§. 25). In campo; vel catena, vel fune cannabino, vel pertica in digitos, pedes, & decempedas legitime divisis utimur. Sufficit autem ultimam decempedam in pedes, & pedem ultimum in digitos dividi. Quodsi ergo lineam rectam metiri jubearis; Tab. I. Fig. 30.

I. In charta,

1. Ponatur crus circini unum in A & eo usque aperiatur, donec alterum extremum B attingat.
2. Mox circini crus unum in fine decempedæ alicujus, ex. gr. in 10 ponatur, & notetur quemnam pedem mensuræ alterum attingat, ex. gr. 5. Erit linea AB, 1° 5′.

II. In Campo,

1. In utroque lineæ extremo erigantur baculi (§. 121), &, si ea mensuræ longitudinem superet, constituantur cum iis alii in eadem recta (§. 125).

2. Fu-

2. Funis cannabinus, aut catena, mensuram largiens, ab uno baculo usque ad alterum ita extendatur, ut utrumque ad angulos rectos secet (§. 238): quod perpendiculo appenso evidens redditur.
3. Decempedæ, pedes, atque digiti inter utrumque intercepti numerentur.

SCHOLION I.

127. *Si catena utrinque in annulos desinat, per quos baculos trajicere licet; lineam metimur, baculis hisce cum ceteris in eadem* Tab. I. Fig. 31. *recta continuo collocatis* (§. 125). *Notandum tamen, dum baculus ex A in B transfertur, non in vestigio baculi B, sed prope ipsum in D eundem infigi, atque annulorum crassitiem longitudini mensuræ non accenseri debere. Quodsi tamen hæc sit pars mensuræ, eaque subdupla diametri baculi; baculus ex A ablatus in ipso B defigi poterit. Parantur* Tab. I. Fig. 32. *autem catenæ PQ ex filis ferreis pedalibus, earumque longitudo tres decempedas excedere vix debet, ne pondere fiant molestæ: quam ob rationem nec filis ferreis nimium crassis utendum.*

SCHOLION II.

128. *Si pertica circa alterum sui extremum, tanquam centrum, per quadrantem circuli elevata, & per alterum rursus demissa lineam metitur; crassities ejus longitudini lineæ repertæ toties addenda, quoties ad eam applicata fuit, aut longitudo perticæ particula crassitiei congruente imminuenda. Ceterum quia perticæ, ab inæqualitate extensionis prorsus liberæ, prærogativam quandam præ catenis & funibus habent; earum extremitates annulis ferreis instrui oportet, ut observantibus, quæ in Scholio præcedente diximus, tanto minus periculi supersit, ne a recta dimetienda declinetur.*

SCHOLION III.

129. *Funes cannabinos humor contrahit & vires diversæ inæqualiter tendunt.* SCHWENTERUS (a) *autor est, cum aliquando exercitiis geometricis in campo vacaret, longitudinem funis, quæ erat 16 pedum, cadente pruina, hora unius intervallo, ad pedes 15 rediisse. Ut igitur hi nævi tollantur, funiculi, ex quibus conficiuntur, in gyros contrarios contorquendi; ipse autem funis oleo ad ignem ferventi immittendus, &, postquam exsiccatus fuerit, per ceram liquefactam trahendus, tandemque cerandus. Nullum longitudinis decrementum notabis, etiamsi funem istiusmodi per diem integrum sub aquis demersum detineas. Ne autem funis humum contingat, sustentaculum Z ipsi supponendum.* Tab. I. Fig. 33. *Perpendiculum, quo ad funem horizontaliter extendendum utimur, ex filo & appenso globo, vel pondere plumbeo constat.*

PROBLEMA IV.

130. *Data longitudine lineæ, in mensura ex. gr.* Parisina; *invenire eandem in mensura alia, ex. gr.* Londinensi, *cujus ad priorem nota est ratio.*

RESOLUTIO.

Sit ex. gr. linea data 186 pedum *Parisinorum*, quæritur quot eadem sit pedum *Londinensium?* Quoniam pes *Londinensis* est ad *Parisinum*, ut 135 ad 144 (§. 26); inferatur (§. 311 *Arithm.*):

135 : 144 = 186 26784 ($198\frac{54}{135}$ ped. *Londin.*

```
 186       135) 135::
 ---            -----
 864             1328:
1152             1215:
 144             -----
-----             1134
26784             1080
                  ----
                    54
```

 PRO-

(a) *Geometr. pract.* lib. 1. Tract. 1. p. 381.

PROBLEMA V.

Tab.II. Fig.34. 131. *Ex dato quovis centro* C, *dato radio quocunque* AC, *Circulum describere.*

RESOLUTIO.

I. In charta
1. Collocetur circini crus unum in centro dato C, & aperiatur intervallo radii dati AC.
2. Moveatur circinus circa centrum C, ita crus alterum peripheriam designabit (§.37).

II. In solo & quotiescunque circini apertura tanta fieri nequit, quanta requiritur; radii vice fungitur filum, funiculus, aut virga, sive lignea, sive ferrea.

SCHOLION I.

Tab.II. Fig.35. 132. *Si fune aut filo utimur, cavendum est ne stylus FA, quo peripheria designatur, e situ perpendiculari dimoveatur: id quod impedit filum transversum FE, si fuerit AF* $= 3$, *AE* $= 4$ *& FE* $= 5$. *Ratio patet per Theorema* Pythagoricum *infra demonstrandum*, (§.417).

SCHOLION II.

Tab.II. Fig.37. 133. *Circini, ut instrumenta geometrica reliqua, ex orichalco parantur, ob durabilitatem, tractabilitatem, & nitorem hujus metalli. Cuspides tamen crurum ex chalybe fiunt: fert enim ejus durities, ut subtilius exacuantur. Circini, quo ad lineas metiendas & dividendas utimur, crura eadem sunt & invariata. Sed circini, qui peripheriis & arcubus describendis inservit, crus alterum variari potest, ut tam plumbagine, quam atramento Sinico uti detur, prout commodum visum fuerit. Plumbagine nempe utimur, quoties arcus delineantur absoluta operatione rursus delendi. Longitudo vel 3, vel 6 digitorum esse solet.*

COROLLARIUM.

134. Quoniam unius circuli peripheria eodem modo determinatur, quo peripheria alterius cujuscunque (§.119); omnes peripheriæ sunt inter se similes (§.120). Eodem modo patet, omnes circulos & semicirculos esse inter se similes.

THEOREMA I.

135. *Diameter* AE *dividit tam peripheriam, quam circulum ipsum, in duas partes æquales.* Tab.I. Fig.2.

DEMONSTRATIO.

Partes peripheriæ ADE & ABE, itemque circuli ADECA & ABECA determinantur, recta AC circa centrum C mota, donec sibi in directum jaceat (§.131). Sunt adeo arcus ABE & ADE partes peripheriæ, segmenta ABECA & ADECA partes circuli eodem modo determinatæ, adeoque similes (§.120). Quamobrem illi ad peripheriam, hæc ad circulum eandem rationem habent (§.170 *Arithm.*); consequenter tum illi, tum hæc inter se æquantur (§.177 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

136. Super quavis igitur linea AE, [producta, si opus sit, (§.21)] ex assumto in ea puncto C describi potest semicirculus.

THEOREMA II.

137. *Si ex centro* C *duorum circulorum concentricorum ducantur radii* CDA *&* CEB; *tum arcus* DE *&* BA *ad peripherias, tum sectores* DCE *&* ACB *ad areas suorum circulorum eandem rationem habent.* Tab.II. Fig.34.

DEMONSTRATIO.

Cum circuli concentrici, *per hypoth.* idem centrum C habeant (§.44), & arcus

Tab.II. Fig.34. arcus AB atque DE, itemque sectores ACB & DCE describantur, radiis AC & DC a communi termino CDA ad communem terminum CEB motis (§. 131); arcus isti atque sectores eodem modo determinantur (*§.* 119): consequenter illi peripheriarum, hi circulorum partes similes sunt (*§.* 120); adeoque illi ad peripherias, hi ad circulos eandem rationem habent (§. 170 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

138. Cum arcus DE & AB, intra crura ejusdem anguli ACB ex ejus vertice C descripti, sint arcus circulorum concentricorum (§. 44); ad suas quoque peripherias eandem rationem habent; consequenter inter se sunt ut peripheriæ (§. 173 *Arithm.*). Quoniam itaque peripheriæ eundem numerum graduum continent (§.41); ipsi quoque eundem continere debent.

COROLLARIUM II.

139. Quia anguli quantitas æstimatur per rationem arcus ex vertice intra crura descripti ad totam peripheriam (*§.* 58); perinde est, quocunque radio arcus iste describatur (*§.* 137).

COROLLARIUM III.

140. Eadem ergo manet anguli quantitas, sive crura producantur, sive minuantur.

THEOREMA III.

Tab.II. Fig.46. 141. *Angulorum æqualium* A *&* a *mensura* BC *&* de *sunt arcus similes: & contra, si angulorum* A *&* a *mensuræ* BC *&* de *similes sunt; anguli æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum anguli cujuscunque A vel *a* quantitas æstimetur per rationem arcus BC, vel *de*, ex vertice A, vel *a* intra crura descripti, ad integram peripheriam (§. 58); si A = *a*, ratio arcuum BC & *de* ad peripherias suorum circulorum eadem esse debet; consequenter cum sint partes suarum peripheriarum (§. 41), similes sunt (§. 170 *Arithm.*) *Quod erat unum.* Tab.II. Fig.46.

Si arcus BC, & *de*, mensuræ angulorum A, & *a* (§. 57), fuerint similes; ad peripherias, quarum partes sunt (§. 41), eandem rationem habent (*§.* 170 *Arithm.*). Quare cum quantitas angulorum A & *a* per eam rationem æstimetur (§. 58), eadem omnino esse debet, hoc est, anguli æquales sunt. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

142. Cum arcus similes eandem rationem habeant ad peripherias, quarum sunt partes (*§.* 170 *Arithm.*); si fuerint partes æqualium peripheriarum, æquales sunt (§. 177 *Arithm.*). Si ergo mensuræ angulorum æqualium fuerint partes ejusdem peripheriæ, vel æqualium peripheriarum; æquales sunt (§. 141); & contra.

THEOREMA IV.

143. *Anguli recti* KLM *mensura est quadrans circuli.* Tab. I. Fig.11.

DEMONSTRATIO.

Producatur LM in N (*§.* 21); erit $x = o$ (§. 65). Sed cum ex L super recta NM describi possit semicirculus (§. 136); angulorum x & o mensuræ AC & CB junctim sumtæ conficiunt semicirculum (§.57). Ergo unius mensura est dimidius semicirculus, hoc est circuli quadrans (§. 142). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

144. Cum quadrans circuli 90° compleċtatur (§. 41); angulus rectus est 90° (§. 59).

COROLLARIUM II.

145. Omnes adeo recti sunt inter se æquales (§. 141); & æqualis recto etiam rectus est.

COROLLARIUM III.

146. Acutus igitur minor, obtusus major est quam 90° (§. 66).

THEOREMA V.

Tab. I. Fig. 6. 147. *Duo anguli deinceps positi*, x *&* y, *aut quotcunque ad idem punctum* E *super eadem recta* CD *constituti sunt aequales duobus rectis. Et contra, si* x *&* y *fuerint duobus rectis aequales;* CE *sita est in directum ipsi* ED.

DEMONSTRATIO.

Quoniam in casu priore anguli *x* & *y* sunt deinceps positi, *per hypoth.* EC cum ED eandem rectam constituit (§. 62). In casu posteriore omnes anguli constituti sunt super eadem recta CD ad idem punctum E, *per hypoth.* Quare cum ex E super CD describi possit semicirculus (§. 136); in utroque casu mensura omnium angulorum simul est semicirculus (§. 57). Sed idem est mensura duorum rectorum (§. 143). Ergo anguli isti sunt duobus rectis æquales (§. 142). *Quod erat unum.*

Quodsi *x* & *y* fuerint duobus rectis æquales, nec tamen CE ponatur ipsi ED in directum sita; recta quædam alia, veluti EA, ipsi ED in directum jacebit (§. 21), atque hinc $o + y$ & x erunt deinceps positi (§. 62), consequenter duobus rectis æquales, *per demonstrata*, adeoque $o + y + x = y + x$ (§. 87 *Arith.* & §. 145 *Geom.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arith.*), CE ipsi ED in directum sita. *Quod erat alterum.* Tab. I. Fig. 6.

COROLLARIUM I.

148. Anguli, qui sunt deinceps, *x* & *y*, aut plures circa idem punctum ejusdem rectæ constituti, si junctim sumantur, conficiunt 180° (§. 144).

COROLLARIUM II.

149. Angulorum deinceps positorum dato uno, alter itidem datur: relinquitur nimirum, si datus ex 180° subducatur.

COROLLARIUM III.

150. Si in campo angulum inaccessum, vel obtusum, Quadrante metiri jubemur, & eum, qui est deinceps, accedere licet; illius loco hunc metimur: ex 180° enim subductus quæsitum relinquit (§. 149).

COROLLARIUM IV.

151. Certus evades, te omnes figuræ rectilineæ angulos in campo exacte dimensum esse, si finita operatione deinceps positos etiam metiaris, & hos singulos illis singulis addas: quodsi enim ubique prodierit summa 180°, operatio rite peracta (§. 148).

PROBLEMA VI.

152. *Angulum metiri.* Tab. II. Fig. 36.

RESOLUTIO.

Cum anguli ACB mensura sit arcus DE ex centro C intra crura AC & CB descriptus (§. 57); totum negotium huc redit, ut numerus graduum, qui arcui DE competunt, determinetur: id quod fit ope Semicirculi in 180° exactissime divisi. Nimirum

I. In charta,

1. Centrum Semicirculi ad verticem anguli C applicatur, & radius ejus CE cruri CB admovetur.

2. Gra-

Tab.II. *Fig.36.* 2. Gradus, in arcu DE inter crura anguli ACB & CB intercepto, numerantur.

Tab.II. *Fig.38.* II. In Campo,

1. Instrumentum goniometricum ita collocatur, ut radius ejus CG uni cruri anguli; centrum vero C vertici ejusdem immineat. Prius obtinetur collineando per dioptras F & G, seu pinnulas immobiles ad diametrum perpendiculariter erectas, versus baculum in extremo cruris defixum; posterius vero perpendiculum ad centrum instrumenti applicando.
2. Regula HI circa centrum mobilis versus crus anguli alterum promovetur, donec per pinnulas ipsi affixas baculus in extremo ejus defixus collineanti occurrat.
3. Gradus, quem regula instrumento indicat, notatur.

SCHOLION I.

153. *Semicirculus minor, quo in charta utimur*, Instrumentum transportatorium *vulgo appellatur. In campo quidam circulo integro, quidam nonnisi quadrante utuntur.*

SCHOLION II.

154. *Diameter Transportatorii est trium fere digitorum Rhenanorum; majorum vero Instrumentorum goniometricorum unius pedis, aut ad summum unius cum dimidio. Divisio accurata fieri debet. In Transportatoriis gradus dimidii satisfaciunt; in majoribus dena prima. Angulos in campo Instrumento majore captos, quantum fieri potest, accuratissime in charta designaturi, diametrum Transportatorio non multo minorem diametro ejus Instrumenti, quo in campo usi sunt, & regulam circa centrum mobilem indulgent.*

PROBLEMA VII.

155. *Data quantitate anguli, ipsum describere.* Tab.II. *Fig.36.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ducatur recta CB, &
2. Super alterum ejus extremum C ponatur centrum Instrumenti transportatorii, ita ut radius ejus cum recta CB coincidat.
3. Numerentur gradus dati ab E versus D & ad gradum ultimum notetur punctum D.
4. Ducatur recta CA, per C & D.

Erit ACB angulus quæsitus (§. 141).

II. In campo, Tab.II. *Fig.38.*

1. Collocetur Instrumentum goniometricum, ut in Probl. præc. (§. 152).
2. Regula HI circa centrum C ad gradum datum promoveatur.
3. Baculus ita erigi jubeatur, ut per dioptras collineanti occurrat.

THEOREMA VI.

156. *Si recta* AB *alteram* CD *secet in* E; *anguli verticales*, x *&* o, *item* y *&* E, *sunt æquales.* Tab.I. *Fig. 6.*

DEMONSTRATIO.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=180^\circ \\ y+o=180^\circ \end{array}\right\} \quad (\S.\ 148)$$

Ergo $x+y=y+o$ (§. 87 *Arithm.*)
adeoque $x=o$ (§. 91 *Arithm.*).
Eodem modo ostenditur esse $y=E$.
Q. e. d.

COROLLARIUM.

157. Quodsi in campo, aut alio in casu, angulum inaccessum x metiri jubeamur; accessum vero non neget verticalis o: hunc ejus loco metiri licet.

SCHO-

SCHOLION.

158. *Cum Tyrones sub initium studii mathematici sensibus atque imaginationi nimis adhuc indulgeant, ratiociniis ex assumtis deductis minus adsueti; figuras, per data ex hypothesibus Theorematum assumta, construere ac reliquarum linearum & angulorum per constructionem determinatorum quantitatem explorare (§.126, 152) juvat: ita sensus & veritas Propositionis elucescit, & animus ad Demonstrationes genuinas percipiendas excitatur: cum enim sit scire avidus, rationes veritatis nosse desiderat. In Demonstratione magis acquiescunt Tyrones, examine ratiocinationis legitimæ sic facto; non secus ac Theoriæ physicæ magis satisfaciunt, ubi factis experimentis decretoris consonæ deprehenduntur.*

THEOREMA VII.

Tab. I. Fig. 6. 159. *Omnes anguli* x, y, o, E, *&c. circa punctum aliquod* E *constituti, sunt æquales quatuor rectis.*

DEMONSTRATIO.

Describatur ex puncto E, vertice communi angulorum *x*, *y*, *o*, E, &c. (§. 54) intervallo quocunque E*a* circulus (§. 131); evidens est mensuras omnium angulorum simul sumtas *db*, *bc*, *ca*, *ad* &c. conficere integram circuli peripheriam (§. 143). Mensura ergo angulorum *x*, *y*, *o*, E &c. junctim sumtorum est circulus integer (§. 57). Sed circulus est mensura quatuor rectorum (§. 143). Ergo omnes isti anguli æquales sunt quatuor rectis (§. 141). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

160. Omnes itaque anguli, circa idem punctum constituti, junctim 360° conficiunt (§. 144).

THEOREMA VIII.

161. *Quæ sibi mutuo congruunt, ea & æqualia, & similia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Quæ sibi mutuo congruunt, eorum iidem esse possunt termini (§. 3). Ergo unum in locum alterius salva quantitate substituere licet: consequenter æqualia sunt (§. 15 *Arith.*). *Quod erat unum.*

Porro, quoniam quæ sibi mutuo congruunt eosdem terminos habere possunt (§. 3): quin eodem modo determinari queant dubitandum non est. Sunt igitur similia (§. 120). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IX.

162. *Quæ æqualia & similia sunt, ea sibi mutuo congruunt.*

DEMONSTRATIO.

Similia differre nequeunt, nisi quantitate (§. 26 *Arithm.*). Quamobrem si æqualia fuerint, prorsus non differunt (§. 15 *Arithm.*). Jam si sibi mutuo superimposita non iisdem terminis continerentur, diversitate terminorum differrent: quod cum sit absurdum, *per demonstrata*, iisdem terminis contineri debent; consequenter sibi mutuo congruunt (§. 3). *Q. e. d.*

THEOREMA X.

163. *Si linea lineæ congruit; singula puncta unius singulis punctis alterius congruere debent.*

DEMONSTRATIO.

Linearum enim, quæ sibi mutuo congruunt, iidem termini esse possunt (§. 3). Sed termini linearum secundum longitudinem sunt duo puncta; secundum latitudinem & profunditatem ipsæmet sui termini existunt (§. 11). Ergo si lineæ congruunt; non modo puncta

puncta extrema, sed etiam omnia intermedia congruere debent. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

164. Si centra & radii duorum circulorum congruunt; etiam peripheriæ, in quibus radii terminantur (§. 39); consequenter circuli ipsi congruere debent (§. 3).

COROLLARIUM II.

165. Ex uno itaque puncto, eodem radio, circulus nonnisi unicus describi potest.

THEOREMA XI.

Tab. II. Fig. 39. 166. *Si fuerint duo anguli* BAC *&* bac *aquales, & vertex unius* a *ponatur super verticem alterius* A, *praterea crus illius* ac *super crus hujus* AC; *etiam crus alterum* ab *super alterum* AB *cadet.*

DEMONSTRATIO.

Si negas; necesse est ut *ab*, vel intra angulum BAC, vel extra eum cadat. Ducatur ex A, radio AD, arcus D*f* (§. 131): erit DE mensura anguli BAC, *De* vel *Df* mensura anguli *bac* (§. 39). Ergo, in casu priore, *De* mensura anguli *bac* minor; in posteriore eadem mensura *Df* major foret mensura anguli BAC (§. 20 *Arithm.*). Quod utrumque cum sit absurdum (§. 142); crus *ab* super AB cadit. *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. I. Fig. 9. 167. *Si vertex & crura anguli unius* DAE *supra verticem & crura alterius* BAC *cadant; angulus unus* DAE *alteri* BAC *aqualis est.*

DEMONSTRATIO.

Describatur enim ex communi vertice A, intra crura AD & AE, arcus DE (§. 131); erit is mensura anguli DAE (§. 57). Sed quoniam crura DA & DE supra crura alterius anguli AB & AC cadunt, *per hypoth.* idem arcus DE inter crura AB & AC intercipitur. Est igitur & mensura anguli BAC (§. *cit.*); consequenter DAE = BAC (§. 142). *Q. e. d.* Tab. I. Fig. 9.

THEOREMA XIII.

168. *Linea recta aquales sibi mutuo congrunt.* Tab. II. Fig. 40.

DEMONSTRATIO.

Est *ab* = AB, *per hypoth.* Est vero etiam recta *ab* similis rectæ AB (§. 17). Ergo *ab* ipsi AB congruit (§. 162). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

169. Ergo si recta *ab* alteri æquali AB ita applicetur, ut punctum *a* supra A & *ab* supra AB cadat; etiam *b* supra B cadet (§. 3, 11).

COROLLARIUM II.

170. Si rectarum extrema coincidunt; singula puncta unius erunt in recta altera (§. 162); atque hinc inter duo puncta nonnisi unica recta cadit.

COROLLARIUM III.

171. Cum radii circulorum sint lineæ rectæ (§. 39), ubi æquales fuerint, sibi mutuo congruunt (§. 168); consequenter etiam circuli congruere debent (§. 164); atque adeo circuli æquales sunt, quorum æquales sunt radii (§. 161).

COROLLARIUM IV.

172. Quoniam non absimili modo patet, circulum, cujus minor est radius, congruere parti circuli radium majorem habentis; minor est circulus, cujus minor radius; major vero, cujus radius major (§. 20 *Arithm.*).

THEOREMA XIV.

Tab. I. Fig. 2. 173. *Si centro circuli* C *applicetur lineæ rectæ* CD, *radio* AC *æqualis, extremum unum; alterum peripheriam attinget.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam recta CD radio æqualis, *per hypoth.* ipsi congruet (§. 168), adeoque eosdem cum eo terminos habere debet (§. 3). Sed radius ex centro eductus in peripheria terminatur (§. 39). Ergo & recta CD ipsi æqualis, si alterum extremum in C hæreat, altero peripheriam attinget. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

174. *Anguli similes sunt etiam æquales.*

DEMONSTRATIO.

In angulis similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum anguli distinguantur per rationem arcuum ex vertice intra crura descriptorum ad peripheriam (§. 58); si anguli sunt similes, arcus isti ad suas peripherias candem rationem habere, hoc est, & ipsi similes esse debent (§. 141 *Geom.* & §. 170 *Arithm.*). Sunt igitur anguli æquales (§. 141). *Q. e. d.*

THEOREMA XVI.

175. *In figuris similibus anguli homologi sunt æquales, & latera homologa proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

In figuris similibus ea coincidunt, per quæ a se invicem discerni debent (§. 24 *Arithm.*). Quare cum figuræ nequeant distingui nisi per angulos & latera; illi æquales (§. 174), hæc proportionalia esse debent (§. 154 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

176. *Sermo nobis tantum est de figuris rectilineis, quarum latera in se spectata omnia inter se similia sunt. Alias addendum foret, latera homologa debere esse insuper inter se similia & similiter posita, ex. gr. arcus circulorum similes convexitatem centro figuræ obvertentes.*

THEOREMA XVII.

177. *Figurarum sibi mutuo congruentium* RTUS & rtus *anguli & latera homologa inter se æqualia sunt.* Tab. I. Fig. 25.

DEMONSTRATIO.

Quoniam figuræ RTUS & *rtus* sibi mutuo congruunt, *per hypoth.* iidem utriusque termini esse possunt (§. 3). Quare cum termini earum sint perimetri (§. 31); una *rtus* supra alteram RTUS ita poni potest, ut *tu* ipsi TU, *tr* ipsi TR, *rs* ipsi RS, &c. congruat. Ergo latera homologa sunt inter se æqualia (§. 161). *Quod erat unum.*

Sunt vero T & *t*, R & *r*, S & *s* &c. vertices; TU, TR, RS, SU, & *tu*, *tr*, *rs*, *su* crura angulorum homologorum (§. 54). Quamobrem & anguli homologi æquales sunt (§. 167). *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

178. *Patet ex Scholio præcedente, quomodo idem Theorema ad figuras quoque non rectilineas extendatur.*

CAPUT

CAPUT III.

De Linearum Rectarum & Triangulorum Symptomatis.

THEOREMA XVIII.

Tab.II. Fig.41. 179. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc, *fuerit* A=a, AB=ab, AC=ac; *erit etiam* BC=bc, C=c, B=b, *totaque triangula æqualia & similia erunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiamus triangulum *abc* ita poni super alterum ABC, ut punctum *a* super A, & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *ac*=AC, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC (§. 166), & punctum *c* super C (§. 169); consequenter *bc* super BC (§. 170) cadit, adeoque △ *abc* alteri ABC congruit (§. 3), consequenter *bc*=BC (§. 161), *c*=C, & *b*=B (§. 167), totaque triangula æqualia & similia sunt (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA VIII.

180. *Datis duobus lateribus* AB & AC, *cum angulo intercepto* A; *triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumto AB pro basi, in A constituatur angulus datus (§. 155).
2. In crus ejus alterum transferatur altera datarum AC.
3. Tandem ducatur recta BC.

Erit ABC triangulum desideratum (§. 179).

SCHOLION.

181. *Tyrones latera & angulos datos in numeris assumant: quod in aliquibus casibus ad Demonstrationes empiricas distinctius percipiendas proderit, quas supra (§. 158) commendavimus.*

COROLLARIUM I.

182. Determinatis adeo duobus lateribus cum angulo intercepto, tota triangula determinantur.

COROLLARIUM II.

183. Quare si in duobus triangulis ACB & *acb* fiat *a*=A & *ab*:*ac*=AB:AC; Tab.II. Fig.41. triangula eodem modo determinantur (§. 119) adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam *c*=C & *b*=B, *ab*:*bc*=AB:BC, &c. (§. 175).

THEOREMA XIX.

184. *In triangulo æquicruro* DFE Tab.II. Fig.44. 1° *anguli ad basin* y *&* u *sunt æquales*; 2° *recta* FG, *quæ angulum* DFE *bifariam secat, basin quoque* DE, *&* 3° *triangulum ipsum bifariam secat; immo* 4° FG *ad basin* DE *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Nam *o*=*x*, *per hypoth.* DF=FE (§. 89) & FG=FG (§. 81 *Arithm.*). Ergo 1°, *y*=*u*; 2°, DG=GE; 3°, △ DFG=△ GFE (§. 179). Et quia etiam anguli ad G æquales, (*per* §. *cit.*) 4°, FG ad DE normalis est (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

185. Cum triangulum æquilaterum sit etiam æquicrurum (§. 88, 89); Theorema præsens de æquilatero itidem verum est.

THEOREMA XX.

Tab. I. Fig. 16. 186. *In triangulo æquilatero* ABC *omnes anguli sunt inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AC=CB (§. 88); ergo A=B (§. 184). Est vero etiam AC=AB (§. 88); ergo C=B (§. 184). Quare A=C (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

187. Triangulum itaque æquilaterum est etiam æquiangulum (§. 105).

THEOREMA XXI.

Tab. III. Fig. 55. 188. *Si trianguli* ABC *latus unum* AC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DAB *major quolibet interno opposito* B, *vel* C.

DEMONSTRATIO.

Concipiatur AB, bifariam divisa in F, ductaque recta CF producenda in G (§. 21) donec fiat FG=FC. Quoniam GC secat AB in F (§. 50), erit $z=y$ (§. 156); consequenter $o=x$ (§. 179). Sed DAB > o (§. 84 *Arithm.*); ergo & DAB > x (§. 89 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur esse DAB, aut, quod perinde est (§. 156), ejus verticalem HAC > ACB. *Q. e. d.*

THEOREMA XXII.

Tab. III. Fig. 57. 189. *In omni triangulo* ABC, *latus majus* AC *opponitur majori angulo* B; *minus* AB *minori* C; *& contra.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB < AC, *per hypoth.* parti hujus AD æqualis est (§. 20. *Arithm.*). Ducatur recta BD (§. 121): erit BAD triangulum æquicrurum (§. 89), adeoque $o=x$ (§ 184). Sed o > C (§. 188). Ergo x > C (§. 89 *Arithm.*); consequenter multo magis B > C. *Quod erat unum.* Tab. III. Fig. 57.

Sit B > C, *per hypoth.* Si non sit AC > AB, erit vel AC = AB, vel AC < AB; adeoque in casu primo B = C (§. 184), in altero B < C, *per demonst.* Sed cum utrumque hypothesin evertat, absurdum est. Consequenter si angulus B > C, etiam AC > AB. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXIII.

190. *In omni triangulo* ABD, *duo latera* AD *&* BD *simul sumta sunt tertio* AB *majora.*

DEMONSTRATIO.

Producatur AD in C (§. 21), donec fiat BD = DC, adeoque AC=AD + DB (§. 88 *Arithm.*): erit △BDC æquicrurum (§. 89) & hinc y = C (§. 184). Cum vero sit $y < x+y$ (§. 84 *Arithm.*), erit etiam C $< x+y$ (§. 89 *Arithm.*). Quare AC, seu AD + DB > AB (§. 189). *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

191. *Linea recta* AB *est brevissima omnium, quæ intra eosdem terminos* A *&* B *continentur.* Tab. I. Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

Sit curva quæcunque ACB. Ducantur rectæ AC & CB: erit AC + CB > AB (§. 190). Ducantur porro rectæ AD & DC, item CE & EB: erit AD + DC > AC & CE + EB > CB (§. *cit.*), consequenter AD + DC + CE + EB > AC + CB (§. 90 *Arithm.*), adeoque

Tab. I. Fig. 1. que multo magis AD + DC + CE + EB > AB. Quodsi plures ducas subtensas; erit earum aggregatum denuo majus ipsa AB. Quare cum illæ subtensæ cum curva tandem coincidant; erit ea major recta AB intra eosdem terminos contenta. Est ergo recta AB minor curva quacunque intra eosdem terminos contenta, hoc est, omnium linearum brevissima, quæ ab A usque ab B duci possunt. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

192. Distantia ergo puncti A a puncto B in plano est linea recta (§. 15, 36): cumque inter duo puncta nonnisi unica linea recta contineri possit (§. 170); via in plano brevissima est numero unica.

COROLLARIUM II.

193. Singula itaque peripheriæ puncta a centro circuli æqualiter distant (§. 37).

PROBLEMA IX.

Tab. II. Fig. 42. 194. *Metiri distantiam duorum locorum* A *&* B *ex eodem tertio* C *accessorum.*

RESOLUTIO.

1. In loco C ad arbitrium electo defigatur baculus.
2. Linea AC transferatur, ope funis & catenæ, ex C in *a*, ita ut baculus in *a* defigendus sit cum C & A in eadem recta (§. 125).
3. Eadem ratione ex C in *b* transferatur linea CB.
4. Investigetur longitudo rectæ *ab* (§. 126). Dico, *ab* esse æqualem distantiæ quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Cum loca A & B punctorum instar in eodem plano sitorum considerentur, eorum distantia est recta AB (§. 192). Quoniam vero A *a* & B *b* sunt lineæ rectæ, *per constr.* & se mutuo secant in C (§. 50),

erit $x = y$ (§. 156).

Præterea $aC = CA$, $bC = CB$ } *per constr.*

Ergo $ba = AB$ (§. 179). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in C, investigetur quantitas anguli *x* (§. 152). Tab. II. Fig. 42.
2. Quæratur porro longitudo rectarum AC & BC (§. 126).
3. Ex datis cruribus AC & CB, cum angulo intercepto *x*, construatur juxta Scalam geometricam modicam triangulum *acb* (§. 180).
4. Inveniatur in eadem mensura longitudo basis *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in ea mensura, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Est enim $acb = ACB$, & $ac : cb = AC : CB$, *per constr.* consequenter $cb : ab = CB : AB$ (§. 183). Ergo iidem numeri, qui respondent rectis *cb* & *ab* in mensura modica, etiam rectis CB & AB in majore respondent (§. 155 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In mensula geometrica, in D horizontaliter collocata, assumatur punctum *c*, & in eo acicula defigatur, ad quam Tab. II. Fig. 43.
2. applicata regula cum dioptris tam diu huc illucque moveatur, donec per ea prospicienti punctum B occurrat; ducaturque in hoc regulæ situ recta *cb*.

Tab.II. Fig.43. 3. Similiter collineatio fiat in punctum A, ducaturque *c a*.

4. Investigetur longitudo rectarum *c*A & *c*B (§. 126) &

5. Ex mensura modica transferantur lineæ istis proportionales ex *c* in *a* & *b*.

6. Tandem in eadem mensura inveniatur longitudo ipsius *ab* (§. 126).

Iidem numeri indicabunt distantiam AB in mensura majore, qua in campo usus es.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum proxime præcedente.

SCHOLION I.

Tab.II Fig.42. 195. *Quodsi angustia spatii non permittit, ut integræ* AC *&* BC *in* a *&* b *transferantur; poterunt* aC *&* bC *fieri* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4}$ *&c. ipsarum* AC *&* BC: *quo in casu, eodem modo ut in resolutione secunda, demonstrabitur, esse* ab $= \frac{1}{2}$, *vel* $\frac{1}{3}$, *vel* $\frac{1}{4}$ *&c. ipsius* AB.

SCHOLION II.

196. *Notent Tyrones artificium, quo demonstrationes geometricas non modo ad facillimam intelligentiam reducere, sed & proprio marte invenire possunt. Nimirum quicquid, vel ex constructione Problematis, aut hypothesi Theorematis, vel ex conspectu figuræ utramque repræsentantis, distincte cognoscitur, per characteres distincte exprimatur; veluti in Demonstratione prima præsentis, quod* $x = y$ aC = AC *&* bC = BC. *Quo facto, dispiciatur cujusnam Theorematum antecedentium hypothesis in iis contineatur: thesis enim illius Theorematis ostendit, quid ex iis consequatur, veluti in nostro exemplo, quod* ab = AB. *Cum vero maxima Demonstrationum pars ex paucis de congruentia & similitudine triangulorum Theorematis derivetur; eorundem recordatio tandem familiarissima evadat opus est.*

THEOREMA XXV.

197. *Si ex punctis extremis* C *&* O *rectæ alicujus, radiis* CP *&* PO, *qui junctim sumti recta* CO *majores sunt, describantur circuli, ii se mutuo secabunt.* Tab. I. Fig. 8.

DEMONSTRATIO.

Sit CP < CO; erit parti hujus veluti CN æqualis (§. 20 *Arithm.*), adeoque ipsi congruit (§. 168). Quare si ex centro C, radio CP, circulus PNQP describatur (§. 131); erit punctum N in peripheria ipsius (§. 173). Eodem modo ostenditur, si ex centro O radio OP describatur circulus; fore punctum M in peripheria ipsius. Cum ergo CN + NO < CP + PO, *per hypoth.* & CP = CN (§. 40); erit NO < PO (§. 92 *Arithm.*). Sed PO = MO (§. 40 & *per demonst.*). Ergo NO < MO (§. 89 *Arithm.*). Quare punctum N peripheriæ circuli PNQP cadit intra circulum PMRP; consequenter circuli se mutuo secant (§. 52). *Quod erat unum.*

Nec absimili modo idem ostenditur, si fuerit CP > CO, vel CP = CO. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA X.

198. *Super data recta* AB *triangulum æquilaterum construere.* Tab. I. Fig. 16.

RESOLUTIO.

1. Ex A tanquam centro, intervallo ipsius AB, describatur arcus *y*, &
2. Ex B, eodem intervallo, alius *x* (§. 131), qui priorem in C intersecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AC & CB:

Erit ACB triangulum æquilaterum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. I. Fig. 16. Etenim AC = AB, & BC = AB (§. 40). Ergo AC = BC (§. 87 *Arithm.*). Quare triangulum ABC est æquilaterum (§. 88). *Q. e. d.*

PROBLEMA XI.

199. *Data basi* DE, *& crure* DF, *quod illa dimidia majus sit; triangulum æquicrurum construere.*

RESOLUTIO.

Tab. I. Fig. 17.
1. Ex uno basis extremo D, intervallo cruris dati DF, describatur arcus, &
2. ex altero extremo E eodem intervallo arcus alius (§. 131), qui ob DF+EF > DE, *per hypoth. & constr.* priorem in F interfecabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ DF & EF (§. 121). Dico DFE esse triangulum æquicrurum.

DEMONSTRATIO.

DF = FE, *per constr.* Ergo EDF est triangulum æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

200. Determinatis ergo basi DE & crure DF, totum triangulum æquicrurum determinatur.

COROLLARIUM II.

201. Duo igitur triangula æquicrura DFE & *dfe* eodem modo determinantur, si fiat DF : DE = *df* : *de* (*§.* 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175 & 109).

THEOREMA XXVI.

Tab. II. Fig. 45. 202. *Duo semicirculi* CLE *&* DGF *nonnisi in puncto unico* G *se mutuo secare possunt.*

DEMONSTRATIO.

Secent enim, si fieri possit, præterea se etiam in L. Ducantur ex centris A & B ad puncta intersectionum L & G rectæ AL, AG; BL, BG; puncta item intersectionum connectantur recta GL (§. 121). Quoniam BL = BG (§. 40); erit BGL = BLG (§ 184). Sed BGL > AGL (§. 84 *Arithm.*): ergo BLG > AGL (§. 89 *Arithm.*). Porro quia AL = AG (§. 40); AGL = ALG (§. 184). Quare BLG > ALG (§. 89 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*); duo semicirculi nonnisi unico in puncto se mutuo secare possunt. *Q. e. d.* Tab. II. Fig. 45.

COROLLARIUM.

203. Ergo duo integri circuli non nisi duobus in punctis se mutuo secare possunt.

THEOREMA XXVII.

204. *Si in duobus triangulis* ACB *&* acb, *fuerit* AC = ac, AB = ab, BC = bc; *etiam* A = a, B = b, C = c, *totaque triangula æqualia sunt & similia.* Tab. II. Fig. 41.

DEMONSTRATIO.

Ex centro A, radio AC, descriptus concipiatur arcus *y*, & ex centro B, radio BC, alius *x* (§. 131). Concipiamus porro △*acb* ita poni supra △ACB, ut punctum *a* super A, & recta *ab* super AB, cadat. Quoniam *ab* = AB, *per hypoth.* punctum *b* super B cadet (§. 169). Et quia *ac* = AC, & *bc* = BC, *per hypoth.* recta *ac* in arcu *y* & *bc* in arcu *x* terminabitur (§. 173); consequenter punctum *c* super C cadet (§. 202), & rectæ *ac*, *bc* rectis AC, BC congruent (§. 170). Quare *a* = A, *b* = B,

Tab.II. Fig.41. b=B, c=C (§. 167); cumque △acb alteri ACB congruat (§. 3), △acb =& ∽ △ACB (§. 161). *Q. e. d.*

PROBLEMA XII.

Tab. I. Fig.18. 205. *Datis tribus lateribus* AB, BC, CA, *quorum duo simul sumta* AC & BC *tertio* AB *majora sunt; triangulum construere.*

RESOLUTIO.

1. Assumta AB pro basi, ex A, intervallo ipsius AC, describatur arcus y, &
2. ex B, intervallo ipsius BC arcus alius x (§. 131), qui ob AC+BC > AB *per hypoth.* priorem in C secabit (§. 197).
3. Ducantur rectæ AB & BC (§. 121). Ita factum est, quod petebatur.

COROLLARIUM I.

206. Cum ex tribus datis rectis nonnisi unicum triangulum construi possit (§. 204); determinatis tribus lateribus, totum triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

207. Quare si, in duobus triangulis ACB & acb, fiat AC : AB = ac : ab, AC : BC = ac : bc; triangula eodem modo determinantur (§. 119); consequenter similia (§. 120), adeoque sibi mutuo æquiangula sunt (§. 175, 109).

PROBLEMA XIII.

Tab.II. Fig.46. 208. *Angulo dato* DAE *æqualem* b a c *constituere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex A, intervallo AC, describatur arcus BC, erit AB=AC (§. 40).
2. Ducatur recta ac=AC, & ex a, intervallo ipsius AB, describatur arcus x; item
3. Ex c, intervallo ipsius CB, alius y, qui ob AB+BC > AC (§. 190), seu $ab+bc > ac$ (§. 190), priorem in b intersecabit (§. 197). Tab.II. Fig.46.
4. Ducatur recta ab (§. 121). Dico esse a=A.

II. In Solo,

1. Defigatur baculus in C cum A & E, itemque alius in B cum A & D in eadem recta (§. 125).
2. In a & c defigantur baculi, ea lege ut sit ac = AC.
3. Ad eos funis, vel catena ita applicetur, ut pars ipsius ab=AB, & altera cb=CB fiat.
4. In b defigatur baculus. Dico esse bac=BAC.

Interdum etiam in Solo uti licet modo priore.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu ac=AC, ab=AB, cb=CB, *per construct.* Ergo bac =BAC (§. 204). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIV.

209. *Angulum datum* HIK *in duas partes æquales dividere.* Tab.II. Fig.47.

RESOLUTIO.

1. Ex centro I ducatur, radio quocunque, arcus LM (§. 131).
2. Ex L & M, intervallo dimidia LM majore, ducantur arcus se mutuo secantes in N (§. 197).
3. Ducatur recta IN (§. 121). Dico esse HIN = NIK.

DEMONSTRATIO.

Est enim IL=IM (§. 40), LN=MN, *per constr.* IN = IN. Ergo HIN =NIK (§. 204). *Q. e. d.*

PRO-

PROBLEMA XV.

Tab.II. Fig.50. 210. *Lineam rectam* AB *in duas partes aequales dividere & in medio ejus perpendicularem erigere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex A & B, intervallo dimidia AB majore, ducantur arcus se mutuo in C secantes (§. 197).
2. Fiat similis intersectio infra lineam in D (§. *cit.*).
3. Ducatur recta DC (§. 121). Dico esse AE = EB.

DEMONSTRATIO.

Tr. ACB est aequicrurum (§. 199) & recta CED dividit angulum ACB bifariam (§. 209). Ergo eadem recta CD dividit AB bifariam in E, & ad AB in E perpendicularis est (§. 184). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.II. Fig.51. 1. Ponatur circinus in A & eo usque aperiatur, donec medium lineae attingere videatur in D.
2. Intervallum AD transferatur ex B in E: quo facto
3. Non difficile erit determinatu punctum medium F.

II. In Solo,

1. Filum longitudini lineae AB aequale complicetur, ut punctum medium inveniatur.
2. Hoc acicula infixa notetur & filum lineae datae rursus coextendatur.
3. Ad punctum medium baculus in terra defigatur.

Sic factum est, quod petebatur.

SCHOLION.

211. *Duo modi posteriores equidem secandi rectam bifariam mechanici dicuntur, non geometrici, quia tentando res peragitur: illorum tamen in praxi egregius est usus.*

PROBLEMA XVI.

212. *Ex puncto* G *in recta* ML *dato perpendicularem* GI *excitare.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in G, arbitrario intervallo resecentur utrinque partes aequales GK & GH. Tab.II. Fig.49.
2. Ex punctis K & H, intervallo dimidia KH majore, fiat intersectio in I (§. 197).
3. Ducatur recta GI (§. 121), quae erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Nam KG = GH, & KI = IH, *per construct.* IG = IG. Ergo anguli ad G sunt aequales (§. 204), consequenter IG ad ML perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Normae, hoc est, instrumenti ex duabus regulis ad angulum rectum junctis compositi crus unum ita applicetur ad rectam ML, ut anguli vertex supra punctum datum G cadat. Tab.II. Fig.52.
2. Ducatur juxta crus alterum recta IG (§. 121), quae erit ad ML perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Angulus normae est rectus, *per hypoth.* Sed ipsi aequalis est IGL (§. 167): ergo IGL est itidem rectus (§. 145), adeo-

adeoque IG ad ML perpendicularis (§. 78).

Tab.II. II. In Solo,

Fig.52. Norma utimur majore, & juxta crus GI filum extenditur. Aut

Tab.II. 1. Filum KIH, in duas partes æquales

Fig.49. in I divisum, ex punctis K & H extenditur &

2. In I baculus defigitur, tandemque

3. KH bifariam secatur in G (§.210).

Dico esse GI ad KH perpendicularem.

DEMONSTRATIO.

Cum KI=HI, & KG=GH, *per construct.* & GI = GI; anguli ad G deinceps positi sunt æquales (§. 204); consequenter IG ad ML normalis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

Tab. III. Fig.53. 213. *Ex uno puncto* D, *super eadem recta* AB, *nonnisi perpendicularis unica* CD *erigi potest in eodem plano.*

DEMONSTRATIO.

Si fieri potest, sit præterea DE ad idem punctum D perpendicularis, quæ intra crura anguli ADC cadat: erit ADE angulus rectus (§. 78). Et quoniam CD perpendicularis ad AD *per hypoth.* ADC similiter rectus est (§. *cit.*); consequenter ADE=ADC (§. 145): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), ED ad AB perpendicularis esse nequit. *Q.e.d.*

THEOREMA XXIX.

Tab. III. Fig.53. 214. *Si recta* CD *perpendicularis ad* DB *continuetur in* F, *erit etiam* DF *ad* DB *perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CD perpendicularis ad DB *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78). Ergo *y* similiter rectus est (§. 65, 145), consequenter DF perpendicularis ad DB (§. 78). *Q. e. d.* Tab. III. Fig.53.

THEOREMA XXX.

215. *Si duo puncta* H *&* Q *alicujus recta* HI *a duobus punctis* K *&* L *alterius recta* MN *utrinque æqualiter distent; erit* HI *ad* MN *perpendicularis.* Tab. III. Fig.54.

DEMONSTRATIO.

Quoniam puncta H & Q utrinque a punctis K & L æqualiter distant, *per hypoth.* HK=HL & QK=QL (§. 192). Est vero etiam QH=QH. Ergo *o*=*x* (§. 204); consequenter cum HI=HI, anguli ad I æquales (§. 179), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVII.

216. *A dato puncto* H *ad rectam* MN *perpendicularem* HI *demittere.* Tab. III. Fig.54.

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Posito circino in H, intervallo arbitrario, eodem tamen, intersecetur MN in K & L.
2. Ex K & L fiat intersectio in Q (§. 197).
3. Ducatur per Q recta HI (§.121).

Hæc erit ad MN perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH=LH & KQ=LQ *per construct.* puncta H & Q a punctis K & L utrinque æqualiter distant (§.192). Ergo HI ad MN perpendicularis (§. 215). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Applicetur norma ad lineam datam ML; ita ut crus unum eandem stringat, alterum vero punctum datum I attingat. Tab. II. Fig.52.

2. Du-

Tab.II. Fig.52. 2. Ducatur recta GI (§. 121), quæ ad ML perpendicularis erit.

DEMONSTRATIO.

Eadem est quæ in casu simili Problematis *16* (§. 212).

II. In Solo,

Tab. III. Aut utimur norma majore, ut in Probl. *16*, aut

Fig.54. 1. Fune ex H extenso designantur puncta K & L & in iis baculi defiguntur. (§. 125).

2. Intervallum KL dividitur bifariam in I (§. 210).

Dico, baculos in H & I defixos perpendicularem HI designare.

DEMONSTRATIO.

Quoniam KH = LH & KI = LI, *per construct.* HI = HI; anguli ad I sunt æquales (§. 204), adeoque HI ad MN perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXI.

Tab. III. Fig.56. 217. *Ab uno puncto* H, *ad eandem rectam* LM, *non nisi unica perpendicularis* HI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia HK ad LM itidem perpendicularis, erit *o* rectus (§.78). Quia HI ad LM perpendicularis, *per hypoth.* erit *x* quoque rectus (§ *cit.*). Est vero $o > x$ (§. 188), adeoque unus rectus altero recto major: quod cum sit absurdum (§. 145), a puncto H ad LM nonnisi unica perpendicularis duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XXXII.

218. *In omni triangulo rectangulo* HIK *angulus nonnisi* x *rectus est; reliqui* H *&* K *sunt acuti.*

DEMONSTRATIO.

Angulus *y* rectus est (§. 79). Sed $y > m$, item $y >$ H (§. 188). Ergo K & H sunt recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.* Tab. III. Fig.56.

COROLLARIUM I.

219. Angulorum igitur maximus in triangulo rectangulo est rectus.

COROLLARIUM II.

220. In triangulo rectangulo latus maximum est hypothenusa (§. 95, 189).

THEOREMA XXXIII.

221. *In triangulo obtusangulo* PNO *angulus obtusus nonnisi unicus est, reliqui* P *&* O *sunt acuti.* Tab. I. Fig.20.

DEMONSTRATIO.

$y + x = 2$ rectis (§. 147). Sed *y*, utpote obtusus *per hypoth.* major recto (§. 66). Ergo *x* recto minor. Quoniam vero $x >$ O, item $x >$ P (§.188); erunt O & P multo magis recto minores, adeoque acuti (§. 66). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

222. In triangulo obtusangulo angulorum maximus est obtusus.

COROLLARIUM II.

223. Ergo latus maximum, quod obtuso opponitur (§. 189).

PROBLEMA XXXIV.

224. *Linea perpendicularis* HI *est brevissima omnium, quæ a puncto* H *ad eandem rectam* LM *duci possunt.* Tab. III. Fig.56.

DEMONSTRATIO.

Quoniam HI perpendicularis ad LM, *per hypoth.* angulus *x* rectus est (§. 78), adeoque HK hypothenusa (§. 95), consequenter HK > HI (§. 220). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

225. Ergo distantia puncti a linea, vel plano, est recta ab illo puncto ad lineam vel planum perpendicularis (§. 15).

COROLLARIUM II.

Tab. III. Fig. 58. 226. Quare si linea HI fuerit ipsi KL parallela, erunt perpendicula quævis ex illa in hanc demissa GE, AB, CD inter se æqualia, & contra (§. 81).

COROLLARIUM III.

227. Altitudo figuræ est perpendiculum ex vertice in basin demissum (§. 115).

COROLLARIUM IV.

Tab. I. Fig. 19. 228. In triangulo rectangulo angulus K rectus (§. 91), & hinc cathetus unus MK ad alterum KL perpendicularis (§. 78). Ergo si KL sumatur pro basi, erit M vertex (§. 114), adeoque MK altitudo (§. 227).

COROLLARIUM V.

Tab. I. Fig. 21. 23. 229. Similiter in quadrato & oblongo latus unum cum altero efficit rectum C vel K (§. 98, 100), adeoque unum ad alterum perpendiculare (§. 78). Quod si ergo latus unum CD vel IK sumatur pro basi; erit A vel L vertex (§. 114), consequenter AC vel KL altitudo (§. 227).

THEOREMA XXXV.

Tab. III. Fig. 58. 230. *Si HI fuerit parallela & BA perpendicularis ad KL; erit eadem AB etiam perpendicularis ad HI.*

DEMONSTRATIO.

Fiat EB=BD & erigantur ex E & D perpendiculares EG & DC (§. 212); erit GE=CD (§. 226), & E=D (§. 78, 145); consequenter BG=BC & $y=u$ (§. 179). Sed quoniam AB perpendicularis ad KL, *per hypoth.* ideo $u+x=o+y$ (§. 79). Ergo & $x=o$ (§. 91 *Arithm.*). Quare cum porro sit AB=AB; erit & $m=n$ (§. 179), adeoque BA ad HI perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 58.

COROLLARIUM.

231. Sunt ergo EG, AB, CD distantiæ tum rectæ KL a recta HI, tum rectæ HI a recta KL (§. 225), adeoque si HI parallela ipsi KL, etiam KL parallela est ipsi HI (§. 81).

THEOREMA XXXVI.

232. *Parallelæ* AB *&* EF *eidem tertiæ* CD *sunt etiam parallelæ inter se, & parallelis parallelæ sunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig. 59.

DEMONSTRATIO.

Ducantur GI & KM perpendiculares ad CD (§. 216): erunt eædem perpendiculares ad AB & EF (§. 214, 230). Ergo GH=KL & HI=LM (§. 226); consequenter GH+HI=KL+LM (§. 88 *Arithm.*) hoc est, GI=KM (§. 86, 87 *Arithm.*); adeoque AB parallela ipsi EF (§. 226). *Quod erat unum.*

Posterius patet per prius.

THEOREMA XXXVII.

233. *Si duas parallelas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H; *erunt* 1°. *anguli alterni* y *&* u *æquales;* 2°. *angulus externus* x *æquatur interno opposito* u; 3°. *duo interni oppositi* o *&* u *sunt æquales duobus rectis.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

Si recta EF secet parallelas AB & CD ad angulos rectos, omnia manifesta sunt per Theorema 35 (§. 230). Si vero oblique secet; ducantur perpendiculares GI & HK (§. 212). Producatur GI in M & HK in L (§. 21), donec fiat IM=GI & KL=HK.

1°. Quo-

Tab. III. Fig. 60. 1°. Quoniam GI perpendicularis ad CD, *per constr.* erunt anguli ad I æquales (§. 79). Porro GI = IM, *per constr.* & HI = IH. Ergo GH = HM, & $u = z$ (§. 179). Eodem modo ostenditur esse HG = GL, & $y = t$. Quamobrem & GL = HM (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam HK = GI (§. 226) & hinc HK + KL = GI + IM (§. 88 *Arithm.*), hoc est, HL = GM (§. 86 *Arithm.*) & GH = GH: Unde $t + y = u + z$ (§. 204). Cum itaque $t = y$, & $u = z$ *per demonstrata*: erit $y + y = u + u$ (§. 15 *Arithm.*), hoc est $2y = 2u$, consequenter $y = u$ (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2°. $x = y$ (§. 156), & $u = y$ (*per num.* 1). Ergo $x = u$ (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

3°. $x + o = 180°$ (§. 148). Sed $x = u$ (*per num.* 2). Ergo $u + o = 180°$ (§. 15 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

PROBLEMA XVIII.

Tab. II. Fig. 41. 234. *Datis duobus lateribus* AB *&* BC, *cum angulo* A *uni eorum* BC *opposito; triangulum* ABC *construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducta recta AB, in puncto A excitetur angulus dato æqualis (§. 208), factaque AB uni datorum laterum æquali,
2. Ex B, intervallo alterius lateris dati BC, crus anguli AC intersecetur in C.
3. Puncta B & C connectantur recta (§. 121). *Sic factum est, quod petebatur.*
4. Quod si BC < BA; aut bis secabit crus AC, aut idem tangit; Tab. II. Fig. 41. adeoque in casu posteriore angulus ad C rectus est (§. 309), in priore constare debet, utrum angulus ad C sit acutus, an obtusus.

COROLLARIUM I.

235. Cum ex duobus lateribus, atque angulo uni eorum opposito, triangulum construi possit; iis datis, reliqui anguli & crus reliquum una determinantur. Quare si in duobus triangulis ejusdem speciei ABC & *abc*, fuerit $AB = ab$, $BC = bc$, & $A = a$; erit etiam $AC = ac$, $B = b$, $C = c$, & $\triangle ABC = \triangle abc$.

SCHOLION.

236. *In genere liquet, æqualia esse quæ per æqualia determinantur, seu, quod perinde est, figuras esse æquales quæ ex æqualibus datis eodem modo construuntur. Unde non solum triangulorum, verum etiam reliquarum figurarum congruentia ex hoc principio demonstrari potest.*

COROLLARIUM II.

237. Quodsi in duobus triangulis ejusdem speciei, veluti acutangulis ABC & *abc*, fuerit $A = a$ & $AB : BC = ab : bc$, triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120); consequenter etiam $B = b$, $C = c$, $BC : CA = bc : ca$ & $CA : AB = ca : ab$ (§. 175).

THEOREMA XXXVIII.

238. *Perpendicula* KH *&* GI *æquales parallelarum partes* KG *&* HI *intercipiunt.* Tab. III. Fig. 60.

DEMONSTRATIO.

KH = GI (§. 230, 226), $u = y$ (§. 233), & GH = GH. Ergo KG = HI (§. 235). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIX.

Tab. III. Fig. 61. 239. *Si trianguli cujuscunque* ACB *latus unum* BC *continuetur in* D; *erit angulus externus* DCA *æqualis duobus internis oppositis* y *&* z *simul sumtis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur CE basi AB parallela, erit $x = y$, & $o = z$ (§. 233); consequenter DCA $= x + o = y + z$ (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XL.

240. *In quovis triangulo* ACB *tres anguli* y, u, z *junctim sumti sunt æquales duobus rectis seu* 180°.

DEMONSTRATIO.

Nam $o + x = y + z$ (§. 239). Ergo $o + x + u = y + z + u$ (§. 88 *Arithm.*). Sed $o + x + u = 180°$ (§. 147). Ergo $y + z + u = 180°$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. I. Fig. 19. 241. In triangulo igitur rectangulo MKL, duo anguli obliqui M & L junctim sumti efficiunt rectum seu 90°, adeoque semirecti sunt, si triangulum fuerit æquicrurum (§. 184).

COROLLARIUM II.

242. Si unus angulus est obtusus; duo reliqui simul sumti sunt recto minores (§. 66).

COROLLARIUM III.

Tab. I. Fig. 16. 243. In triangulo æquilatero ACB quilibet angulus 60°, nimirum 180 : 3. (§. 186).

COROLLARIUM IV.

244. Cum itaque in triangulo rectangulo necessario angulus unus sit rectus (§. 91); triangulum rectangulum æquilaterum esse nequit.

COROLLARIUM V.

245. Si unus trianguli angulus ex 180° subtrahitur, summa duorum reliquorum relinquitur; &, si summa duorum ex 180° aufertur, residuus fit tertius.

COROLLARIUM VI.

246. Si duo anguli unius trianguli æquentur duobus alterius, sive sigillatim, sive junctim; etiam tertius unius æqualis est tertio alterius (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM VII.

247. In quovis triangulo anguli ad basin y & z junctim sumti sunt duobus rectis minores. Tab. III. Fig. 61.

COROLLARIUM VIII.

248. Quoniam in triangulo æquicruro DFE anguli ad basin y & u æquales sunt (§. 184); si angulus ad verticem F subtrahitur a 180°. & residuum bisecatur; unus angulorum æqualium y vel u prodit. Similiter, si duplum anguli unius ad basin y a 180° subtrahitur, angulus ad verticem F relinquitur. Tab. I. Fig. 17.

PROBLEMA XIX.

249. *In extremitate* F *lineæ* FG *perpendicularem* FH *excitare.* Tab. III. Fig. 62.

RESOLUTIO.

1. Super FG construatur △ æquilaterum FIG (§. 198).
2. Producatur GI in H (§. 21), donec fiat HI=GI.
3. Ducatur recta HF (§. 121): quæ erit ad FG perpendicularis.

DEMONSTRATIO.

Quoniam △ FIG est æquilaterum, *per constr.* $o = 60°$ & $u = 60°$ (§. 243). Ergo $y = 120°$ (§. 239); consequenter ob FI = HI *per constr.* $x = 30°$ (§. 248). Cum adeo $x + o = 90°$; angulus ad F rectus (§. 144) & HF ad FG perpendicularis est (§. 78). *Q. e. d.*

THEO-

THEOREMA XLI.

Tab. III. Fig.63. 250. *Si recta* DE *secet rectam* AB *in* C; *non alibi eandem denuo secabit.*

DEMONSTRATIO.

Occurrat enim, si fieri potest, recta DE alteri AB in alio adhuc puncto, ex. gr. in A: erunt rectæ ADCE puncta duo A & C in recta altera AB, consequenter recta ADCE tota supra AB cadit (§. 170), atque adeo eam non secat (§. 50): quod cum hypothesi repugnet, DE non alibi, quam in C, ipsam AB secare potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XLII.

Tab.II. Fig.41. 251. *Si in duobus triangulis* ABC *&* abc, *fuerit* AB=ab, A=a *&* B=b; *erit etiam* AC=ac, BC=bc, C=c, *&* △ACB=*&* ∽ △ acb.

DEMONSTRATIO.

Concipiamus △ *abc* poni supra alterum ABC, ita ut punctum *a* super A & recta *ab* super AB cadat. Quoniam *ab*=AB, *a*=A, & *b*=B, *per hypoth.* punctum *b* super B (§. 169), recta *ac* super AC & *bc* super BC (§. 166); consequenter *c* super C (§. 250) cadit. Cum adeo △ *abc* alteri ABC congruat (§. 3); erit *ac*=AC, *bc*=BC, *c*=C (§. 177), & △ *abc* = & ∽ △ ABC (§. 161). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

252. Si in duobus triangulis ACB & *acb* fuerit A = *a*, B = *b* & BC = *bc*; erit etiam C = *c* (§. 246), consequenter AC = *ac*, AB = *ab* & △ ACB = & ∽ △ *acb* (§. 251).

THEOREMA XLIII.

Tab.II. Fig.44. 253. *Si in triangulo* DFE *anguli ad basin* u *&* y *æquales; triangulum est æquicrurum.*

DEMONSTRATIO.

Secet FG angulum F bifariam (§. 209); erit DF = FE (§. 252). Est ergo △ DFE æquicrurum (§. 89). *Q. e. d.* Tab.II. Fig.44.

COROLLARIUM.

254. Si ergo tres anguli fuerint æquales; æquilaterum est (§. 88).

THEOREMA XLIV.

255. *Si duas lineas* AB *&* CD *secet transversa* EF *in* G *&* H, *ita ut vel* 1°. y = u; *vel* 2°. x = u; *vel* 3°. o + u = 180°; *erunt lineæ istæ inter se parallelæ.* Tab. III. Fig.60.

DEMONSTRATIO.

1. Demittantur ex H & G perpendiculares HK & GI (§. 212); erit K=I (§. 78, 145). Est vero & *y*=*u*, *per hypoth.* & HG=HG. Quare HK =GI (§. 252); consequenter cum HK & GI sint distantiæ linearum AB & CD (§. 225); lineæ AB & CD sunt inter se parallelæ (§. 81). *Quod erat primum.*

2. *x*=*u*, *per hypoth.* *x*=*y* (§. 156). Ergo *y*=*u* (§. 87 *Arithm.*); consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 1. *Quod erat secundum.*

3. *o*+*u*= 180°, *per hypoth.* Sed *o*+*x*= 180° (§. 147). Ergo *u*=*x* (§. 87 *Arithm.*), consequenter AB & CD sunt inter se parallelæ, *per num.* 2. *Quod erat tertium.*

THEOREMA XLV.

256. *Si duæ lineæ* EG *&* AB *fuerint perpendiculares ad eandem tertiam* HI; *erunt inter se parallelæ.* Tab. III. Fig.58.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. III. Fig. 58. Fiat AB = EG, ducaturque recta KL; erit HI ipsi KL parallela (§. 81); consequenter EB = GA (§. 238). Quare cum etiam sit GB = GB; erit EGB = ABG (§. 204); consequenter EG ipsi AB parallela (§. 255). *Q. e. d.*

THEOREMA XLVI.

Tab. III. Fig. 64. 257. *Parallelæ* DF *&* GA *inter easdem parallelas* FA *&* DG *sunt æquales. Et contra, si* DF *&* GA *fuerint parallelæ & æquales; erit etiam* FA *ipsi* DG *parallela & æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta DA (§. 121): erit $x = y$ & $o = u$ (§. 233). Quare cum AD = AD, erit DF = GA (§. 251). *Quod erat unum.*

DF = AG, *per hypoth.* & cum eædem lineæ sint parallelæ *per hypoth.* $o = u$ (§. 233). Quare cum etiam sit DA = DA, erit $x = y$ (§. 179); consequenter FA ipsi DG parallela (§. 255), adeoque etiam æqualis, *per num.* 1. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XX.

Tab. III. Fig. 65. 258. *Per datum punctum* V *parallelam rectæ* RS *ducere.*

RESOLUTIO.

I. In charta,

1. Ex V demittatur perpendicularis VK (§. 216).
2. Ex puncto quolibet T erigatur perpendicularis TA = KV (§. 212).
3. Per V & A ducatur recta MN, quæ erit ipsi RS parallela (§. 226).

Aliter.

1. Regula ad rectam RS applicetur & circinus intervallo VK aperiatur. Tab. III. Fig. 65.
2. Crus unum circini juxta ductum regulæ ab R versus S promoveatur.

Ita crus alterum per V parallelam ipsi RS describet (§. 81).

Aliter.

1. Per datum punctum V ducatur utcunque recta RG.
2. In V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit VN seu MN parallela ipsi RS (§. 255).

Aliter.

Ex modo præcedente enatus est sequens. Tab. III. Fig. 66.

1. Triangulum rectangulum AVN, ex ligno ebenino aut alio Indico paratum, ita applicetur ad rectam RS, ut basis ejus VN parti ipsius congruat.
2. Hypothenusæ ejusdem Trianguli AV applicetur regula RG, quæ altera manu in hoc situ immota detineatur.
3. Triangulum AVN juxta ductum regulæ promoveatur, donec basis punctum V attingat.

Erit enim in quovis situ, basis VN, ob $y = x$, ipsi RS parallela (§. 255). *Q. e. d.*

Aliter.

Utimur interdum *Parallelismo*, ex duabus regulis ligneis potius, quam orichalceis (§. 122) AB & CD composito, quæ ejusdem ubique latitudinis retinaculis EF & GH inter se æqualibus ita conjunguntur, ut retinacula intervallis æqualibus EG & FH a se invicem distent, ipsæ autem regulæ variis intervallis diduci queant. Nimirum Tab. III. Fig. 67.

1. Re-

Tab. III. Fig. 67. 1. Regula una debite applicetur ad rectam RS.

2. Altera ad datum punctum V adducatur, &

3. Juxta hujus ductum recta AB per V ducatur; quæ erit ipsi RS parallela.

DEMONSTRATIO.

Ducatur obliqua linea EH (§. 121). Quoniam EG = FH, EF = GH, *per constr.* & EH = EH, erit $o = x$ (§. 204), adeoque FH parallela ipsi EG (§. 255). Sed AB ipsi EG, & RS ipsi FH parallela, *per constr.* Ergo AB parallela ipsi RS (§. 232). *Q. e. d.*

II. In campo,

Tab. III. Fig. 68. Commode utimur modo primo antecedentium, vel

1. In puncto quolibet K defigatur baculus cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Ad V fiat $o = x$ (§. 208).

Erit MV, quæ facile produci potest in N (§. 125), ipsi RS parallela (§. 255).

Aliter.

1. In punctis K & T defigantur baculi cum aliis in R & S defixis in eadem recta (§. 125).

2. Fiat $u = x$ (§. 208), & TA = VK.

3. In M & N defigantur baculi cum aliis in V & A defixis in eadem recta (§. 125).

Erit MN parallela ipsi RS.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $x = u$, *per constr.* erit TA parallela ipsi KV (§. 255); consequenter $z = y$ (§. 233). Est vero etiam TA = KV, *per construct.* & TV = TV. Ergo $m = n$ (§. 179); consequenter MN parallela ipsi RS (§. 255). *Q. e. d.*

SCHOLION.

259. *Si parallelismis crebro utaris, retinacula continuo affrictu nimis efforantur & a rectitudine cito recedunt ipsi parallelismi. Huic malo præsens remedium attulit* Jacobus Leupoldus, *artifex insignis, qui retinacula ex geminis lamellis orichalceis elasticis, in medio firmiter connexis, & capita clavorum, quibus regulis affiguntur, conica parare solet. Notum vero est, orichalcum ad elasticitatem usque vehementi contusione indurari.*

THEOREMA XLVII.

260. *Per idem punctum C eidem rectæ* DE *parallela nonnisi unica* AB *duci potest.* Tab. III. Fig. 69.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim, si fieri potest, adhuc alia HG, priorem secans in C, cujus adeo pars GC efficit cum parte alterius CB angulum BCG. Ex I erigatur perpendicularis IL (§. 212); erit tum IK ad CG, tum IL ad CB perpendicularis (§. 230), consequenter anguli CKL (§. 214) & CLK recti (§. 78): quod cum sit absurdum (§. 218), per C nonnisi AB ipsi DE parallela duci potest. *Q. e. d.*

Aliter.

Angulus NCH = NQD & NCA = NQD (§. 233). Ergo NCH = NCA (§. 87 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*), HG & AB non sunt simul ipsi DE parallelæ. *Q. e. d.*

THEOREMA XLVIII.

261. *Si recta* NO *secet duas rectas alias* HG *&* DE *in* C *&* Q, *ita ut duo* Tab. III. Fig. 69.

Tab. III. Fig. 69. *duo anguli interni oppositi* HCO *&* DQN *fuerint simul sumti duobus rectis majores; lineæ* GH *&* ED *versus eam plagam divergunt.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur ACB parallela ipsi DE per C (§. 258); tum angulus ACO cum angulo DQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed HCO & DQN simul sunt duobus rectis majores *per hypoth.* Ergo HCO > ACO (§. 92 *Arithm.*); consequenter AC intra spatium HCQD cadit. Erigatur perpendicularis PS (§. 212): erit PR=CF (§. 226), consequenter PS > PR (§. 84 *Arithm.*) > CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CH & QD versus H & D crescunt (§. 225), adeoque lineæ CH & QD versus eam plagam divergunt (§. 84). *Q. e. d.*

THEOREMA XLIX.

262. *Si duas rectas* HG *&* DE *secet transversa* NO *in* C *&* Q, *ita ut anguli* GCO *&* EQN *simul sumti sint duobus rectis minores; lineæ* CG *&* QE *versus eam plagam convergunt.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam CG ipsi QE parallela esse nequit (§. 233), ducatur AB parallela ipsi DE per C (§. 258): tum angulus BCQ cum angulo EQN efficiet duos rectos (§. 233). Sed GCO & EQN simul sumti sunt duobus rectis minores, *per hypoth.* Ergo GCO < BCQ, (§. 92 *Arithm.*); consequenter CB extra spatium GCQE cadit. Demittantur perpendiculares LI & CF (§. 216); erit CF=IL (§. 226); consequenter IK < IL (§. 84 *Arithm.*) < CF (§. 89 *Arithm.*). Distantiæ igitur rectarum CG & QE decrescunt versus G & E (§. 225), adeoque lineæ CG & QE versus eam plagam convergunt (§. 83). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

263. Si anguli GCQ & EQC simul sumti fuerint duobus rectis minores; erunt ipsi deinceps positi duobus rectis majores (§. 147). Quare lineæ, quæ versus unam plagam convergunt (§. 262), versus oppositam divergunt (§. 261).

PROBLEMA XXI.

264. *Datis recta* AB, *& angulis adjacentibus* A *&* B, *qui junctim sumti duobus rectis minores sunt, triangulum* ABC *describere.* Tab. I. Fig. 18.

DEMONSTRATIO.

1. Ad datam rectam AB excitentur anguli dati A & B (§. 155).
2. Crura AC & BC continuentur, donec sibi mutuo occurrant in C (§. 250, 262). ABC triangulum erit desideratum.

COROLLARIUM I.

265. Data ergo linea una, datisque duobus angulis, triangulum determinatur.

COROLLARIUM II.

266. Quare si in duobus triangulis fiat A = *a*, & B = *b*; triangula eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similia sunt (§. 120). Tab. II. Fig. 41.

COROLLARIUM III.

267. Si in duobus triangulis fuerit A = *a*, & B = *b*; consequenter in rectangulis unus obliquorum in uno æqualis uni in altero (§. 145); erit etiam C = *c* (§. 246); hoc est, △△ ACB & *acb* sibi mutuo æquiangula (§. 109).

(§. 109). Quare △△ sibi mutuo æquiangula similia sunt (§. 296), & hinc latera homologa, seu æqualibus angulis opposita, proportionalia habent (§. 175).

THEOREMA L.

Tab. III. Fig. 70. 268. *Si in triangulo* ABC *recta* DE *basi* AC *parallela ducatur; segmenta crurum cruribus proportionalia sunt; hoc est*, BA : BC = BD : BE = AD : EC; *&* BA : AC = BD : DE; *atque* △ BDE ∽ △ BAC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam DE parallela ipsi AC, erit $x=y$, & $o=u$ (§. 233); adeoque △ BDE ∽ △ BAC, & BA : BC = BD : BE, & BA : AC = BD : DE (§. 267). Ergo & BA : BD = BC : BE (§. 173 *Arithm.*); consequenter AD : BD = EC : BE (§ 193 *Arithm.*), seu BD : AD = BE : EC (§. 169 *Arithm.*), vel denique BD : BE = AD : EC (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LI.

Tab. III. Fig. 71. 269. *Recta* FH, *angulum* GFE *bifariam secans, basin* GE *cruribus adjacentibus* EF *&* GF *proportionaliter secat.*

DEMONSTRATIO.

Producatur EF in I (§. 21), donec fiat FI = FG, erit $o+x=y+u$ (§. 239). Sed $o=x$, *per hypoth.* & $y=u$ (§. 184), adeoque $2y=2o$ (§. 15 *Arithm.*). Ergo $o=y$ (§. 94 *Arithm.*); consequenter HF ipsi GI parallela (§. 255). Quare EF : EH = FI : GH (§. 268) = GF : GH (§. 168 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

270. Est ergo & EF : GF = EH : GH (§. 173 *Arithm.*); consequenter EF + FG : EF = GE : EH (§. 190 *Arithm.*); seu EF + FG : GE = EF : EH (§. 173 *Arithm.*); hoc est, ut summa crurum ad basin integram, ita crus unum ad segmentum hujus adjacens. *Q. e. d.* Tab. III. Fig. 71.

PROBLEMA XXII.

271. *Datis tribus lineis* AB, AC *&* BD, *invenire quartam proportionalem.* Tab. III. Fig. 72.

RESOLUTIO.

1. Ducatur angulus non nimis acutus FAG pro arbitrio.
2. Ex A in B transferatur linearum datarum prima; ex A in C altera; ex B in D tertia.
3. Ducatur recta BC (§. 121).
4. In D constituatur angulus x ipsi ABC æqualis (§. 208).

Dico, esse AB : AC = BD : CE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $o=x$, *per constr.* erit BC ipsi DE parallela (§. 255). Quamobrem AB : AC = BD : CE (§. 268). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

272. Quodsi duabus lineis AB & AC datis tertia inveniri debet; etiam BD ipsi AC æqualis fieri, hoc est, AC bis poni debet. Erit nimirum AB : AC = AC : CE.

COROLLARIUM II.

273. Si DB sumatur pro unitate; respondebit CE exponenti rationis AC : AB (§. 140 *Arithm.*).

PROBLEMA XXIII.

274. *Datam rectam* AB *in quotcunque partes æquales dividere.* Tab. IV. Fig. 73.

RESOLUTIO.

1. Ex recta CD pro arbitrio assumta resecentur tot partes æquales, in quot data AB dividenda, ex. gr. 5.

Tab. IV. Fig. 73. 2. Super harum partium intervallo construatur triangulum æquilaterum CED (§. 198).

3. Ex E in *a* transferatur recta AB, itidemque ex E in *b*.

4. Ducatur recta *ab*: ducantur itidem aliæ ex E in 1, 2, 3, &c.

Dico esse $ab = AB$, $a1 = \frac{1}{7}AB$, $a2 = \frac{2}{7}AB$, &c.

DEMONSTRATIO.

Quoniam $Ea = Eb$, & $EC = ED$, *per construct.* erit $Ea : Eb = EC : ED$. (§. 168, 173 *Arithm.*). Quare, cum angulus E utrique triangulo ECD & E*ab* communis sit, erit $EC : CD = Ea : ab$, & $o = x$, (§. 183). Sed $EC = CD$, *per construct.* Ergo $Ea = AB = ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam $o = x$, *per demonstr.* erit *a*1 parallela ipsi C1 (§. 255); consequenter $EC : C1 = Ea : a1$ (§. 268), hoc est, ob $EC = CD$, *per construct.* & $Ea = ab$, *per demonstr.* $CD : C1 = ab : a1$ (§. 168 *Arithm.*). Sed $C1 = \frac{1}{7}CD$, *per construct.* Ergo $a1 = \frac{1}{7}ab$ (§. 151 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Eodem modo ostenditur, esse $a2 = \frac{2}{7}AB$, consequenter $12 = \frac{1}{7}AB$, & ita porro.

COROLLARIUM.

Tab. IV. Fig. 74. 275. Quodsi ergo CD fuerit utcunque divisa in 1 & 2; eodem modo recta *ab* secabitur in eadem ratione. Est nempe $CD : C1 = ab : a1$, & $CD : C2 = ab : a2$, &c. (§. 274).

SCHOLION.

276. *Corollarii hujus usus amplissimus est in Architectura tam civili, quam militari; præsertim ubi Ichnographiæ vel amplianda, vel contrahendæ.*

PROBLEMA XXIV.

277. *Scalam geometricam construere.* Tab. IV. Fig. 75.

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AF, & in eam transferantur partes 10 æquales B1, 12, 23, 34, &c. intervallum vero 10 partium AB totidem ex B in E, ex E in F, &c. quoties libuerit.
2. In A excitetur perpendicularis AC arbitrariæ longitudinis, in partes 10 æquales divisa (§. 249).
3. Per puncta divisionum 1, 2, 3, 4, 5 &c. agantur parallelæ cum AF (§. 258).
4. In ultimam CD transferantur partes 10 partibus ipsius AB æquales.
5. Tandem puncta 10 & 9, 9 & 8, 8 & 7, &c. lineis transversis connectantur (§. 121).

Dico, si AB fuerit decempeda, fore B1, 12, 23, 34 &c. pedes, 99 digitum unum, 88 digitos duos, 77 tres, 66 quatuor &c.

DEMONSTRATIO.

$B1 = 12 = 23$ &c. $= \frac{1}{10}AB$, *per construct.* Sed pes est decempedæ pars decima (§. 25). Ergo cum AB sit decempeda, *per hypoth.* erunt B1, 12, 23 &c. pedes. *Quod erat unum.*

Porro quia 99 est parallela ipsi A9, *per construct.* $C9 : CA = 99 : A9$, (§. 268). Sed $C9 = \frac{1}{10}CA$, *per construct.* Ergo $99 = \frac{1}{10}A9$ (§. 151 *Arithm.*). Quare cum A9 sit pes, *per demonstr.* erit 99 digitus (§. 25). Eodem modo ostenditur esse 88 duos, 77 tres &c. digitos. *Quod erat alterum.*

SCHO-

SCHOLION.

Tab. IV. Fig. 75. 278. *Quemadmodum hic linea exigua A 9 in 10 partes æquales dividitur; ita eadem in quotcunque alias eodem artificio dividi potest. Neque opus est, ut angulus A sit rectus; sed idem obliquus esse potest.*

COROLLARIUM.

279. Quodsi ergo circini crus unum collocatur in I & alterum in K; erit intervallum IK = 1° 4′ 5″ & ita porro.

PROBLEMA XXV.

Tab. IV. Fig. 76. 280. *Invenire distantiam duorum locorum* AB, *quorum unus B tantum accedi potest.*

RESOLUTIO.

1. Baculo ad arbitrium in E defixo, recta BE transferatur ex E in C, ita ut baculus in C defixus sit cum E & B in eadem recta (§. 125).
2. In C constituatur angulus ECF ipsi B æqualis (§. 208).
3. Tandem ex C progrediendum versus D, donec baculus in D defixus sit cum F & C, itemque cum E & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse DC=BA.

DEMONSTRATIO.

Nam BE=EC, *o*=*x*, *per construct.* & *y*=*u* (§. 156). Ergo AB=DC (§. 251). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. IV. Fig. 77. 1. Defigatur baculus in I cum B & A in eadem recta (§. 125), itidemque alius utcunque in K.
2. Ex K in L transferatur IK, in M vero KB.
3. Denique ex K progrediendum in N, donec baculus ibi defixus sit cum M & L, itidemque cum K & A in eadem recta (§. 125).

Dico esse MN=BA.

DEMONSTRATIO.

BK=KM, & IK=KL, *per construct.* Tab. IV. Fig. 77.
o=*u*, (§. 156). Ergo IB=ML, & *y*=*x* (§. 179). Quare cum sit *o*+*m*=*u*+*n* (§. 156), & IK = KL, *per constr.* erit IA=NL (§. 251); consequenter AB=NM (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula geometrica in C collocata, per dioptras collineetur in A & B, ducanturque rectæ *ac* & *cb*. Tab. IV. Fig. 78.
2. Quæratur distantia stationis a loco accesso AC (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica in *ac* transferatur (§. 277).
4. Translocetur mensula in A, ita ut punctum *a* ipsi A immineat, & per dioptras regulæ ad *ac* applicatæ baculus in prima statione C defixus conspiciatur.
5. Mox collineatio in B fiat, ducaturque *ab*.
6. Denique in Scala geometrica capiatur intervallum ipsius *ab* (§. 277).

Ita distantia quæsita AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *c*=C, & *a*=C, (*per construct.* & §. 167), erit *ac* : *ab* = AC : AB (§. 267), hoc est, iidem numeri rationes *ac* : *ab* & AC : AB indigitant (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Baculo in C defixo investigetur quantitas angulorum A & C (§. 152), itemque longitudo ipsius AC (§. 126).
2. Ope Instrumenti transportatorii & Scalæ geometricæ construatur triangulum *acb* (§. 264).

Tab. IV. Fig. 78. 3. Ad Scalam geometricam applicetur recta *ab* (§. 277). Ita distantia AB innotescet.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ proxime præcedens.

PROBLEMA XXVI.

281. *Metiri distantiam duorum locorum inaccessorum* AB.

RESOLUTIO.

Tab. IV. Fig. 76. Sine Instrumentis tædiosior est Problematis resolutio, quam ut commendari possit. Cui tamen volupe fuerit eandem experiri, is

1. Statione in E assumta rectas BE & AE inveniat (§. 280).
2. His datis reperiet DC ipsi BA æqualem (§. 194).

Aliter.

Tab. IV. Fig. 79.

1. Duabus stationibus in C & D electis, in prima C collocetur mensula, & per dioptras collineetur in D, B, & A, ducanturque juxta regulæ, cui affiguntur, ductum rectæ *cd*, *cb*, *ca*.
2. Quæratur distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ex Scala geometrica transferatur in *cd* (§. 279).
4. Baculo in C defixo, mensula collocetur in D, ea lege ut punctum *d* ipsi D, hoc est puncto in quo defigebatur ante baculus immineat, & per dioptras regulæ ad *cd* applicatæ respicienti baculus in C occurrat.
5. Hinc porro collineatio fiat in A & B, ducanturque rectæ *da* & *db*.
6. Tandem distantia punctorum *a* & *b* investigetur in Scala geometrica (§. 279).

Dico esse *cd* : *ab* = CD : AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim *cdb* = CDB, & *bcd* = BCD (*per construct.* & §. 167). Ergo *dc* : *cb* = DC : CB (§. 267). Similiter cum sit *acd* = ACD, & *adc* = ADC (*per construct.* & §. 167), erit *dc* : *ac* = DC : AC, adeoque *bc* : *ac* = BC : AC (§. 196 *Arithm.*); consequenter, ob *acb* = ACB (*per construct.* & §. 167), *ac* : *ab* = AC : AB (§. 183), & ob *dc* : *ac* = DC : AC (*per demonstr.*) *dc* : *ab* = DC : AB (§. 197 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab. IV. Fig. 79.

Aliter.

Tab. IV. Fig. 80.

1. Electis duabus stationibus C & D, investigetur quantitas angulorum *y* & *x*, item *z* & *w* (§. 152), quorum summæ dant angulos C & D (§. 86 *Arithm.*).
2. Quæratur porro distantia stationum CD (§. 126), &
3. Ducatur in charta linea recta, in quam ex Scala geometrica transferatur recta *cd* ipsi CD respondens (§. 279).
4. Super ea, ope angulorum *x* & D, construatur triangulum *bcd*, &, ope angulorum *z* & C, alterum *acd* (§. 264).
5. Tandem in Scala geometrica investigetur distantia punctorum *a* & *b* (§. 279).

Dico esse *ab* : *cd* = AB : CD.

DEMONSTRATIO.

Eadem est cum proxime præcedente.

SCHO-

SCHOLION I.

282. *Levi attentione patet, non absimili methodo ex duabus stationibus reperiri distantias plurium locorum.*

SCHOLION II.

Tab. IV. Fig. 81. 283. *Nec minus manifestum est, mensulæ situm in istiusmodi operationibus horizontalem esse debere: id quod obtinetur ope perpendiculi* Q.

PROBLEMA XXVII.

284. *Altitudinem accessam* AB *metiri.*

RESOLUTIO.

Tab. V. Fig. 82. 1. Baculus DE tantæ longitudinis sumatur, ut terræ perpendiculariter infixus altitudinem oculi adæquet.
2. Humi prostratus baculum ad calces pedum perpendiculariter terræ infigi cura (§. 121).
3. Quodsi contingat, ut E & B sint cum oculo C in eadem recta; erit CA =AB; sin punctum inferius F cum E & oculo in eadem recta fuerit; propius cum baculo ad altitudinem AB provolvaris opus est; sin punctum superius; procul recedendum, donec prædicta conditio adimpleatur.
4. Tandem distantiam oculi C ab altitudine AB metiaris necesse est (§. 126).

Dico esse CA = AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim AB (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares, inter se parallelæ sunt (§. 256), adeoque CD : DE = CA : AB (§. 268). Sed CD = DE, *per hypoth.* Ergo CA = AB (§. 149 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In distantia plurium, ex. gr. 30, 40, & amplius, pedum defigatur perpendiculariter baculus DE, & aliquo hinc intervallo in C alius minor, ita ut cum oculo in F constituto E & B sint in eadem recta. Tab. V. Fig. 83.
2. Investigetur distantia baculorum GF, & baculi minoris ab altitudine quæsita HF, itemque differentia altitudinum baculorum GE (§. 126).
3. Quæratur ad GF, GE & HF quarta proportionalis BH (§. 302 *Arithm.*).
4. Huic addatur altitudo baculi minoris FC, vel pars AH.

Dico summam esse altitudinem AB.

Ex. gr. Sit HF = 48′, GF = 20′, GE = 16′, FC = 5′.

```
20 : 16 = 48 | 5) 192(38 2/5 = BH
 5    4    4 |     15    5   = FC
          192|     42  43 2/5 = AB
                   40
                    2
```

DEMONSTRATIO.

Cum HF ipsi AC parallela supponatur, sintque BA (§. 227) & ED *per construct.* ad AC perpendiculares; erunt eædem perpendiculares ad HF (§. 230); adeoque GE & BH parallelæ (§. 256); consequenter GF : GE = HF : HB (§. 268). *Quod erat unum.*

Porro cum HA & FC sint perpendiculares inter easdem parallelas HF &

Tab.V. & AC (*per constr.* & §. 227); erit FC
Fig.83. = HA (§. 226). Quare BH = FC = BH + HA (§. 88 *Arithm.*) = BA (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab.V. Fig.84. Tab. IV. Fig.81.

1. Mensula in D verticaliter erigatur, ita ut latus ipsius FE sit horizonti parallelum: id quod obtinetur ope perpendiculi Q.
2. Ducatur recta *ef* lateri mensulæ parallela, & regula cum dioptris ad hanc applicata vertatur mensula, donec collineatio in altitudinem quæsitam fiat.
3. Circa punctum *e* vertatur regula, donec oculo per dioptras transpicienti apex altitudinis A occurrat, ducaturque recta *eb*.
4. Quæratur distantia stationis ab altitudine *e* C (§. 126), &
5. Ex Scala geometrica minore transferatur ex *e* in *c* (§. 279):
6. Ex *c* erigatur perpendiculum *bc* (§. 212), quod
7. Ad Scalam geometricam applicatum (§. 279) partem altitudinis AC manifestat.
8. Addatur altitudo BC.

Dico, summam esse altitudinem AB.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AC perpendicularis ad BD (§. 227), & C*e* ipsi BD parallela *per constr.* erit eadem AC perpendicularis ad C*e* (§. 230). Sed ad eandem etiam *bc* perpendicularis, *per constr.* Ergo *bc* ipsi AC parallela (§. 256); consequenter *ec* : *cb* = *e*C : CA (§. 268).

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli *e* (§. 152), & distantia stationis *e* C (§. 126). Tab.V. Fig.84.
2. Super *ec* in Scala geometrica minore assumta (§. 279) construatur triangulum ad *c* rectangulum *ecb* (§. 264).
3. Reliqua fiant ut ante.

DEMONSTRATIO.

Est enim *e*=C, & *e*=E, *per constr.* Ergo *ec* : *cb* = *e*C : CB (§. 267). *Q. e. d.*

SCHOLION.

285. *In omnibus istis resolutionibus supponitur planities perfecte horizontalis: quæ cum rarissime in praxi occurrat, si notabilis fuerit declivitas, non tam Instrumenti altitudo, quam ipsa* CB *addenda, in altitudine accessa facile investiganda. Necesse etiam est, ut baculi, quantum fieri potest, exactissime ad horizontem perpendiculariter infigantur, & in Instrumentis præscripta ratione collocandis cura maxima adhibeatur: immo altitudo* BC *eodem modo investigari potest, quo ipsam* AC *invenimus.*

PROBLEMA XXVIII.

286. *Altitudinem inaccessam* AB *metiri.* Tab.V. Fig.83.

RESOLUTIO.

Sine Instrumentis prolixa est operatio. Nimirum

1. Distantia stationis CA vel FH quæritur, per Problema 25 (§. 280).
2. Reliqua fiunt, ut in Problemate præcedente (§. 284).

Aliter.

1. Statione in D electa, mensula collocetur ut in Problemate præcedente (§. 234). Tab.V. Fig.85. n. 1.

2. Du-

Tab.V. 2. Ducantur ut ibidem rectæ *ef* & *af*.

Fig. 85. 3. Baculi in G defixi, ut sit in recta

n. 1. *fC*, quæratur distantia a puncto *f* (§. 126), &

4. Ex Scala geometrica transferatur in *fe* (§. 279).

5. Sub puncto *f* in D defigatur baculus, & mensula ita collocetur in G, ut punctum *e* ipsi G immineat, & per dioptras regulæ ad *ef* applicatæ respicienti baculus in D occurrat.

6. Vertatur regula circa punctum *e*, donec per dioptras prospiciens apicem A videat, ducaturque recta *ea*.

7. Ex puncto *a* demittatur *ac* ad *fc* perpendicularis (§. 216): quæ

8. Ad Scalam geometricam (§. 279) applicata prodit altitudinem AC.

n. 2. 9. Quodsi puncta, B, G, D fuerint in eadem recta, addatur altitudo puncti *f* ut habeatur AB; sin minus, regula circa *e* vertatur, donec per dioptras despiciens videat B, ducatur *eb*, & perpendiculum *ac* continuetur, donec ipsi *eb* in *b* occurrat. Etenim *ab* in Scalam geometricam translata manifestabit AB.

DEMONSTRATIO.

In △△ enim *fea* & F*e*A, est angulus *afe* = AF*e*, & *aef* = A*e*F, *per constr.* Ergo *fe* : *ea* = F*e* : *e*A (§. 267). Porro AC & *ac* perpendiculares ad FC (*per* §. 227 *& constr.*) adeoque inter se parallelæ (§. 256). Quare *ae* : *ac* = A*e* : AC (§. 268), consequenter *fe* : *ac* = F*e* : AC (§. 194 *Arithm.*). *Quod erat unum.* Tab.V. *Fig.* 85.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per demonstrata*: erit *ae* : *ab* = A*e* : AB (§. 268); consequenter *fe* : *ab* = F*e* : AB (*per demonst. &* §. 194 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

1. Investigetur quantitas anguli AFC in D, & anguli A*e*C in G; itemque C*e*B in eadem statione G (§. 152).
2. Quæratur distantia F*e* (§. 126).
3. Construatur ex his datis juxta Scalam modicam triangulum *aef* (§. 279).
4. Demittatur ex vertice *a* in basin continuatam perpendicularis *ac* (§. 216) indefinite producenda.
5. Fiat angulus *ceb* ipsi C*e*B æqualis (§. 208), & producatur crus *eb*, donec perpendiculari *ab* in *b* occurrat (§. 21).

Dico esse *fc* : *ab* = FC : AB.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

CAPUT IV.

De Circuli Symptomatis.

THEOREMA LII.

Tab. I. Fig. 5. 287. *Circuli se intus tangentes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus unus alterum intus tangit, *per hypoth.* ille totus intra hujus peripheriam continetur (§. 47). Quare si ex centro ejus C ducatur in peripheriam majoris recta CN (§. 121); ea peripheriam minoris in M secabit (§. 50), eritque adeo radius minoris CM pars ipsius CN (§. 9 *Arithm.*). Quodsi jam C ponatur centrum commune circulorum; erit CL=CM, & CL=CN (§. 40), adeoque CM=CN (§ 87 *Arithm.*), quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIII.

Tab.V. Fig. 86. 288. *Duo circuli se mutuo secantes sunt eccentrici.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam circulus X alterum Z secat, *per hypoth.* pars illius intra hunc cadit (§. 53). Ducatur itaque ex C centro circuli X radius CB, qui continuatus ad peripheriam circuli Z secabit peripheriam illius in E (§. 50); eritque CB pars ipsius CE (§. 9 *Arithm.*). Quodsi C ponatur centrum etiam circuli Z; erit CB=AC, & CE=AC (§. 40); adeoque CB=CE (§. 87 *Arith.*). Quod cum sit absurdum (*per demonstr.* & §. 84 *Arithm.*); circuli X & Z idem centrum habere nequeunt. Sunt ergo eccentrici (§. 44). *Q. e. d.*

THEOREMA LIV.

289. *In eodem vel in æqualibus circulis, chordæ æquales* AB & DE *æquales arcus subtendunt: & contra.* Tab.V. Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB=DE *per hypoth.* BC=CE, & AC=CD (§. 40), angulus ACB=DCE (§. 204); consequenter arcus AB & DE, mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57), æquales sunt (§. 142). *Quod erat primum.*

Arcus AB & DE æquales sunt, *per hypoth.* Sunt vero etiam iidem mensuræ angulorum ACB & DCE (§. 57): anguli igitur isti æquales sunt (§. 142). Quoniam porro BC=CE, & AC=CD (§. 40); erit quoque AB=DE (§. 179). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LV.

290. *Si in circulis inæqualibus arcus* AB & ab *fuerint similes; chordæ cognomines ad suos radios* AC & ac *eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AB & *ab* similes sunt, *per hypoth.* iidemque mensuræ angulorum ACB & *acb* (§. 57); erit ACB = *acb* (§. 141). Est vero AC : BC = *ac* : *bc* (§. 40 *Geom.* & §. 149 *Arithm.*). Ergo AB : BC = *ab* : *bc* (§. 183). *Q.e.d.*

THEO-

THEOREMA LVI.

Tab.V. Fig.88. 291. *Radius* CE, *chordam* BA *bifariam secans in* D, *etiam arcum bifariam secat in* E; *& ad chordam* BA *perpendicularis: & contra.*

DEMONSTRATIO.

AD=DB, *per hypoth.* AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo $o=x$, & $y=u$ (§. 204); consequenter CE ad AB perpendicularis in D (§. 79), & arcus AE atque EB, æqualium angulorum u & y mensura (§. 57), æquales sunt (§. 142): *Quod erat primum.*

Sint arcus AE & EB æquales *per hypoth.* cum iidem sint mensuræ angulorum u & y (§. 57); erit $y=u$ (§. 142). Est vero etiam AC=CB (§. 40), & DC=DC. Ergo AD=DB, & $o=x$ (§. 179); consequenter CD ad AB perpendicularis (§. 79). *Quod erat secundum.*

Sit denique radius CE perpendicularis ad chordam AB in D *per hypoth.* erit $o=x$ (§. 79). Est vero etiam AC =CB (§. 40), & hinc $m=n$ (§. 184); consequenter $y=u$ (§. 246). Quare arcus AE & EB, æqualium angulorum u & y mensuræ (§. 57), æquales sunt (§. 142), & AD=DB (§. 251). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LVII.

292. *Si recta* NE *chordam* AB *bifariam secet, & ad eam perpendicularis fuerit, per centrum transit, & tam arcum* AEB *quam* ANB *bifariam secat.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ND perpendicularis ad AB, *per hypoth.* erit $o = x$ (§. 79). Est vero etiam AD=DB, *per hypoth.* & ND=ND. Ergo AN=NB (§. 179); consequenter arcus cognomines æquales sunt (§. 289). Eodem modo ostenditur, arcus AE & EB æquales esse. *Quod erat unum.* Tab.V. Fig.88.

Arcus AN=NB, & AE=EB, *per demonstr.* Ergo NA + AE=NB + BE (§. 88 *Arithm.*); consequenter NE diameter circuli (§. 135), adeoque per centrum transit (§. 39). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA XXIX.

293. *Datum arcum* AB *in duas partes æquales dividere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Ducatur ad punctum medium D chordæ AB perpendicularis NE (§. 210): hæc arcum AB bifariam secabit (§. 292). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA XXX.

294. *Per data tria puncta non in directum jacentia* A, B *&* C *circulum describere.* Tab.V. Fig.89.

RESOLUTIO.

1. Ex A & C fiant intersectiones in D & E, itemque aliæ duæ G & H ex C & B.
2. Ducantur rectæ DE & HG (§. 121). Dico I esse centrum circuli per A, C, & B describendi (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Puncta A, C, & B sunt in peripheria alicujus circuli, *per hypoth.* atque adeo rectæ AC & CB chordæ (§. 38). Sed ED ad AC, GH ad EC perpendicularis; & ED ipsam AC, GH vero

Tab.V. BC bifariam secat (§. 210). Ergo utraque per centrum transit (§. 292). Quare, cum DE & GH tantum in I se mutuo secent (§. 250), erit I centrum circuli per puncta data A, C, & B transeuntis. *Q. e. d.*
Fig. 89.

COROLLARIUM I.

295. Assumtis in peripheria, vel arcu circuli tribus punctis; centrum inveniri, datusque arcus perfici potest.

COROLLARIUM II.

296. Si tria puncta unius peripheriæ tribus punctis alterius congruant; peripheriæ totæ congruunt: atque adeo circuli æquales sunt (§. 161).

COROLLARIUM III.

297. Omne triangulum est circulo inscriptibile (§. 116).

THEOREMA LVIII.

Tab.V. 298. *In eodem vel æqualibus circulis, chordæ æquales* AB *&* DE *a centro* C *æqualiter distant: & contra.*
Fig. 87.

DEMONSTRATIO.

Quoniam FC & CG sunt distantiæ chordarum AB & DE a centro C, *per hypoth.* erunt ad chordas perpendiculares (§. 225): & hinc *o* & *x* recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Porro cum AB=DE, *per hypoth.* & CF ad AB perpendicularis, *per demonstrata*, ipsam AB; CG vero perpendicularis ad DE, *per demonstrata*, ipsam DE bisecet (§. 291); erit FA=DG (§. 177 *Arithm.*). Quare cum etiam sit AC=CD (§. 40); erit CF=CG (§. 235). *Quod erat unum.*

Quod si distantiæ FC & CG fuerint æquales, *per hypoth.* cum sit *o*=*x* *per demonstr.* & AC=CD (§. 40); erit AF=DG (§. 235). Sed AF=$\frac{1}{2}$AB, & DG=$\frac{1}{2}$DE (§. 291). Ergo AB=DE (§. 177 *Arithm.*). *Quod erat alterum.* Tab.V. Fig. 87.

THEOREMA LIX.

299. *Chordarum maxima est diameter* AB. Tab. I. Fig. 7.

DEMONSTRATIO.

Est enim CO=BC & CN=CA (§. 40). Sed CO+CN > ON (§. 190). Ergo BC+CA, hoc est, BA > ON (§. 89 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LX.

300. *Si intra triangulum* ACB *supra ejusdem basi* AB *construatur triangulum* ADB; *erunt crura interioris* AD *&* DB *simul sumta minora cruribus exterioris* AC *&* CB *simul sumtis: angulus vero ad verticem interioris* D *major angulo ad verticem exterioris* C. Tab.V. Fig. 90.

DEMONSTRATIO.

Quia AE < AC+CE (§. 190); AE+EB < AC+CE+EB (§. 90 *Arithm.*), hoc est, AD+DE+EB < AC+CB (§. 86, 89 *Arithm.*). Sed DB < DE+EB (§. 190). Ergo multo magis AD+DB < AC+CB. *Quod erat unum.*

Quoniam *o* > *x*, & *u* > *m* (§. 188); erit *o*+*u* > *x*+*m* (§. 90 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA LXI.

301. *Chorda arcus majoris* AB *major est; chorda minoris* AD *minor.* Tab.V. Fig. 91.

DEMONSTRATIO.

EB+EC > BC (§. 190), hoc est, quia DE+EC=BC (§. 40), EB +EC

Tab.V. Fig.91. +EC > DE+EC (§. 89 *Arithm.*); consequenter EB > DE (§. 92 *Arithm.*). Est vero AE+DE > DA (§. 190). Ergo multo magis AE+EB > DA, hoc est, AB > DA (§. 86, 89 *Arithm.*). *Q. e d.*

THEOREMA LXII.

Tab. I. Fig. 7. 302. *Secantium* MA, MN, ME *ex eodem puncto* M *ductarum maxima est* MA, *quæ per centrum transit: reliqua sunt tanto minores, quo a centro remotiores. Contra earundem portiones extra circulum* MD, MO, MB *sunt tanto majores, quo magis a centro distant: minima est* MB *secantis* MA *per centrum transentis.*

DEMONSTRATIO.

1. NC+MC > MN (§. 190). Sed NC=CA (§. 40). Ergo MA=CA +CM (§. 86 *Arithm.*)=NC+CM (§. 88 *Arithm.*) > MN (§. 89 *Arithm.*) *Quod erat primum.*

2. MO+EO > ME (§. 190). Sed ON > EO (§. 301). Ergo multo magis MO+ON, hoc est, MN (§. 86 *Arithm.*) > ME. *Quod erat secundum.*

3. CO+OM > MC (§. 190). Sed CO=CB (§. 40). Ergo OM > MB (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

4. CD+DM > CO+OM (§. 300). Sed CD=CO (§. 40). Ergo DM > OM (§. 92 *Arithm.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIII.

Tab.V. Fig.92. 303. *Si ex puncto* E *intra circulum assumto ducantur in peripheriam recta* EF, EB, EG, *&c. item* EA, ED, EH *&c. maxima erit* EF, *quæ per centrum* C *transit: reliquæ* EB, EG *&c. tanto majores, quo maxima propiores. Contra minima est* EA, *quæ continuata per centrum transit: reliquæ* ED, EH *&c. sunt tanto majores, quo ab ea remotiores.*

DEMONSTRATIO.

1. EC+BC > EB (§. 190). Sed BC =CF (§. 40). Ergo EC+BC=EC +CF (§ 88 *Arithm.*) hoc est, EF (§. 86 *Arithm.*) > EB (§. 89 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

2. EI+GI > GE, & IB+IC > BC (§. 190), hoc est, ob BC=GI+IC (§. 40), IB+IC > GI+IC (§. 89 *Arithm.*), adeoque IB > GI (§. 92 *Arithm.*). Quare EI+IB > EI+GI (§. 90 *Arithm.*); adeoque EI+IB, hoc est, EB (§. 86 *Arithm.*) > GE. *Quod erat alterum.*

3. CE+ED > CD (§. 190), Sed CD=CE+EA (§. 40). Ergo CE +ED > CE+EA (§. 89 *Arithm.*); consequenter ED > EA (§. 92 *Arith.*). *Quod erat tertium.*

4. EK+KD > ED, & KH+KC > CH (§. 190), hoc est, ob CH=CK +KD (§. 40), KH+KC > KC+KD (§. 98 *Arithm.*), adeoque KH > KD (§. 92 *Arithm.*). Quare EK+KH > EK +KD (§. 90 *Arithm.*); adeoque EK +KH, hoc est, EH (§. 86 *Arithm.*), > ED. *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXIV.

304. *Recta* IL *radio* CL *perpendiculariter*

Tab. I. *lariter insistens tangit circulum, in unico* Fig. 3. *puncto* L : *nec inter tangentem* HL & *circulum alia recta duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim quælibet alia CK (§. 121). Quoniam IL perpendicularis ad CL, *per hypoth.* adeoque L est rectus (§. 78); K erit acutus (§. 218). Ergo CK > CL (§. 220); consequenter quodlibet punctum K a L diversum, hoc est tota linea LI, seu HI, extra circulum cadit (§. 40); & ideo circulum tangit in unico puncto L (§. 47). *Quod erat unum.*

Ducatur deinde, si fieri potest, inter tangentem HL & circulum recta ML. Demittatur in eam ex centro C perpendicularis CD (§. 216); erit D rectus (§. 78), adeoque CL > CD (§. 220). Cadit itaque D intra circulum (§ 40): quod cum hypothesi repugnet (§. 47) inter tangentem & circulum per contactum transiens recta alia duci nequit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

305. Angulus igitur contactus, tangente HL & arcu ML interceptus, est quovis rectilineo minor: angulus vero semicirculi, inter radium CL & arcum ML interceptus, est quovis rectilineo acuto major.

SCHOLION.

306. *Hoc paradoxum* EUCLIDIS *exercuit Mathematicorum ingenia. Agitata est de eo controversia inter* Jacobum PELETARIUM Cenomani *in Gallia Matheseos Professorem, &* Christophorum CLAVIUM *Jesuitam* Bambergensem: *quorum (a) hic angulum contactus rectilineo heterogeneum* (§. 30 Arithm.) *agnovit, quemadmodum linea est superficiei heterogenea; ille vero e numero angulorum sustulit & pro non quanto declaravit. Peculiarem* De angulo contactus & semicirculi *Tractatum, An.* 1656, *conscripsit* WALLISIUS, *qui legitur Operum Vol. II. f.* 605 *& seqq. ubi, cum* PELETARIO, *angulum contactus omni assignabili minorem, adeoque nullius magnitudinis esse defendit.*

(a) In Schol. ad 16. Elem. III. f. 117. & seqq. Tom. I. Oper.

COROLLARIUM II.

307. Circulum in eodem puncto L nonnisi unica recta HI tangere potest. Tab. I. Fig. 3.

PROBLEMA LXV.

308. *Omnis recta* HI *circulum tangens radio* CL *ad punctum contactus ducto perpendicularis est.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus IL non esse ipsi CL perpendicularem. Ergo ex C duci poterit KC ad HI perpendicularis (§. 216); hæcque, utpote tangens *per hypoth.* extra circulum cadet (§. 47); consequenter CK > CN (§. 84 *Arithm.*) > CL (§. 40 *Geom.* & §. 89 *Arithm.*). Est vero etiam CK < CL (§. 220): quod cum sit absurdum, tangens IL radio CL ad contactum perpendicularis. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

309. Tangens IL efficit cum radio CL in puncto contactus rectum (§. 78).

COROLLARIUM II.

310. Si HI circulum tangat, & ex centro C ad eam perpendicularis CL demittatur (§. 216), punctum contactus L determinatur.

PROBLEMA XXXI.

311. *Ducere rectam* HI *circulum in dato puncto* L *tangentem.*

RE-

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab. I. 1. Ex centro circuli C ad punctum *Fig. 3.* contactus L ducatur radius CL.

2. In L excitetur perpendicularis LH (§. 249), quæ circulum in L tanget (§. 308). *Q. e. f. & d.*

THEOREMA LXVI.

Tab. V. *Fig. 91.* 312. *Arcus* FG *&* HI *inter chordas parallelas intercepti sunt æquales.*

DEMONSTRATIO.

Demittatur CK ex centro C perpendicularis ad FH (§. 216): erit eadem perpendicularis ad GI (§. 230), ob FH & GI *per hypoth.* parallelas; dividetque adeo tam arcum FKH, quam GKI bifariam in K (§. 291). Quare KF —KG=KH—KI, hoc est, FG =HI (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA LXVII.

Tab. I. *Fig. 13.* 313. *Angulus ad centrum* ACD *est duplus anguli ad peripheriam* ABD, *eidem arcui* AD *insistentis.*

DEMONSTRATIO.

I. Ducatur EF per centrum C ipsi BD parallela (§. 258); erit EB=DF (§. 312); adeoque $o=x$ (§. 142). Sed $o=y$ (§. 156). Ergo $x=y$ (§. 87 *Arithm.*) $=\frac{1}{2}$ACD. Porro $o=u$ (§. 233). Ergo $u=y=\frac{1}{2}$ACD (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Tab. V. *Fig. 93.* II. In casu altero, $o=2y$, & $u=2x$, *per cas.* 1. Ergo $u+o=2x+2y$ (§. 88 *Arithm.*), hoc est, ABD=$\frac{1}{2}$ACD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat secundum.*

Fig. 94. III. In casu tertio, $o+u=2y+2x$, *per cas.* 1. & $o=2y$, *per cas.* 1. Ergo $u=2x$ (§. 91 *Arithm.*), hoc est, $\frac{1}{2}$ACD=ABD (§. 94 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

THEOREMA LXVIII.

Tab. I. *Fig. 13.* 314. *Anguli ad peripheriam* ABD *mensura est arcus dimidius* AD, *cui insistit.*

DEMONSTRATIO.

I. Sit ABD angulus in majore segmento: insistet ergo arcui minori AD quam semicirculo (§. 70, 56), adeoque ipsi respondet angulus ad centrum ACD (§. 72, 135). Sed anguli ACD mensura est arcus AD (§. 73). Ergo ipsius ABD mensura dimidius arcus AD (§. 313, 142). *Quod erat unum.*

II. Sit ACB angulus in semicirculo. Tab. V. Ducatur utcunque recta CD: erit arcus dimidius AD mensura anguli ACD, & $\frac{1}{2}$ DB mensura ipsius DCB, *per cas.* 1. Ergo $\frac{1}{2}$ ADB mensura anguli ACB. *Quod erat secundum.* *Fig. 95.*

III. Sit denique HIK angulus in minore segmento. Ducatur utcunque recta IL: erit ut ante $\frac{1}{2}$ HL mensura anguli HIL, & $\frac{1}{2}$ LK mensura anguli LIK, *per cas.* 1. Ergo denuo $\frac{1}{2}$ HLK mensura anguli HIK. *Quod erat tertium.* Tab. V. *Fig. 96.*

COROLLARIUM I.

315. Duo vel plures anguli HLI & HMI eidem arcui HI, vel æqualibus arcubus insistentes, æquales sunt (§. 142). Tab. I. *Fig. 14.*

COROLLARIUM II.

316. Quare cum porro sit $o=x+u$ (§. 239); erit anguli extra centrum mensura dimidium arcuum HI & LM, quibus ipse & ejus verticalis K insistunt (§. 314).

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab.V. Fig.95. 317. Cum angulus in ſemicirculo ACB ſemicirculo inſiſtat, *per hypoth.* menſura ejus eſt circuli quadrans (§. 314), adeoque ipſe rectus eſt (§. 143).

COROLLARIUM IV.

Tab.V. Fig.96. 318. Cum angulus in majore ſegmento DIF arcui DF, minori quam eſt ſemicirculus, inſiſtat (§. 70); menſura ejus eſt ſemiquadrante minor (§. 314); adeoque ipſe recto minor (§. 143); conſequenter acutus §. 66).

COROLLARIUM V.

319. Non abſimili ratione liquet, angulum in minore ſegmento HIK eſſe obtuſum.

COROLLARIUM VI.

Tab. VI. Fig.97. 320. Quoniam $o = x + y$ (§. 239), & anguli o menſura eſt $\frac{1}{2}$ LM, anguli y vero $\frac{1}{2}$ NO (§. 314); anguli extra peripheriam G menſura eſt differentia inter dimidium arcum concavum LM cui inſiſtit, & dimidium convexum NO inter crura interceptum.

PROBLEMA XXXII.

Tab. VI. 321. *Normam examinare, utrum exacta ſit, nec ne.*

Fig.98. RESOLUTIO.

1. Deſcribatur intervallo arbitrario ſemicirculus AEF, &
2. Ducantur in eo, ex diametri utroque extremo A & F ad punctum E in peripheria arbitrario aſſumtum, rectæ AE & FE.
3. Cruribus anguli AEF ita applicetur norma, ut ejus vertex ſuper E cadat. Hoc enim ſi fieri poteſt, erit norma exacta.

DEMONSTRATIO.

Tum enim angulus normæ LEM æqualis eſt angulo AEF (§. 167), adeoque rectus (§. 317), conſequenter norma exacta (§. 212). *Q. e. d.*

THEOREMA LXIX.

322. *Menſura anguli minoris ſegmenti* ATB *eſt dimidium arcus* TDB; *anguli vero majoris ſegmenti* BTH *dimidium arcus majoris* BGT. Tab. VI. Fig.99.

DEMONSTRATIO.

Ducatur ex puncto contactus T diameter TE; erit ATE rectus (§. 308). Cum adeo ejus menſura ſit arcus dimidius EBT (§. 135, 143), anguli vero BIE dimidius arcus EB (§. 314); erit anguli ATB menſura dimidius arcus BDT. *Quod erat unum.*

Eodem modo patet, cum dimidius ſemicirculus EGT ſit menſura anguli ETH (§. 135, 143), & dimidius arcus EB menſura anguli BTE (§. 314), eſſe dimidium arcum BGT menſuram anguli BTH. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM I.

323. Cum anguli G menſura etiam ſit dimidius arcus BDT, ipſius D vero arcus dimidius BGT (§. 314); angulus in majore ſegmento G æqualis eſt angulo minoris ſegmenti ATB, & angulus in minore ſegmento D æqualis eſt angulo majoris ſegmenti BTH (§. 142).

COROLLARIUM II.

324. Si chorda GT ultra circulum continuetur in F; erit anguli BTF menſura ſemiſumma arcuum TB & TG a chordis cognominibus ſubtenſorum. Nam ATF = GTH (§. 156). Ergo ejus menſura dimidius arcus TG (§. 322). Eſt vero anguli ATB menſura arcus dimidius TB (§. *cit.*). Quare ſemiſumma eorundem arcuum eſt menſura anguli BTF.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. VI. Fig. 100. 325. Si LM & MN sint tangentes ex eodem puncto ductæ; erit angulorum MLN & MNL mensura arcus dimidius LN (§. 322); consequenter anguli ipsi sunt æquales (§. 142), & ideo LM = MN (§. 253).

COROLLARIUM IV.

326. Quia angulorum L, M & N mensura est semicirculus (§. 240, 243), angulorum vero L & N junctim sumtorum arcus LN (§. 322); erit anguli M a duabus tangentibus LM & NM intercepti mensura differentia arcus intercepti LN a semicirculo.

PROBLEMA XXXIII.

Tab. VI. Fig. 101. 327. *Inter duas lineas* AB *&* BE *mediam proportionalem* BD *invenire.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur lineæ datæ AB & BE in directum, dividaturque AE bifariam in C (§. 210).
2. Ex C, intervallo ipsius AC, describatur semicirculus ADE (§. 136).
3. Ex B erigatur perpendicularis BD (§. 212).

Dico esse AB : BD = BD : BE.

DEMONSTRATIO.

Quoniam BD perpendicularis ad AE, *per construct.* m & n sunt anguli recti (§. 78). Sed $o+x$ est itidem rectus (§. 317) & y utrique triangulo ABD & ADE communis. Ergo $o = z$ (§. 246); consequenter $y = x$ (§. *cit.*); & tunc AB : BD = BD : BE (§. 267). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

328. Cum sit AB : BD = BD : BE; ex data sagitta AB & dimidia chorda BD invenitur diameter (§. 302 *Arithm.*). Sit ex. gr. AB = 80''', BD = 300'''; erit BE = 1125''', adeoque AB + BE = AE = 1205''', seu fere 12'. Tab. VI.

COROLLARIUM II. Fig. 101.

329. Ex demonstratione una liquet, △ rectangulum ADE per lineam perpendicularem DB, ex angulo recto D in hypothenusam AE demissam, resolvi in duo triangula ABD & BDE inter se & toti ADE similia (§. 267).

COROLLARIUM III.

330. Cum adeo etiam sit AB : AD = AD : AE (§. *cit.*); si lineæ fuerint majores, una datarum ex A in B, altera ex A in E transfertur, factisque reliquis, ut in resolutione Problematis, erit AD media proportionalis quæsita.

COROLLARIUM IV.

331. Si ergo AB sit unitas, erit BD radix ipsius BE, aut AD ipsius AE (§. 247 *Arithm.*)

THEOREMA LXX.

332. *Si duæ chordæ* HM *&* LI *se mutuo secent in* K; *erit* HK : LK = KI : KM. Tab. I. Fig. 14.

DEMONSTRATIO.

Quoniam enim $x = x$ & $u = u$ (§. 315): ideo HK : LK = KI : KM (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXI.

333. *Si fuerint duæ secantes* GL *&* GM *ex eodem puncto* G *ductæ*; *erit* GM : GL = GN : GO. Tab. VI. Fig. 97.

DEMONSTRATIO.

Angulus x est utrique triangulo GNO & GML communis. Anguli GNO mensura est semisumma arcuum NL & NO (§. 324). Sed anguli GML mensura est semisumma eorundem arcuum (§. 314). Quare GNO = GML (§. 142); consequenter GM : GL = GN : GO (§. 267). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXII.

Tab. VI. Fig. 102. 334. *Si ex eodem puncto* A *ducantur duæ rectæ* AD *&* AB, *quarum altera circulum tangit, altera secat; erit tangens* AD *media proportionalis inter totam secantem* AB *& ejus portionem* AC *extra circulum.*

DEMONSTRATIO.

Angulus A est utrique triangulo ACD & ABD communis. Anguli ADC & ABD æquales sunt (§. 323). Ergo AC : AD = AD : AB (§. 267). *Q. e. d.* Tab. VI. Fig. 102.

CAPUT V.

De Figurarum descriptione.

THEOREMA LXXIII.

Tab. VI. Fig. 103. 335. IN *parallelogrammis latera opposita sunt æqualia: & si in figura quadrilatera latera opposita fuerint æqualia, erunt eadem parallelogrammum.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam OPQN parallelogrammum, *per hypoth.* erit OP parallela ipsi NQ & ON parallela ipsi PQ (§. 102); consequenter, ducta diagonali PN, erit $x=o$ & $n=m$ (§. 233); adeoque OP = NQ & ON = PQ (§. 251). *Quod erat unum.*

Quodsi OP=NQ & ON=PQ, *per hypoth.* cum etiam sit NP = NP; erit $x=o$ & $n=m$ (§. 204); consequenter OP ipsi QN, & ON ipsi PQ parallela (§. 255); adeoque OPQN parallelogrammum (§. 102). *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

336. Cum in Quadrato, Oblongo, Rhombo, & Rhomboide latera opposita æqualia sint (§. 98, 99, 100, 101); erunt Quadratum, Oblongum, Rhombus, & Rhomboides parallelogramma (§. 335).

THEOREMA LXXIV.

337. *Diagonalis dividit parallelogramma in duas partes æquales: anguli in iis diagonaliter oppositi sunt æquales: anguli vero ad idem latus oppositi duobus rectis æquantur: & duo latera simul sumta sunt diagonali majora.*

DEMONSTRATIO.

In Parallelogrammis ON = PQ & PO = QN (§. 335). Sed PN = PN. Ergo △ NOP = △ NQP (§. 204). *Quod erat unum.* Tab. VI. Fig. 103.

Quoniam in parallelogrammis OP ipsi NQ & ON ipsi PQ parallela (§. 103): anguli O & N, N & Q, Q & P, P & O simul sumti æquantur duobus rectis (§. 233). *Quod erat secundum.*

Quoniam angulus O + N = N + Q, *per demonstrata*; erit O = Q (§. 91 *Arithm.*). Similiter quoniam Q + P = Q + N, *per demonstrata*; erit P = N (§. 91 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Denique NO + PO > NP, & PQ + QN > PN (§. 190). *Quod erat quartum.*

PRO-

PROBLEMA XXXIV.

Tab. VI. *Fig.* 104. 338. *Super data recta* CD *Quadratum construere.*

RESOLUTIO.

1. In C erigatur perpendicularis AC (§. 249) = CD.
2. Ex D & A, intervallo ipsius CD, fiat intersectio in B (§. 197).
3. Ducantur AB & DB.

DEMONSTRATIO.

AC = CD = AB = BD, *per constr.* Ducta ergo diagonali AD, patet esse C = B (§. 204). Sed C rectus est *per constr.* Ergo B etiam rectus (§. 145); consequenter *o* & *x*, item *y* & *m* semirecti (§. 241), adeoque *o* + *y* & *x* + *m* itidem recti. Quare figura est Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In C & D erigantur perpendiculares CA & DB ipsi CD aequales (§. 249).
2. Ducatur recta AB.

DEMONSTRATIO.

Est enim CA = DB = CD, *per constr.* & quoniam AC & BD perpendiculares ad CD, *per constr.* anguli ad D & C sunt recti (§. 78); adeoque BA parallela ipsi DC (§. 226); consequenter anguli A & B sunt recti (§. 233); & ob parallelas AC & BC (§. 256) AB = CD (§. 238). Est igitur ABCD Quadratum (§. 98). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXV.

339. *Datis duabus rectis* MI *&* IK, *Rectangulum parallelogrammum, seu Oblongum construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur MI & IK ad angulos rectos (§. 249). Tab. VI.
2. Ex M, intervallo ML = IK, describatur arcus; & ex K, intervallo KL = IM, alius priorem intersecans in L (§. 197). *Fig.* 105.
3. Ducantur rectae ML & KL.

DEMONSTRATIO.

MI = KL, & ML = IK, *per constr.* Est ergo MIKL parallelogrammum (§. 335); consequenter I = L, & I+M ac I+K, = duobus rectis (§. 337). Sed I est rectus, *per constr.* Ergo & L (§. 145); itemque M & K recti sunt. Est ergo figura constructa Oblongum (§. 100). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVI.

340. *Data recta* GH, *una cum angulo obliquo* G, *Rhombum construere.* Tab. VI. *Fig.* 106.

RESOLUTIO.

1. Ad rectam datam GH constituatur in G angulus dato aequalis (§. 208).
2. Fiat GE = GH, & reliqua peragantur ut in Probl. 34 (§. 338).

DEMONSTRATIO.

EG = EF = FH = HG, *per construct.* Est ergo EFHG parallelogrammum (§. 335); consequenter G = F & G+H ac G+E = duobus rectis (§. 337). Sed G est angulus obliquus *ex hypothesi:* Ergo & F; consequenter etiam E & H sunt obliqui. Adeoque figura constructa Rhombus est (§. 99). *Q. e. d.*

 PRO-

PROBLEMA XXXVI.

Tab. VI. Fig. 105. 341. *Datis duabus rectis* ON *&* OP, *una cum angulo intercipiendo* O, *Rhomboidem construere.*

RESOLUTIO.

1. Jungantur rectæ ON & OP sub angulo dato (§. 208).
2. Reliqua peragantur ut in Probl. 35 (§. 339).

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

THEOREMA LXXV.

Tab. VI. Fig. 107. 342. *Si peripheria circuli dividatur in partes quotcunque æquales, ducanturque subtensæ* AB, BC, CD, *&c. figura circulo inscripta regularis est.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim arcus AB, BC, CD &c. sint æquales, *per hypoth.* etiam chordæ cognomines æquales sunt (§. 289); cumque anguli A, B, C, &c. æqualibus arcubus BCDE, CDEA, DEAB &c. insistant, ipsi quoque æquales sunt (§. 315). Figura igitur circulo inscripta regularis est (§. 106). *Q. e. d.*

PROBLEMA XXXVIII.

343. *Invenire summam omnium angulorum in quocunque Polygono.*

RESOLUTIO.

1. Multiplicentur 180° per numerum laterum.
2. A producto subtrahantur 360°: residuum est summa quæsita.

Ex. gr. Pentag. 180	Hexag. 180
5	6
900	1080
360	360
540	720

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 108. Quælibet figura, ex assumto in ea puncto F, in tot triangula AFB, BFC, CFD, &c. resolvitur, quot habet latera AB, BC, CD, &c. Si ergo 180° per numerum laterum multiplices, prodit summa omnium angulorum in dictis triangulis (§. 240). Sed anguli circa punctum F, qui non pertinent ad angulos Polygoni, semper efficiunt 360° (§. 159). Quodsi ergo a facto supra invento subtrahantur 360°, summa angulorum Polygoni relinquitur. *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 111. Cum numerus triangulorum ABC, CAD, & DAE, in quæ resolvitur figura polygona per diagonales AC & AD ex puncto A ductas, a numero laterum AB, BC, CD, DE, EA constanter binario differat; si 180° multiplicentur per numerum laterum binario mulctatum, prodit summa omnium angulorum A, B, C, D, & E (§. 240). *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. pro Pentag. 180	pro Hexag. 180
3	4
540	720

COROLLARIUM I.

344. Quodsi summa inventa per numerum laterum dividatur; quotus est angulus Polygoni regularis (§. 106).

SCHOLION.

345. *En tibi Tabulam, in qua summa angulorum in figuris rectilineis quibuscunque, & quantitas unius in regularibus, a Trigono usque ad Dodecagonum exhibetur* (§. 343). *Construitur columna secunda continua additione 180; tertia vero numeris in columna secunda per numerum angulorum sive laterum*

terum divisis (§. 344). *Utimur hac Tabula tum in figuris regularibus describendis; tum in angulorum quantitate examinanda, utrum scilicet Instrumento rite explorata fuerit, nec ne. Aberratum enim esse intelligimus, ubi eorum summa minor vel major deprehenditur ea, quæ in Tabula definitur: ex. gr. si in Heptagono superet* 900.

Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. regul.	Num. Lat.	Sum. Ang.	Ang. Fig. reg.
III	180	60	VIII	1080	135
IV	360	90	IX	1260	140
V	540	108	X	1440	144
VI	720	120	XI	1620	$147\frac{3}{11}$
VII	900	$128\frac{4}{7}$	XII	1900	150

COROLLARIUM II.

Tab. VI. Fig. 108. 346. Si latera figuræ polygonæ cujuscunque continuentur, anguli externi, 1, 2, 3, 4 &c. cum angulis figuræ internis efficiunt bis tot rectos, quot sunt latera (§. 147). Sed interni soli efficiunt bis tot rectos quot sunt latera, demtis quatuor (§. 343). Ergo externi in omni casu conficiunt 4 rectos seu 360°.

PROBLEMA XXXIX.

Tab. VI. Fig. 107. 347. *Dato Polygono regulari cuicunque* ABCDE *circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Duo ejus anguli E & D dividantur bifariam rectis EF & DF (§. 209), ob angulos FED & FDE duobus rectis minores, concursuris in F (§. 262).
2. Ex puncto concursus F describatur radio EF circulus (§. 131).

DEMONSTRATIO.

Quoniam *o* & *u* sunt angulorum Polygoni dimidii, *per construct.* erit $o = u$ (§. 106 *Geom.* & §. 94 *Arithm.*); consequenter EF=FD (§. 253). Circulus adeo transiens per E transit etiam per D (§. 40). Ducatur jam ex F in A recta FA (§. 121). Quoniam $o = x$, *per constr.* ED=EA (§. 106), & EF =EF; erit AF=FD (§. 179). Ergo circulus transiens per D & E transit etiam per A (§. 40). Porro quia AF =EF, *per demonstr.* erit $m = x$ (§. 184). Sed x dimidius angulus Polygoni, *per constr.* Ergo & m (§. 87 *Arithm.*); consequenter etiam y. Quare si ducatur FB (§. 121); erit ut ante FB=FE, adeoque radius circuli. Eodem modo ostenditur FC, & si quæ plures fuerint rectæ istiusmodi, esse radios circuli, adeoque circulum transire per omnes angulos Polygoni, hoc est, eidem circumscribi (§. 116). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

348. Omnis ergo figura regularis est circulo inscriptibilis (§. 216).

PROBLEMA XL.

349. *Invenire angulum in dato Polygono regulari.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Concipiatur Polygonum regulare ABCDE circulo inscriptum (§. 348). Quoniam arcus dimidius BCDE est mensura anguli quæsiti A (§. 314); arcus vero AB, qui ipsius EAB dimidius, habetur circuli peripheria per numerum laterum divisa (§. 289); angulus Polygoni A relinquitur, si arcum AB a semicirculo subtraxeris. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Quæratur angulus Pentagoni. Dividatur 360 per 5, quotus 72 est arcus AB, qui ex 180 subductus relinquit 108 angulum Pentagoni quæsitum.

THEOREMA LXXVI.

Tab. VI. Fig. 109. 350. *Quadrilateri circulo inscripti* GHIK *anguli bini oppositi* H *&* K, *item* G *&* I *conficiunt duos rectos.*

DEMONSTRATIO.

Insistunt enim junctim femi integro circulo; ex. gr. K arcui GHI & H complemento ejus ad circulum GKI (§. 56); adeoque ipsorum mensura est semicirculus (§. 314). Sunt ergo duobus rectis æquales (§. 143). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLI.

Tab. VI. Fig. * 351. *Circulo Quadratum circumscribere.*

RESOLUTIO.

1. Ducantur diametri AB & DE se mutuo in centro C ad angulos rectos secantes (§. 210).
2. Ex A, E, B D, intervallo radii, fiant intersectiones in F, G, H, I.
3. Ducantur rectæ FG, GH, IH, & IF.

Erit FGHI Quadratum circulo circumscriptum.

DEMONSTRATIO.

Anguli ad A, E, B, D sunt recti (§. 338); adeoque FG, GH, HI & IF circulum tangunt (§. 304). Sunt vero anguli G, F, I, H recti (§. 338), & FG=GH =HI=FI=2AC, *per constr.* Ergo FGIH est Quadratum (§. 98), idque circulo circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

PROBLEMA XLII.

352 *Super data recta* ED *Polygonum regulare quodcunque describere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur angulis Polygoni (§. 344, 349). Tab. VI. Fig. 107.
2. Fiat in E ipsi æqualis (§. 155), & EA=ED.
3. Per puncta A, E, D describatur circuli periphèria (§. 294).
4. In ea applicetur data recta ED, quoties fieri potest.

Ita describetur figura quæsita (§. 342, 348).

Aliter.

1. In E & D fiant anguli dimidio angulo Polygoni sigillatim æquales (§. 155), quorum crura EF & DF se mutuo secabunt in F (§. 262).
2. Ex F tanquam centro, radio EF, describatur circulus, qui erit circulus Polygono circumscriptus (§. 347).
3. Reliqua absolvantur ut ante.

PROBLEMA XLIII.

353. *Circulo dato Polygonum regulare quodcunque inscribere.*

RESOLUTIO.

1. Dividantur 360 per numerum laterum, ut innotescat quantitas anguli EFD (§. 59). Tab. VI. Fig. 107.
2. Construatur is ad centrum (§. 155).
3. Chorda ED ad peripheriam toties applicetur, quoties fieri potest.

Ita figura regularis erit circulo inscripta (§. 342, 117). *Q. e. f. & d.*

SCHOLION.

354. *Resolutio Problematis præsentis & præcedentis mechanica quidem est, cum ad constructionem Instrumento transportatorio utamur* (§. 155): *non tamen ideo contemnenda,*

nenda, tum quia universalis & facilis, tum quia constructionis rite peractæ indicium præbet. Pentagoni, Decagoni & Quindecagoni constructionem tradunt EUCLIDES (a) *&* PTOLEMÆUS (*b*): *de qua in Analysi. Equidem & Heptagoni, Enneagoni & Hendecagoni constructiones geometricæ passim apud Autores, practicos inprimis, occurrunt: sed a rigore demonstrationum abhorrent.* Joh. Carolus RENALDINUS (*c*) *omnium Polygonorum describendorum regulam catholicam praescribit, passim Geometriis practicis insertam: sed quantum fallat,* Cl. WAGNERUS, Mathemat. in Academia Helmstad. Professor *ostendit* (*d*), *& nos inferius in Analysi ostendemus.*

PROBLEMA XLIV.

355. *Polygonum regulare quodcunque circulo circumscribere.*

RESOLUTIO.

Tab. VI. Fig. 107.
1. Inscribatur figura regularis similis circulo dato, v. gr. Pentagonum ABCDE, si Pentagonum *abcde* circumscribendum (§. 353).
2. Chorda AB bifariam secetur in H per rectam F*h* ad candem in H normalem (§. 210), quæ arcum cognominem in *h* secat.
3. Per A & B producantur radii FA & FB.
4. Per *h* ducatur ipsi AB parallela radiis continuatis in *a* & *b* occurrens: erit *ab* latus unum Polygoni circumscripti.
5. Producantur radii FE, FD, FC, donec fiat F*e*=F*d*=F*c*=F*a* & puncta *a*, *e*, *d*, *c*, *b* connectantur rectis *ae*, *ed*, *dc*, *cb*: erit *abcde* Polygonum circulo circumscriptum. *Q. e. f.* Tab. VI. Fig. 107.

DEMONSTRATIO.

Quoniam *ab* parallela ipsi AB, *per construct.* erit angulus F*ha* = FHA (§. 233). Sed ob FH ad AB perpendicularem, *per construct.* FHA rectus est (§. 78). Ergo etiam F*ha* rectus (§. 145); consequenter *ab* circulum in *h* tangit (§. 78, 304). Est vero etiam angulus F*ab*=FAB (§. 233); adeoque dimidius angulus Polygoni (§. 347). Porro quoniam AB=AE, *per construct.* & FA=FE=FB (§. 40); erit angulus *b*F*a*=*a*F*e* (§. 204). Quare, cum etiam sit F*a*=F*e per construct.* &, ob F*ab* = F*ba per demonstrata*, rectos ad *h* & latus F*h* utrique triangulo F*ah* & F*bh* commune, F*b*=F*a* (§. 252); erit *ae*=*ab* & F*ae*=F*ab* (§. 179); consequenter *a* angulus Polygoni, ex. gr. in nostro casu Pentagoni. Eodem modo ostenditur, angulos quoque *e*, *d*, *c*, *b* esse angulos Polygoni circumscribendi, & *ed*=*dc*=*cb* =*ab*. Quod vero etiam *ae* circulum in *g* tangat, ita demonstratur. Demittatur ex F perpendicularis ad *ae* (§. 216); erit angulus ad *g* rectus (§. 78). Quoniam porro F*ab*=F*ag*, *per demonstrata*, & F*a*=F*a*; erit F*h*=F*g* (§. 252). Quare cum F*h* sit radius circuli *per construct.* erit etiam F*g* radius circuli (§. 40), atque adeo *ae* circulum in *g* tangit

(a) *Elem.* IV. Prop. 11. 16. & *Elem.* XIII. Prop. 10.

(b) *Almag.* Lib. 1. c. 9. f. m. 8. conf. *Joannes* REGIOMONTANUS in *Epitome* hujus *Almag.* Lib. 1. prop. 1.

(c) Lib. 2. *De Resolut. & composit. Mathem.* f. 367.

(d) In peculiari Dissertatione *Helmstadii* 1700 habita.

Tab. VI. Fig. 107. tangit (§. 304). Idem eodem modo ostenditur de rectis *ed*, *dc*, *bc*: Polygonum itaque *abcde* circulo est circumscriptum (§. 117). *Q. e. d.*

THEOREMA LXXVII.

Tab. VI. Fig. 110. 356. *Latus Hexagoni* AB *aequatur radio circuli circumscripti* AC.

DEMONSTRATIO.

Angulus $C = 60^\circ$ (§. 57). Ergo $A + B = 120^\circ$ (§. 245); consequenter, ob $AC = BC$ (§. 40), $A = B = 60^\circ$ (§. 184). Quare △ ACB aequilaterum (§. 254); consequenter $AB = AC$ (§. 88). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

357. Hexagonum regulare circulo inscribitur, si radius ad peripheriam sexies applicetur.

COROLLARIUM II.

358. Si super linea data AB Hexagonum describendum; triangulum aequilaterum ACB construitur (§. 198): est enim vertex C centrum circuli Hexagono quaesito circumscribendi (§. 356).

PROBLEMA XLV.

Tab. VI. Fig. 111. 359. *Datis omnibus lateribus figurae cujuscunque, & tot diagonalibus quot sunt latera demtis tribus; figuram construere.*

RESOLUTIO.

Cum figura qualibet ABCDE per diagonales AC & AD in tot triangula BAC, CAD, DAE resolvatur, quot sunt latera demtis tribus; non alia re opus est, quam ut unum triangulum super altero excitetur (§. 205).

PROBLEMA XLVI.

360. *Datis omnibus lateribus figurae, & tot angulis quot sunt latera demtis tribus; figuram construere.*

RESOLUTIO.

1. Ducatur recta AB uni datorum laterum aequalis. Tab. VI. Fig. 112.
2. Ad A & B excitentur anguli eidem adjacentes (§. 155); & latera AE & BC per data debite determinentur.
3. Fiat porro in C angulus conveniens (§. 155); & determinetur latus DC, &c.
4. Tandem ex E & D fiat intersectio in F, intervallo laterum EF & DF.

Ductis enim DF & EF, figura terminabitur, eritque aequalis quaesitae (§. 161, 177).

Eodem modo construi possunt figurae regulares ex latere & angulo dato (§. 106).

COROLLARIUM.

361. Si omnes anguli praeter unum F dentur, duo latera DF & FE ut dentur opus non est.

SCHOLION.

362. *Tyrones ut se exerceant in figuris irregularibus describendis, lineas pro arbitrio in pedibus ac digitis, quantitates angulorum in gradibus, assumere debent. Quodsi contingat figuram non terminari, id indicio erit, casum esse impossibilem; adeoque vel in angulorum, vel in linearum quantitate quaedam erunt immutanda.*

PROBLEMA XLVII.

363. *Areae cujusdam campestris rectilineae* abcde *libere permeabilis Ichnographiam perficere, hoc est, figuram areae campestri similem describere.* Tab. VI. Fig. 111.

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VI. *Fig.* 111. 1. Investigetur longitudo singulorum laterum ab, bc, cd, de, ea, itemque diagonalium ac & ad (§. 126).

2. Construatur figura ABCDEA (§. 359) juxta Scalam geometricam minorem (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse figuræ campi $abcde$ similem.

DEMONSTRATIO.

Est enim $AB : BC = ab : bc$, $BC : CD = bc : cd$, $CD \cdot DE = cd : de$, &c. Etenim ex. gr. ab, 6, & bc, 7 pedum in campo existentibus, etiam $AB = 6$ & $BC = 7$ in charta, *per constr.* Quare cum porro sit $AC : AB = ac : ab$, $AC : AD = ac : ad$, $AD : AE = ad : ae$, &c. *per constr.* erit $o = o$, $x = x$, $y = y$, $n = n$, $m = m$, $r = r$, $u = u$, $s = s$, $t = t$ (§. 207); consequenter $x + m + r = x + m + r$, $y + n = y + n$, $u + s = u + s$ (§. 88 *Arithm.*). Quamobrem figura ABCDE est figuræ campi $abcde$ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. *Fig.* 113. 1. Posita mensula ita in uno figuræ angulo ut punctum a vertici ejus immineat, per dioptras regulæ affixas collineatio fiat in baculos in singulis angulis B, C, D, E defixos, ducanturque lineæ indefinitæ ab, ac, ad, ae.

2. Investigetur longitudo rectarum aB, aC, aD, aE (§. 126), &

3. Exinde juxta Scalam modicam (§. 279) determinentur ab, ac, ad, ae.

4. Ducantur bc, cd, de.

Dico $abcde$ esse similem figuræ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. *Fig.* 113. Quoniam in △△ abc & aBC angulus a communis & $ab : ac = aB : aC$ *per constr.* erit angulus $abc = aBC$ & $acb = aCB$, nec non $ab : bc = AB : BC$ & $ac : bc = AC : BC$ (§. 183). Similiter quoniam in △△ acd & aCD angulus a communis & $ac : ad = aC : aD$, atque in △△ dae & DaE angulus a itidem communis & $ad : ae = aD : aE$ *per construct.* erit angulus $acd = aCD$ & $adc = aDC$, nec non $ac : cd = aC : cD$ & $ad : cd = aD : cD$, itemque angulus $ade = aDE$ & $aed = aED$, nec non $ad : de = aD : DE$ & $ae : ed = aE : ED$ (§. 183). Quoniam itaque $a = a$, $b = B$, $acb + acd = aCB + aCD$, hoc est, $c = C$, $adc + ade = aDC + aDE$, hoc est, $d = D$ & denique $e = E$ *per demonstrata*; figuræ $abcde$ & $aBCDE$ inter se æquiangulæ sunt (§. 109). Porro cum sit $ac : bc = aC : BC$ & $ac : cd = aC : CD$ *per demonstr.* erit etiam $bc : cd = BC : CD$ (§. 196 *Arithm.*) & cum sit $ad : dc = aD : DC$ & $ad : de = aD : DE$ *per demonstr.* erit denuo $dc : de = DC : DE$. Quamobrem, cum quoque sit $ab : bc = aB : BC$ & $ae : ed = aE : ED$, *per demonstrata*; latera æquales angulos comprehendentia proportionalia sunt. Sunt itaque figuræ $abcde$ & $aBCDE$ similes (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. Mensula intra figuram posita eligatur punctum f, ex quo per dioptras regulæ affixas ut ante collineatio fiat in baculos in A, B, C, D & E defi- Tab. VI. *Fig.* 114.

Tab. VI. Fig. 114. defixos, ducanturque rectæ indefinitæ *fa*, *fb*, *fc*, &c.

2. Investigetur longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E (§. 126).

3. Inde determinetur longitudo rectarum *fa*, *fb*, *fc*, &c. juxta Scalam modicam (§. 179).

4. Tandem ducantur *ab*, *bc*, *cd*, &c. Dico *abcdeg* esse figuræ ABCDEG similem.

DEMONSTRATIO.

Angulus *f* utrique △ *fab* & *f*AB communis, estque *fa* : *fb* = *f*A : *f*B, *per constr.* Ergo anguli ad *a* & A, item ad *b* & B æquales sunt, atque *fa* : *ab* = *f*A : AB (§. 183). Eodem modo ostenditur esse in △△ *fga* & *f*GA angulos ad *a* & A æquales, atque *fa* : *ag* = *f*A : AG, consequenter *ab* : *ag* = AB : AG (§. 196 *Arithm.*) & angulus *bag* = BAG (§. 86 *Arithm.*). Quare, cum eadem ratione demonstretur esse *g* = G, *e* = E, *d* = D, *c* = C, *b* = B, & *ag* : *ge* = AG : GE, *ge* : *ed* = GE : ED, *ed* : *dc* = ED : DC, *dc* : *cb* = DC : CB & *cb* : *ba* = CB : BA, figura *abcdeg* est majori ABCDEG similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Tab. VI. Fig. 111. 1. Collocato Instrumento goniometrico in *a*, investigetur quantitas angulorum *x*, *m*, *r* (§. 152) & longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad* & *ae* (§. 126).

2. Construantur juxta Scalam modicam △△ ABC, ACD & ADE (§. 180).

Dico ABCDE esse similem figuræ *abcde*.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum secunda Problematis præsentis.

Aliter.

1. Collocato Instrumento goniometrico in *f*, investigetur quantitas angulorum A*f*B, B*f*C, C*f*D, D*f*E, E*f*G, G*f*A (§. 152), & longitudo rectarum *f*A, *f*B, *f*C, *f*D, *f*E, *f*G (§. 126). Tab. VI. Fig. 114.

2. Construantur, ut ante, juxta Scalam modicam △△ *bfa*, *afg*, *gfe*, *efd*, *dfc* & *cfb* (§. 180).

Dico *abcdeg* esse similem figuræ ABCDEG.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Problematis præsentis.

Aliter.

1. Pyxis cum acu magnetica, cujus margo in 360 gradus divisa & quæ in cardine Meridiei ac Septentrionis dioptris instructa, ita collocetur in *a*, ut ejus centrum ipsi *a* immineat, & per dioptras collineanti baculus in *b* defixus occurrat, noteturque angulus declinationis acus a linea meridiana pyxidis ipsi *ab* imminente versus ortum vel occasum. Tab. VI. Fig. 111.

2. Pyxidis dioptræ convertantur successive ad baculos in *c*, *d*, & *e* defixos, notenturque, ut ante, in singulis casibus anguli declinationis.

3. Investigetur longitudo rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* (§. 126).

4. Ducatur in charta recta LM & assumto in ea puncto A applicetur centrum Instrumenti transportatorii &

Tab. VI. *Fig.* 111. & fiant anguli *i*, *x*, *m*, *r* angulis declinationum rectarum *ab*, *ac*, *ad*, *ae* æquales (§. 155), atque ex harum longitudine per Scalam modicam determinetur longitudo ipsarum AB, AC, AD, AE, (§. 279).

Dico figuram ABCDE esse alteri *abcde* similem.

DEMONSTRATIO.

In campo acus magnetica semper eidem lineæ respondet in plano horizontali imaginario mundi, quod immobile est, etsi diversis in pyxide successive immineat. Lineam istam designet in charta recta LM & punctum A centrum acus, ex quo descriptus est circulus. Quodsi jam linea meridiana pyxidis admovetur lateri AB, erit principium numerationis in *g* & acus indicabit in *f* quantitatem anguli *i*. In Instrumento transportatorio initium numerandi fit in *f*, & si arcus *fg* declinationi in campo observatæ æqualis assumitur, angulus *i* idem erit, qui ante, situsque lineæ AB rite determinatur. Arcus enim *fg* perinde metitur declinationem ipsius AB a linea meridiana, quam monstrat acus, sive numerandi principium in *f*, sive in *g* fiat. Eodem modo liquet, arcus *fh*, *fk*, *fl* determinare situm rectarum AC, AD, AE respectu lineæ LM; consequenter anguli *x*, *m*, *r* in figura ABCDE erunt æquales totidem cognominibus in altera *abcde*. His suppositis reliqua demonstrantur ut supra in Demonstratione secunda.

Aliter.

Quodsi pyxis cum acu magnetica dioptris non fuerit instructa, sed lignea regula *fg* ita affixa, ut linea meridiana ejusdem *bd*, transiens per centrum pyxidis *c*, sit eidem parallela: Tab. XI. *Fig.* 174.

1. Regula *fg* ad latus figuræ AB applicetur; quo facto, AB erit ipsi *bd* parallela.
2. Notetur gradus, quem indicat acus magneticæ *ae* circa centrum *c* libere mobilis cuspis *a*: dico esse angulum *bca* ipsi BAL æqualem, si ML ducatur acui magneticæ *ae* in I productæ parallela.
3. Eodem modo, si regula, cui pyxis affixa, applicetur diagonali AE & recta *ae* designet situm acus, *bd* autem ipsi AE parallela lineam meridianam pyxidis; erit angulus *acb* ipsi EAL æqualis. Cetera igitur peraguntur ut ante.

DEMONSTRATIO.

Id tantummodo demonstrari debet, angulum *acb* esse ipsi BAL, & in altero situ pyxidis ipsi EAL æqualem. Quoniam ex resolutione patet, *bd* esse ipsi BA parallelam, erit angulus IHA ipsi *ecd* (§. 233), consequenter ejus verticali *bca* æqualis (§. 156 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). Similiter cum sit ML ipsi I*a* parallela, *per construct.* erunt alterni IHA & HAL æquales (§. 233); consequenter HAL $=$ *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Similiter, si pyxis ad diagonalem AE applicatur, cum sit *bd* ipsi EA parallela, *vi solutionis*; erit NKA $=$ *ecd* (§. 233). Quare cum porro sit *bca* $=$ *ecd* (§. 156); erit NKA $=$ *bca* (§.

Tab. XI. Fig. 174. (§. 87 *Arithm.*). Denique quia acus magnetica pyxide quomodocunque promota situm obtinet priori, quem habuerat, parallelum, estque adeo N*a* ipsi I*a* parallela; ML vero parallela ipsi I*a*, *per construct.* erit etiam ML ipsi N*a* parallela (§. 232); consequenter NKA = EAL (§. 233), ac ideo EAL = *bca* (§. 87 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Tab. VII. Fig. 115.

1. Charta super mensula expansa, ex centro *o* describatur circulus.
2. In eodem defigatur stylus, cui inferatur regula cum dioptris.
3. Collineetur in singulos areæ angulos A, B, C, &c. notenturque in peripheria circuli puncta diametraliter opposita *a* & *a*, *b* & *b*, *c* & *c* &c.
4. Investigetur longitudo rectarum *o*A, *o*B, *o*C &c. (§. 126).

Tab. VII. Fig. 116.

5. Charta, a mensula remota, alteri mundæ coextendatur in tabula, & Parallelismus ad *aa* applicatus arbitrario intervallo aperiatur, donec in charta munda ipsi parallela AA commode duci possit (§. 258).
6. Idem Parallelismus applicetur ad *bb* & eo usque aperiatur, donec recta BB huic parallela ducta alteram AA ipsi *aa* parallelam in puncto commodo O intersecet.
7. Applicetur porro successive ad rectas *cc*, *dd*, *ee*, quæ confusionis evitandæ gratia in Schemate non omnes sunt expressæ, & aperiatur usque ad punctum intersectionis O ipsis *aa* & *bb* parallelarum, ducanturque per idem dictis *cc*, *dd*, *ee* parallelæ CC, &c.
8. Tandem ex puncto intersectionis O convenienter determinetur longitudo rectarum ipsis *o*A, *o*B, *o* C, &c. respondentium juxta Scalam modicam (§. 279). Ita enim ut supra Ichnographiam absolvere licebit. Tab. VII. Fig. 116.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum tertia Probl. præs. modo demonstretur, si plures lineæ *aa*, *bb*, *cc* &c. se intersecent in *o* & his ducantur totidem aliæ parallelæ AA, BB, CC &c. se itidem in O intersecantes; fore $y = m$, $x = n$, $z = l$ &c. Quod facile patet. Continuetur enim BB, donec ipsi *aa* occurrat in f; continuentur etiam CC & *cc*, donec ipsis *bb* & AA occurrant in g & k. Erit, ob parallelas *aa* & AA, $m = f$, &, ob parallelas *bb* & BB, $y = f$ (§. 233); adeoque $m = y$ (§. 87 *Arithm.*). Similiter, ob parallelas *bb* & BB, $n = g$, &, ob parallelas *cc* & CC, $x = g$ (§. 233), adeoque $n = x$ (§. 87 *Arithm.*). Item, ob parallelas *aa* & AA, $z = k$, &, ob parallelas *cc* & CC, $l = k$ (§. 233), adeoque $l = z$ (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION I.

364. ***Ideo commendatur methodus ultima, quod exigua eaque unica charta ingenti tractui dimetiendo sufficiat. Si enim campus in plures resolutus fuerit partes, littera initialis in singulis nota quadam numerica notanda &, ubi unum alphabetum fuerit absolutum, aliud litteris aliis usurpandum.***

SCHO-

SCHOLION II.

Tab. VII. Fig. 115. *365. Etiam sine parallelismo Ichnographiam facillime conficere datur, si puncta* a *&* a, *item* b, c, d &c. *subtili acu perforentur & per foramina pulvis carbonum linteo inclusus trajiciatur. Puncta enim* a *&* a *dabunt rectam, qua bifariam divisa determinatur centrum* O: *reliqua puncta* b, c, d &c. *situm angulorum figuræ respectu hujus centri determinant.*

SCHOLION III.

366. Acus magnetica ex optima chalybe cudenda, nec foraminibus (quod ornatus gratia interdum fieri solet ab ignaris) pertundenda, quoniam vis magnetica per lineam rectam diffunditur. Ejus longitudo 6 digitos ne superet, ne sphæram magnetis excedat; a duobus ne deficiat. Præstat major minore, ut angulus, quo in usu a linea meridiana pyxidis declinat, exactius innotescat. Communiter utuntur acu duorum vel ad summum trium digitorum. Uno magnetis polo cum aliqua mora eam affricari sufficit: affricanda autem est pars acus, quæ septentrionem respicere debet, polo australi, nec ductu contrario destruendum, quod anteriore communicatum fuerat. In hemisphærio septentrionali, quod nos inhabitamus, pars acus borealis post contactum magnetis ponderosior evadit & inclinatur: quare levior fieri debet australi. Pyxis ex ligno, ebore vel orichalco; stylus, cui capitellum acus ex ære, cupro, vel argento intus in conum excavatum imponitur, ex orichalco vel argento paratur. Ut acus tanto exactius libretur, quidam styli apicem chalybeum faciunt.

PROBLEMA XLVIII.

Tab. VII. Fig. 117. 367. *Ichnographiam areæ* ABCDE *ex duabus stationibus* A *&* B *perficere.*

RESOLUTIO.

1. Posita mensula in A, collineatio fiat in singulos areæ angulos B, C, D, & E; ducanturque rectæ versus eos ex *a*. Tab. VII. Fig. 117.
2. Quæratur distantia stationum AB (§. 126), & in mensulam ex Scala geometrica (§. 279) transferatur in *ab*.
3. Mensula ex A deferatur in B, ita ut punctum cognomine *b* in ea designatum ipsi B respondeat, & regula ad lineam *ba* applicata, per dioptras collineanti baculus in A defixus occurrat.
4. Ex puncto *b* in singulos rursus figuræ angulos collineatio fiat, & versus eos rectæ ducantur, quæ priores in *e*, *d*, *c*, interfecant.
5. Denique jungantur puncta *a* & *e*, *e* & *d*, *d* & *c*, rectis *ae*, *ed*, *dc*.

Dico, Ichnographiam esse absolutam.

DEMONSTRATIO.

Quoniam 1°. ABC $=$ *abc*, & CAB $=$ *cab*, *per constr.* erit AB : BC $=$ *ab* : *bc*, & AB : AC $=$ *ab* : *ac* (§. 267). Similiter 2°. quia EAB : *eab*, & EBA $=$ *eba*, *per constr.* erit AEB $=$ *aeb*, itemque EA : AB $=$ *ea* : *ab* & EB : AB $=$ *eb* : *ab* (§. *cit.*). Porro 3°. cum sit DAB $=$ *dab* & DBA $=$ *dba*; erit etiam DA : AB $=$ *da* : *ab* & DB : AB $=$ *db* : *ab* (§. *cit.*). 4°. DBC $=$ *dbc*, *per constr.* &, quoniam DB : AB $=$ *db* : *ab* (*per num.* 3), atque AB : BC $=$ *ab* : *bc* (*per num.* 1); DB : BC $=$ *db* : *bc* (§. 194 *Arithm.*). Ergo CDB $=$ *cdb*, atque BCD $=$ *bcd*, & BC : CD $=$ *bc* : *cd*, nec non BD : CD $=$ *bd* : *cd* (§. 183). 5°. DB : BC $=$ *db* : *bc* (*per demonstra-*

Tab. VII. Fig. 117. *ta n.* 4.) & AB : BC = *ab : bc* (*per num.* 1). Ergo DB : AB = *db : ab* (§. 195 *Arithm.*). Est vero etiam EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2). Ergo DB : EB = *db : eb* (§. *cit.*). Quare cum etiam sit DBE = *dbe*, *per construct.* erit BDE = *bde* & DEB = *deb*, nec non DB : DE = *db : de* & DE : EB = *de : eb* (§. 183). 6°. BD : CD = *bd : cd* (*per num.* 4) & DB : DE = *db : de* (*per num.* 5). Ergo CD : DE = *cd : de* (§. 196 *Arithm.*). 7°. EB : AB = *eb : ab* (*per num.* 2) & DE : EB = *de : eb* (*per num.* 5). Ergo DE : AB = *de : ab* (§. 197 *Arithm.*). Quare cum porro sit EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2) erit DE : EA = *de : ea* (§. 195 *Arithm.*). 8°. Quia CDB = *cdb* (*per num.* 4) & BDE = *bde* (*per num.* 5); erit CDE = *cde* (§ 88 *Arithm.*). 9°. Similiter quia AEB = *aeb* (*per num.* 2) & DEB = *deb* (*per num.* 5) erit DEA = *dea* (§ 88 *Arithm.*). Cum itaque sit EAB = *eab*, & ABC = *abc*, *per constr.* BCD = *bcd* (*per num.* 4), CDE = *cde* (*per num.* 8), & DEA = *dea* (*per num.* 9); atque praeterea AB : BC = *ab : bc* (*per num.* 1), BC : CD = *bc : cd* (*per num.* 4), CD : DE = *cd : de* (*per num.* 6), DE : EA = *de : ea* (*per num.* 7), tandemque EA : AB = *ea : ab* (*per num.* 2); figuræ ABCDE altera *abcde* similis est (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

1. In A investigetur quantitas angulorum EAD, DAC, & CAB, itemque ex B quantitas angulorum ABE, EBD, & DBC (§. 152); quæraturque stationum distantia AB (§. 126).
2. Ducta in charta recta *ab* per Scalam modicam distantiæ stationum AB convenienter determinetur (§. 279).
3. In *a* constituantur angulis EAD, DAC, CAB æquales *ead*, *dac*, *cab*; in *b* vero ipsis ABE, EBD & DBC æquales *abe*, *ebd* & *dbc* (§. 155).
4. Tandem puncta intersectionum *b*, *c*, *d*, *e*, *a*, rectis connectantur.

Dico *abcde* esse similem areæ ABCDE.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente.

Aliter.

1. Ope pyxidis magneticæ observentur, ut in Probl. præc. ex duabus stationibus A & B declinationes linearum AB, AC, AD, AE, itemque BC, BD, BE a linea meridiana acus.
2. Quæratur distantia stationum (§. 126).
3. In charta eodem modo, quo in Probl. præc. determinetur situs rectarum *ab*, *ac*, *ad*, &c. ac puncta intersectionum *c*, *d*, *e* rectis connectantur.

Ita Ichnographia erit absoluta.

DEMONSTRATIO.

Coincidit cum præcedente, modo una notentur, quæ in demonstratione penultima Problematis præcedentis dicta sunt.

PROBLEMA XLIX.

368. *Ichnographiam areæ perficere, cujus integram peripheriam peragrare licet.*

RESO-

RESOLUTIO.

Tab. VII. *Fig.* 117. 1. Mensula in A collocata, collineetur in baculos in B & E defixos, ut angulo BAE æqualis *bae* in eadem designari possit.

2. Longitudo utriusque rectæ AB & AE (§. 126) explorata ex Scala minore transferatur in mensulam ex *a* in *b* & *e* (§. 279).

3. Mensula in B transloceetur, ita ut ipsi B punctum cognomine in eadem respondeat, & visus per dioptras collineantis baculum in A attingat. Quo facto,

4. Idem dirigatur per easdem in C, quo sicut ante, angulo ABC æqualis *abc* & rectæ BC proportionalis *bc* in mensula designari possint.

5. Quodsi idem cum reliquis areæ angulis & lateribus fiat; erit figura in mensula delineata areæ propositæ similis.

DEMONSTRATIO.

Singuli enim anguli figuræ in mensula delineatæ sunt æquales singulis angulis areæ, & latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sunt, *per constr.* Figura igitur delineata est areæ similis (§. 175). *Q. e. d.*

Aliter.

Quæratur longitudo omnium laterum (§. 126), & quantitas tot angulorum quot sunt latera demtis tribus (§. 152). His enim datis Ichnographia *per Probl.* 46 (§. 360), vi demonstrationis præcedentis absolvetur.

Aliter.

1. Notetur in singulis angulis figuræ A, B, C, D, E, laterum AB, BC, CD, DE, AE declinatio a linea meridiana pyxidis magneticæ, ut in Probl. 47 (§. 363). Tab. VII. *Fig.* 118. n. 1.

2. Quæratur simul longitudo laterum (§. 126).

3. In charta designetur linea *ab*, & in eam transferatur ex Scala modica longitudo lateris AB (§. 279). n. 2.

4. Ad rectam *ab* applicetur latus pyxidis lineæ ejusdem meridianæ parallelum, ita tamen ut extremum ipsius septentrionale septentrionem respiciat, & charta cum pyxide huc illucque moveatur, donec acus angulum declinationis debitum monstret.

5. Charta immota, idem latus pyxidis collocetur in *a* & circa id vertatur, donec angulum declinationis convenientem lateri AE indicet acus: ita enim rectam *ae* ducere & per Scalam modicam ipsi AE proportionalem determinare licet.

6. Quodsi hæc operatio continuetur; Ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

Non aliud hic demonstrandum est, quam angulum *bae*, ope pyxidis magneticæ in charta sic designatum, esse alteri BAE in campo æqualem. Superius usum pyxidis magneticæ nullis dioptris instructæ exponentes demonstravimus, pyxide ad latus figuræ AB in campo ita applicata ut linea meridiana ejusdem sit huic parallela, angulum declinationis

Tab. VII. Fig. 118. nis acus esse ipsi BAM æqualem, si ML ita ducatur, ope pyxidis, ut ejusdem lineæ meridianæ parallela existat (§. 363). Eodem modo ex ibidem demonstratis apparet, pyxide eadem lege ad latus figuræ AE applicata, esse angulum EAL angulo declinationis acus in hoc situ æqualem. His jam datis, si latus pyxidis lineæ meridianæ ejusdem parallelum ad rectam *ab* in charta ductam applicetur, & charta cum pyxide vertatur, donec acus, in conveniente situ, angulum declinationis eundem, quem in campo ad latus BA, monstret; erit perinde *ba*K eidem angulo declinationis æqualis. Similiter, si eadem lege pyxis applicetur ad punctum *a*, donec acus angulum declinationi lateris AE convenientem monstret & juxta ejus latus ducatur *ae*; erit angulus *ea*I angulo declinationis æqualis. Supponimus nempe, rectam KI per *a* ea lege esse ductam, ut lineæ meridianæ pyxidis in plano mundi imaginario immobili respondeat, centro in *a* collocato. Est igitur $1 = I$ & $6 = VI$, *per construct.* Sed $1 + 7 + 6 = 180°$, & $I + VII + VI = 180°$ (§. 147); consequenter $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§ 87 *Arithm.*). Quare $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Vel:

Tab. VII. Fig. 118. n. 2.

1. In charta ducantur lineæ quotcunque parallelæ.
2. Instrumentum transportatorium Parallelismo instructum ad extimam parallelarum ita applicetur, ut centrum sit in *a*, radius vero ipsi *a*K respondeat, noteturque punctum *z*, indicans in peripheria Instrumenti gradum declinationis acus a linea meridiana pyxidis in campo ad punctum A. Tab. VII. Fig. 118.
3. Ab *a* per *z* ducatur recta, & ex *a* in *b* transferatur ex Scala modica longitudo rectæ AB in campo mensuratæ.
4. Regula Parallelismi solitaria unam parallelarum stringente, altera cui cohæret Instrumentum transportatorium promoveatur, donec hujus centrum ipsum *b* attingat & ad gradum declinationis in B observatæ designetur punctum *y*: quo facto, ut ante, rectam *bc* ducere licet.
5. Hac operatione continuata, integra areæ Ichnographia tandem absolvetur.

DEMONSTRATIO.

$1 = I$, $2 = II$, $3 = III$, $4 = IV$ & $5 = V$, *per constr.* & quoniam recta per *b* ducta (quæ diametrum Instrumenti transportatorii refert) ipsi *a*K parallela, *per construct.* acus vero magnetica in B est parallela situi in A; erit $1 = 8$, & $I = VIII$ (§. 233), consequenter $8 = VIII$ (§. 87 *Arithm.*). Simili modo ostenditur esse $6 = VI$. Quare cum sit $1 + 7 + 6 = I + VII + VI$ (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit $7 = VII$ (§. 91 *Arithm.*). Porro $2 = II$, *per constr.* & $8 = VIII$, *per demonstr.* Ergo $8 + 2 = VIII + II$ (§. 88 *Arithm.*). Similiter $12 = 2$ & $XII = II$ (§. 233) & $3 = III$, *per constr.* Quare cum sit

sit 12+9+3=XII+IX+III (§. 147 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*); erit 9=IX (§. 91 *Arithm.*). Porro 4=IV, *per constr.* & hinc, cum sit 10=3 & X =III (§. 233), adeoque ob 3=III, *per demonstr.* 10=X (§. 87 *Arithm.*), 4+10=IV+X (§. 88 *Arithm.*). Denique 5=V, *per constr.* & 4+11 =IV+XI (§. 233 *Geom.* & §. 87 *Arithm.*). adeoque ob 4=IV, *per constr.* 11=XI (§. 91 *Arithm.*). Quare 5+11=V+XI (§. 88 *Arithm.*). Singuli igitur anguli figuræ *abcde* sunt æquales singulis angulis areæ ABCDE. Quare cum etiam latera illius lateribus hujus homologis proportionalia sint, *per constr.* figura *abcde* areæ ABCDE similis (§. 175). *Q. e. d.*

PROBLEMA L.

369. *Figura in charta delineata similem in campo designare.*

RESOLUTIO.

Quoniam hoc Problema est inversum alterius, quo Ichnographias arearum paramus; non modo tot ejus dantur casus, quot hujus commemoravimus, sed & ipsius resolutio ex resolutionibus Problematum inmediate præcedentium intelligitur. Ex. gr. Si semicirculo, vel mensula & pertica utimur: anguli singuli figuræ aut anguli diagonalibus intercepti, &c. in Solo designantur *per Probl.* 7 (§. 155), & latera, vel diagonales, &c. per mensuram majorem decenter determinantur.

CAPUT VI.

De Figurarum Dimensione ac Divisione.

PROBLEMA LI.

370. *Invenire aream Quadrati.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur longitudo lateris (§. 126).
2. Hæc ducatur in seipsam.

Factum exprimit aream Quadrati. Sit ex. gr. Latus Quadrati = 345

```
        345
        345
       ----
       1725
      1380
     1035
     ------
erit Area = 119025
```

DEMONSTRATIO.

Aream quadrati investigans quærit, quot digiti quadrati, hoc est, quot quadratula digitum longa & lata in eodem contineantur (§. 118). Evidens vero est, si latus Quadrati AB concipiatur in quotcunque partes æquales & Quadratum ipsum per rectas puncta divisionum in lateribus oppositis connectentes in Quadrata minora divisum; tot esse quadratulorum series, quot partes habet latus AB, & in qualibet serie tot reperiri quadratula, quot latus BC, vel idem AB, habet partes. Numerus ergo quadratulorum invenitur, si latus in seipsum ducatur. *Q. e. d.* Tab. VII. Fig. 119.

COROLLARIUM I.

371. Si latus Quadrati fuerit 10, Area erit 100. Cum igitur decempeda sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25): pertica quadrata 100 pedes quadratos; pes quadratus 100 digitos quadratos, &c. continet (§. 118).

COROLLARIUM II.

372. Si latus Quadrati fuerit 12, area erit 144. Quare cum pertica dividatur in 12 pedes; pes in 12 digitos &c. pertica quadrata continet 144 pedes quadratos; pes quadratus 144 digitos quadratos &c. (§. 118).

COROLLARIUM III.

373. Datus igitur numerus in priori casu facile in digitos, pedes, & perticas quadratas resolvitur, si scilicet a dextra sinistram versus duæ notæ digitis, duæ pedibus resecentur: quæ enim sinistram versus residuæ fiunt, perticis cedunt. Ex. gr. 119025 digiti conficiunt 11 perticas, 90 pedes, 25 digitos.

COROLLARIUM IV.

374. Quadrata sunt inter se in ratione duplicata laterum (§. 159 *Arithm.*). Ex. gr. Quadratum lateris dupli est quadruplum Quadrati lateris simpli. Et Quadrata æqualia sunt, quorum latera æqualia sunt.

PROBLEMA LII.

Tab. VII. Fig. 120. 375. *Invenire aream Rectanguli* ABCD.

RESOLUTIO.

1. Investigetur longitudo laterum AB & AC (§. 126).
2. Ducatur AB in AC.

Factum erit area Rectanguli.

Ex. gr. Sit AB = 345
AC = 123
1035
690
345
erit Area = 42435

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Problematis præcedentis.

COROLLARIUM I.

376. Rectangula sunt in ratione composita suorum laterum AB & AC (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

377. Si ergo fuerint tres lineæ continue proportionales, Quadratum mediæ Rectangulo extremarum æquale est (§. 298 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

378. Si quatuor fuerint lineæ rectæ proportionales; Rectangulum sub extremis æquatur Rectangulo sub mediis (§. 297 *Arithm.*).

COROLLARIUM IV.

379. Quare si ex eodem puncto A ducantur duæ rectæ, quarum altera AD circulum tangit, altera AB secat; erit Quadratum tangentis AD Rectangulo sub secante AB & ejus portione extra circulum AC æquale (§. 334 & 377). Tab. VI. Fig. 102.

COROLLARIUM V.

380. Si duæ vel plures secantes GL & GM ex eodem puncto G ducantur, erunt Rectangula sub totis & earum portionibus extra circulum æqualia (§. 333 & 379). Tab. VI. Fig. 97.

COROLLARIUM VI.

381. Si duæ chordæ HM & LI se mutuo secent in K; erunt Rectangula sub segmentis inter se æqualia (§. 332 & 378). Tab. I. Fig. 14.

COROLLARIUM VII.

382. Cum orgya, qua lignorum strues metimur, vel quadrati, vel rectanguli figuram habeat; ejus area *per Probl. præc. vel præs.* inveniri potest. Per hanc itaque si factum ex longitudine in latitudinem struis dividatur; quotus indicat, quot ipsa orgyas contineat (§. 69 *Arithm.*).

THEOREMA LXXVIII.

383. *Duo Parallelogramma* ABDC *&*

Tab. VII. Fig. 121. & ECDF *super eadem basi* CD & *inter easdem parallelas* AF & CD *constituta sunt inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam AB & CD, itemque EF & CD sunt latera opposita parallelogrammi *per hypoth.* erit AB=CD & EF=CD (§. 335); consequenter AB=EF (§. 87 *Arithm.*) & hinc porro AE=BF (§. 88 *Arithm.*). Quoniam porro AC =BD & CE=DF (§. 335); erit △ACE=△BDF (§. 204); adeoque ABGC=FEGD (§. 91 *Arithm.*); consequenter ABDC=EFDC (§. 88 *Arithm.*) *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

384. Quoniam AF & CD sunt parallelæ, *per hypoth.* erunt perpendicula inter eas intercepta æqualia (§. 226): quæ cum sint altitudines parallelogrammorum (§. 227); parallelogramma inter easdem parallelas constituta ejusdem altitudinis sunt. Patet adeo Parallelogramma super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia esse (§. 383).

COROLLARIUM II.

385. Ergo & Triangula super eadem basi & ejusdem altitudinis æqualia sunt. Nam Parall. ACDB = Parall. ECDF (§. 384), sed △ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB & △FCD = $\frac{1}{2}$ Parall. ECDF (§. 337). Ergo △ACD = △FCD (§. 94 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

386. Quodcunque adeo Triangulum CFD est dimidium Parallelogrammi ACDB super eadem vel æquali basi CD, & ejusdem altitudinis, seu intra easdem parallelas. Nam △CFD = △ACD (§. 385). Sed △ACD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 337). Ergo △CFD = $\frac{1}{2}$ Parall. ACDB (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA LIII.

387. *Invenire aream Rhombi & Rhomboidis, seu Parallelogrammi obliquanguli.*

RESOLUTIO.

1. In CD pro basi assumtam demittatur perpendiculum AE (§. 216), quod erit altitudo parallelogrammi (§. 227). Tab. VII. Fig. 122.
2. Multiplicetur basis per altitudinem.

Ex. gr. Sit CD = $4^{\circ}\ 5'\ 6''$

	AE =	2	3	4	
		1	8	2	4
	1	3	6	8	
	9	1	2		

Erit Area = $10^{\circ}6\ 7'\ 0\ 4''$

DEMONSTRATIO.

Parallelogrammum obliquangulum æquatur rectangulo super eadem basi CD & ejusdem altitudinis CE (§. 384). Sed area rectanguli æquatur facto ex basi in altitudinem (§. 375 & 229). Ergo eidem æqualis est area parallelogrammi obliquanguli (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

388. Parallelogramma sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 159 *Arithm.*), adeoque & Triangula eorum dimidia (§. 386) in eadem existunt (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

389. Ergo si altitudines sunt æquales, basium; si bases sunt æquales, altitudinum rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

390. Parallelogramma æqualia bases & altitudines reciprocant (§. 299 *Arithm.*).

THEOREMA LXXIX.

391. *Triangulum est æquale Parallelogrammo super eadem basi sed dimidiæ altitudinis; itemque Parallelogrammo super dimidia basi & ejusdem altitudinis.* Tab. VII. Fig. 123.

DEMONSTRATIO.

Sit AEFB parallelogrammum rectangulum, cum obliquangulo cuicunque super eadem basi AB & intra easdem

Tab. VII. Fig. 123. basi parallelas AB & EF existenti æquale sit (§. 383) atque adeo eidem salva quantitate substitui possit (§. 15 *Arithm.*). Jam

I. Si triangulum ADC fuerit rectangulum, assumta AD pro basi, erit CD altitudo; sumta vero DC pro basi, erit AD altitudo (§. 228). Jam cum altitudo parallelogrammi rectanguli AE (§. 229) sit altitudini dimidiæ trianguli CG æqualis, *per hypoth.* & angulus ad D sit rectus (§ 91), adeoque, ob EF & AB parallelas (§. 102), is ad G similiter rectus (§. 233), ac præterea angulus ad E itidem rectus (§. 100), & hinc G=E (§. 145); sint vero etiam verticales ad H æquales (§. 156): erit △CGH = △EHA (§. 252); consequenter EGDA = △ACD (§. 88 *Arithm*). *Q. e. d.*

II. Si triangulum ACB fuerit obliquangulum, per perpendiculum DC in duo rectangula ADC & CDB resolvetur (§. 78, 91). Ergo si fiat FB = DG dimidiæ altitudini; erit DGFB = △DCB & AEGD = △ACD, *per cas.* 1. Ergo AEFB = △ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Tab. VIII. Fig. 124. Sit DK = KB = ½ DB & DG = GA = ½ DA; erit GK = ½ AB, adeoque dimidia basis. Jam CFKD = △DCB & GECD = △ACD *per cas* 1. Quare EGKF = △ACB (§. 88 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LIV.

Tab. VIII. Fig. 124. 392. *Invenire aream Trianguli.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Multiplicetur basis AB per altitudinem CD: erit productum area rectanguli ejusdem baseos & altitudinis (§. 387). Tab. VIII. Fig. 125.

2. Productum dividatur bifariam. Ita prodit area Trianguli ABC (§. 386).

Aliter.

Basis dimidia ½ AB multiplicetur per altitudinem CD; vel basis AB per altitudinem dimidiam ½ CD. Factum erit area Trianguli (§. 391, 387).

Ex. gr. AB = 3° 4′ 2″ | AB = 3° 4′ 2″
CD = 2 3 4 | ½CD = 1 1 7
1 3 6 8 | 2 3 9 4
1 0 2 6 | 3 4 2
6 8 4 | 3 4 2
8 0 0 2 8 | △ = 4 0 0 1 4
2) ———
△ACB, 4 0 0 1 4

½ AB = 1° 7′ 1″
CD = 2 3 4
6 8 4
5 1 3
3 4 2
△ = 4 0 0 1 4

COROLLARIUM I.

393. Triangula æqualia bases & altitudines dimidias (§. 299 *Arithm.*); consequenter etiam bases & altitudines integras reciprocant (§. 178 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

394. Si area Trianguli per basin dimidiam dividitur, quotus est altitudo (§. 210 *Arith.*).

PROBLEMA LV.

395. *Invenire latus Quadrati Parallelogrammo, vel Triangulo dato æqualis.*

RESOLUTIO.

Quæratur inter basin & altitudinem Parallelogrammi, vel inter dimidiam basin & altitudinem, aut integram basin & dimidiam altitudinem Trianguli media proportionalis, *per* §. 327, aut in numeris *per* §. 301 *Arithm.* Ita prodit latus Quadrati quæsitum.

DE-

DEMONSTRATIO.

Factum enim ex basi in altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 375, 387); & factum ex dimidia basi in altitudinem, vel ex dimidia altitudine in basin aream trianguli (§. 392). Cum adeo quadratum lineæ vel numeri reperti sit in utroque casu facto isti æquale (§. 298 *Arithm.*); erit Quadratum istud in priori casu Parallelogrammo, in posteriori Triangulo æquale. *Q. e. d.*

THEOREMA LXXX.

396. *In Parallelogrammis & Triangulis similibus, altitudines sunt lateribus homologis proportionales, & bases ab iis lateribus proportionaliter secantur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VII. Fig. 122. Cum altitudines AE & *ae* sint ad bases CD & *cd* perpendiculares (§. 227); erunt E & *e* anguli recti (§. 78), adeoque æquales (§. 145). Et quia parallelogrammum ABDC ipsi *abdc* triangulum CAD ipsi *cad* simile, *per hypoth.* erit C = *c* (§. 175). Quare AC:AE = *ac ae* (§. 267). Est vero etiam AC:CD = *ac: cd* (§. 175). Ergo AE : CD = *ac: ed* (§. 196 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quoniam E = *e* & C = *c*, *per demonstr.* erit AC : CE = *ac : ce* (§. 267). Est vero etiam AC : CD = *ac : cd* (§. 175). Ergo CE : CD = *ce : cd* (§. 196 *Arithm.*); adeoque ED : CE = *ed : ce* (§. 193 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

397. *Patet quoque a priori. Quoniam enim* ABDC ∽ abdc & △ ACD ∽ △ acd, *per hypoth. perpendicula* AE & ae, *pariterque segmenta basium* CE & ce, *itidemque* ED & ed *eodem modo determinantur* (§. 119, 216), *adeoque similia sunt* (§. 120). *Cum adeo ea eadem sint, per quæ a se invicem discerni debebant* (§. 24 Arithm.), *lineæ autem rectæ, utpote similes* (§. 17), *non aliter nisi ratione discerni possint* (§. 132 Arithm.); *tam perpendicula, quam segmenta basium ad latera homologa figurarum eandem rationem habere debent* (§. 149 Arithm.). *Eodem modo generaliter patet, rectas quascunque in figuris similibus eodem modo determinatas tum inter se, tum ad latera homologa eandem rationem habere.* Tab. VII. Fig. 122.

COROLLARIUM I.

398. Quoniam Parallelogramma & Triangula sunt in ratione composita altitudinum & basium (§. 388); similia vero habent bases altitudinibus proportionales (§. 396); igitur Parallelogramma & Triangula similia habent rationem duplicatam homologorum laterum (§. 159 *Arithm.*). Et eodem modo patet, quod etiam sint in ratione duplicata altitudinum ac segmentorum baseos; immo linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 397).

COROLLARIUM II.

399. Sunt ergo ut quadrata laterum, altitudinum, & segmentorum basium homologorum, necnon linearum eodem modo utlibet determinatarum (§. 374).

PROBLEMA LV.

400. *Invenire aream Polygoni irregularis, ac Trapezii.* Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Resolvatur per diagonales AD & AC in triangula.
2. Inveniantur areæ singulorum triangulorum (§. 392) &
3. Addantur. Erit summa area quæsita (§. 86 *Arithm.*).

Tab. VIII. Fig. 126. n. 1.

Ex. gr. $\frac{1}{2}$AD = 43′ | $\frac{1}{2}$AD = 43′ | $\frac{1}{2}$AC = 42′
EF = 35 | GC = 45 | BH = 30
215 | 215 | △ABC, 1260
129 | 172
△AED, 1505 | △DAC, 1935
△AED, 1505
△ABC, 1260

Area Polygoni irreg. 47°00′

Quod si $\frac{1}{2}$AD multiplicetur per summam altitudinum EF + GC, vel integra AD per $\frac{1}{2}$(EF + GC); prodibit area Trapezii AEDC.

Ex. gr. EF = 35 | $\frac{1}{2}$AD = 43
GC = 45 | EF + GC = 80
EF + GC = 80 | AEDC = 3440
$\frac{1}{2}$(EF + GC) = 40
AD = 86
AEDC = 3440

Tab. VIII. Fig. 127. Similiter si in Trapezio fuerit AB ipsi CD parallela, erunt triangulorum altitudines BF & GC æquales (§. 226, 227); consequenter Trapezii area prodit, ducta semisumma basium parallelarum AB & CD in altitudinem ejus BF (§. 392).

Ex. gr. Sit AB 246″, CD = 378″, BF = 195″

erit $\frac{1}{2}$(AB + CD) = 312
BF = 195
1560
2808
312
Area Trapezii 60840

Theorema LXXXI.

Tab. VI. Fig. 107. 401. *Figura regularis* ABCDE *ex centro circuli circumscripti* F *in triangula æqualia atque similia resolvitur, & area ejus æquatur Triangulo, cujus basis peripheria totius Polygoni* AB+BC+CD, *&c. altitudo perpendiculum* FG *ex centro* F *in latus unum* AB *demissum. Idem valet de area circumscripti* abcde, *nisi quod altitudo sit radius* FG. Tab. IV. Fig. 107.

Demonstratio.

Quoniam AB = BC = CD = DE = EA (§. 106), & FA = FB = FC = FD = FE (§. 40); triangula AFB, BFC, CFD, DFE, EFA æqualia & similia sunt (§. 204). *Quod erat unum.*

Constituantur triangula AFB, BFC, CFD, &c. in quæ resolutum est Polygonum ABCDE, super eadem recta AA (§. 199). Erigatur in A perpendicularis Af (§. 249) ipsi altitudini triangulorum æqualis. Erit AfB = AFB BfC = BFC, CfD = CFD, &c. (§. 385); consequenter AfA = AFB + BFC + CFD &c. (§. 88 *Arithm.*) æqualis est areæ Polygoni regularis (§. 86, 87 *Arithm.*). *Quod erat secundum.* Tab. VIII. Fig. 128.

Cum recta Fg ex centro F ad contactum g ducta sit radius & ad latus ac perpendicularis (§. 308); erit ea altitudo trianguli aFc (§. 227). Reliqua patent ut ante. *Quod erat tertium.* Tab. VI. Fig. 107.

Problema LVI.

402. *Invenire aream Polygoni regularis.*

Resolutio & Demonstratio.

1. Latus Polygoni AB multiplicetur per dimidium laterum numerum; ex. gr. latus Hexagoni per 3.
2. Factum porro ducatur in perpendiculum GF ex centro circuli circumscripti in latus AB demissum.

Ita prodit area quæsita (§. 392, 401).

Ex.

Tab. VI. *Fig.* 107.

Ex. gr. AB = 5°4′
dimidius Numer. later. $2\frac{1}{2}$

27
108

Semiperimeter = 135
FG = 29

1215
270

Area Pentagoni 39°15′

THEOREMA LXXXII.

Tab. VI. *Fig.* 111.

403. *Quadrilatera & Polygona similia* ABCDE *&* abcde *per diagonales* AC, AD *&* ac, ad *in similia triangula* ABC *&* abc, ACD *&* acd, ADE *&* ade *dividuntur, & inter se & totis proportionalia.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam ABCDE ∽ *abcde, per hypoth.* erit $o = o$. & AB : BC = *ab* : *bc* (§. 175). Ergo △*bac* ∽ △BAC, $y = y$ atque *bc* : *ca* = BC : CA (§. 183). Est vero etiam *bc* : *cd* = BC : CD, & $n + y = n + y$ (§. 175). Ergo *ca* : *cd* = CA : CD (§. 196 *Arithm.*) & $n = n$ (§. 91 *Arith.*); consequenter △*cad* ∽ △CAD, *cd* : *da* = CD : DA, & $u = u$ (§. 183). Est vero etiam $u + s = u + s$, & *cd* : *de* = CD : DE (§. 175). Ergo $s = s$ (§. 91 *Arithm.*) & *da* : *de* = DA : DE (§. 196 *Arithm.*); consequenter △ *dea* ∽ △DEA (§. 183), *Quod erat primum.*

Quoniam △ABC ∽ △*abc*, △DAC ∽ △*dac* & △DAE ∽ △*dae*, *per demonstrata*; erit △ABC : △*abc* = CA² : *ca*², △DAC : △*dac* = CA² : *ca*² = DA² : *da*² & △DAE : △*dae* = DA² : *da*² (§. 398); consequenter △ABC : △*abc* = △DAC : △*dac* & △DAC : △*dac* = △DAE : △*dae* (§. 167 *Arith.*); adeoque etiam △DAE : △*dae* = △ABC : △*abc* (§. *cit.*). Sunt igitur △△ ABC, ACD, ADE, & *abc acd, ade* inter se proportionalia. *Quod erat secundum.* Tab. VI. *Fig.* 111.

Quoniam denique △ABC : △*abc* = △DCA : △*dca* = △DEA : △*dea per secundum hujus*; erit △ABC + △DCA + △DEA : △*abc* + △*dca* + △*dea* = △ABC : △*abc* (§. 192 *Arithm.*). Sed △ABC + △DCA + △DEA = polygono ABCDE & △*abc* + △*dca* + △*dea* = *abcde* (§. 86 *Arithm.*). Ergo ABCDE : *abcde* = △ABC : △*abc* = △DCA : △*dca*, &c. (§. 168 *Arithm.*); consequenter ABCDE : △ABC = *abcde* : △*abc*, & ABCDE : △DCA = *abcde* : △*dca* &c. (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

COROLLARIUM.

404. Cum Polygona regularia sint æquilatera & æquiangula (§. 106), tum etiam sibi mutuo æquiangula (§. 344); Polygona regularia ejusdem ordinis, veluti omnia Pentagona, omnia Hexagona, &c. regularia, inter se similia sunt (§. 175). Polygona igitur regularia ejusdem ordinis per diagonales in triangula similia dividuntur & inter se, & totis proportionalia.

SCHOLION.

405. *Poterat Theorema præsens ex notione determinationis facilius demonstrari. Nimirum cum figuræ* ABCDE *&* abcde *sint similes*, per hypoth. *adeoque anguli* A *&* a *æquales* (§. 175), *atque præterea diagonales* AC, AD & ac, *ad ex angulis hisce æqualibus* A *&* a *ducantur*; △△ ABC *&* abc, CAD *&* cad DAE *&* dae *eodem modo determinantur* (§. 119); *consequenter & inter se similia sunt & similes partes figurarum existunt* (§. 120); *eandem adeo ad figuras tanquam tota rationem* (§. 170 Arithm.), *immo eandem inter se rationem,*

Tab. VI. *tionem quam Polygona aut Quadrilatera habent* (§. 171 Arithm.).

Fig. 111.

THEOREMA LXXXIII.

406. *Figuræ, tam regulares quam similes irregulares, habent rationem duplicatam homologorum laterum.*

DEMONSTRATIO.

Sint figuræ ABCDE & *abcde*, sive regulares, sive irregulares similes, eæque sive quadrilateræ, sive polygonæ quæcunque ejusdem ordinis; erit ABCDE : *abcde* = △ ABC : △ *abc* = △ ACD : △ *acd* = △ ADE : △ *ade* (§. 403, 404). Sed △ ABC : △ *abc* = AB² : *ab*² = BC² : *bc*²; △ ADC : △ *adc* = CD² : *cd*² & △ ADE : *ade* = DE² : *de*² = EA² : *ea*² (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = AB² : *ab*² = BC² : *bc*² = CD² : *cd*² = DE² : *de*² = EA² : *ea*² (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

407. *Eodem modo ostenditur, figuras rectilineas similes esse in ratione duplicata diagonalium ex angulis æqualibus* A & a *ductarum, vel linearum aliarum quarumcunque eodem modo intra eas determinatarum* (§. 405).

THEOREMA LXXXIV.

408. *Circuli & figuræ similes ipsis inscriptæ vel circumscriptæ sunt inter se ut Quadrata diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Ponamus describi duos circulos & iis circumscribi quadrata, omnia utrobique eodem modo determinabuntur (§. 119 & 357). Sunt ergo figuræ utræque inter se similes (§. 120). Cum adeo utrobique eadem sint, per quæ distingui debent (§. 24 *Arithm.*); quadrata circulis circumscripta ad suos circulos eandem rationem habere debent (§. 132 *Arithm.*). Quamobrem Circuli inter se sunt ut Quadrata diametrorum (§. 173 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Eodem modo ostenditur, figuras similes circulis inscriptas vel circumscriptas esse ut circulos, quibus inscribuntur vel circumscribuntur. Sed circuli sunt ut quadrata diametrorum *per demonstrata.* Ergo Figuræ ipsis inscriptæ & circumscriptæ similes sunt ut Quadrata diametrorum (§. 167 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

Aliter.

Resolvantur Polygona circulis inscripta ABCDE & *abcde* ex centris F & *f* in △△ AFB, BFC, CFD, & *afb*, *bfc*, *cfd*, &c. erit angulus FAB = *fab* & FBA = *fba*, &c. (§. 344, 347); consequenter △ AFB ∽ △ *afb* (§. 267). Eodem modo patet, esse △ BFC ∽ △ *bfc*, △ CFD ∽ △ *cfd* &c. Habemus itaque △ AFB : △ *afb* = BF² : *bf*², △ BFC : △ *bfc* = BF² : *bf*² &c. (§. 398). Ergo ABCDE : *abcde* = BF² : *bf*² (§. 187 *Arithm.*); consequenter cum radii BF & *bf* sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & 178 *Arithm.*), Polygona similia circulo inscripta sunt ut Quadrata diametrorum (§. 260 *Arithm.*). Et idem eodem modo ostenditur de Polygonis circulo circumscriptis, cum triangula similia etiam sint in ratione duplicata altitudinum (§. 398), altitudines vero triangulorum, in quæ resolvitur polygonum circulo circumscriptum, sint radii circulorum (§. 355). Tab. VI. Fig. 107.

Quodsi

Quodsi jam Polygonum circulo inscriptum tot sumatur laterum, donec subtensa a peripheria magnitudine inassignabili differat; polygonum cum circulo idem erit. Unde etiam Circuli erunt inter se ut diametrorum Quadrata.

COROLLARIUM.

409. Habent ergo Circuli rationem duplicatam diametrorum (§. 374): adeoque, cum radii sint ut diametri (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*), & radiorum (§. 260, 259 *Arithm.*).

THEOREMA LXXXV.

410. *Circulus æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radio æqualis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 129. Concipiatur peripheria circuli in partes numero infinitas inter se æquales adeoque infinite parvas divisa; arcus infinite exigui *ab* supra chordam cognominem excessus erit quovis dato minor, seu inassignabilis, adeoque revera nullus. Concipiantur porro ex centro *c* ad extrema arcus infinite parvi *ab* ducti radii *cb* & *ca*: erit angulus *acb* infinite parvus, adeoque *a* & *b* non different a recto (§. 240); consequenter si *ab* sumatur pro basi, radius *ac* erit trianguli *abc* altitudo (§. 228). Cum adeo area circuli resolvatur in istiusmodi triangula numero infinita, quorum altitudo communis est radius *ac*, bases vero junctim sumtæ sunt peripheriæ circuli æquales, *per demonstrata*; erit ille æqualis triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius circuli (§. 401). *Q. e. d.*

SCHOLION.

411. *Hac demonstrandi methodo primus usus est* KEPLERUS (*a*). *Eam exemplo ejus excitatus sub nomine* Methodi indivisibilium *magis excoluit* CAVALERIUS (*b*). *Demonstrationem indirectam dedit* ARCHIMEDES (*c*) *non contemnendam, quoniam ipsius demonstrandi methodo principia methodi infinitesimalis rigidantur.*

COROLLARIUM I.

412. Sunt igitur circuli in ratione composita peripheriarum & radiorum (§. 388). Sed iidem sunt in ratione duplicata radiorum (§. 409). Quare peripheriæ sunt inter se ut radii (§. 159 *Arithm.*)

COROLLARIUM II.

413. Cum adeo sit, ut peripheria circuli unius ad suum radium, ita peripheria alterius cujuscunque ad suum (§. 173 *Arith.*); ratio peripheriæ ad radium seu diametrum (§. 39 *Geom.* & §. 181 *Arithm.*) in omnibus circulis eadem.

SCHOLION.

414. *Idem etiam hoc modo ostenditur. Cum omnes circuli inter se similes sint* (§. 134); *per quæ distingui possent, ea eadem sunt* (§. 24 Arithm.). *Quoniam itaque per rationem peripheriarum ad diametros distingui possent, siquidem ea in diversis circulis diversa foret* (§. 132 Arithm.); *ratio in omnibus eadem esse debet.* Q. e. d.

THEOREMA LXXXVI.

415. *Sector circuli* ACD *æqualis est triangulo, cujus basis arcus* AD, *altitudo radius* AC. Tab. VIII. Fig. 133.

DEMONSTRATIO.

Eadem est, quæ Theorematis præcedentis (§. 410).

Y THEO-

(*a*) *In Nova Stereometria doliorum vinariorum* Part. I. Theor. 2. f. B. 2.

(*b*) Vide præfat. ad *Geometriam indivisibilium continuorum nova ratione promotam.* p. b. 2.

(*c*) In libello *De circuli dimensione*, prop. I.

THEOREMA LXXXVII.

416. *Polygonum inscriptum minus; circumscriptum majus est Circulo Similiter illius perimeter minor; hujus autem perimeter major est peripheria Circuli.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. 107. Latera AB, BC, CD &c. polygoni inscripti sunt chordæ arcus cognomines subtendentes (§. 342). Sed chordæ sunt arcubus minores (§. 191). Ergo singula polygoni latera AB, BC, CD &c. sunt singulis arcubus eisdem respondentibus minora; consequenter perimeter polygoni circulo inscripti est hujus peripheria minor (§. 90 *Arithm*). Et quoniam chordæ totæ intra circulum cadunt, area polygoni parti circuli congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*), adeoque ipsi æqualis est (§. 161); consequenter Polygonum inscriptum Circulo minus (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat primum & secundum.*

Latera polygoni circumscripti *ab*, *bc*, *cd* &c. tangunt circulum (§. 355), adeoque totæ extra eum cadunt (§. 47): consequenter circulus parti polygoni congruit (§. 9 *Arithm.* & §. 3 *Geom.*). Hinc ipsi æqualis (§. 161), hoc est, Circulus Polygono circumscripto minor est (§. 20 *Arithm.*). *Quod erat tertium.*

Area polygoni circumscripti est ad aream circuli in ratione composita radii circuli & perimetrorum (§. 401, 410, 388); consequenter ut factum ex radio in perimetrum polygoni ad factum ex radio in peripheriam circuli (§. 159 *Arithm.*). Ergo illa ad hanc ut illius perimeter ad hujus peripheriam (§. 181 *Arithm.*). Sed polygonum majus circuper demonstr. Ergo & ejus perimeter major peripheria hujus (§. 149 *Arith.*). *Quod erat quartum.*

THEOREMA LXXXVIII.

417. *In Triangulo rectangulo* ABC, *quadratum hypothenusæ* AC *æquale est quadratis laterum* AHIB *&* BCED *simul sumtis.* Tab. VIII. Fig. 130.

DEMONSTRATIO.

Ducantur rectæ AE & BF (§. 121), itemque BK ipsi CF parallela (§. 258). Quoniam △ ACE cum quadrato CEDB super eadem basi & inter easdem parallelas (§. 336) existit; hujus dimidium est (§ 391). Ex eadem ratione △ BCF est dimidium parallelogrammi LCFK. Enimvero quia $x=o$ (§. 98, 145), adeoque $x+y=o+y$ (§. 88 *Arithm.*), BC = CE & AC = CF (§. 98); ideo △ ACE = △ BCF (§. 179); consequenter BCED = LCFK (§. 93 *Arithm*). Eodem modo ostenditur, esse AHIB = ALKG. Quamobrem BCED + AHIB = LCFK + ALKG (§. 88 *Arithm.*) = ACFG (§. 86 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

418. *Hoc Theorema* Pythagoras *invenit: unde* Pythagoricum *dicitur, Amplissimi per Mathesin universam est usus: ideo ab illius auditoribus Hecatombe, hoc est, centum boum sacrificio redemtum fertur.*

COROLLARIUM I.

419. Quadratum construitur duobus aut pluribus datis simul sumtis æquale, si 1°. latera duorum AC & AB jungantur ad angulos rectos (§. 249); 2°. super ducta hypothenusa BC erigatur latus tertii CD perpendiculariter (§. cit.), ducaturque hypothenusa BD &c. Est enim $BC^2 = AB^2 + AC^2$ & Tab. VIII. Fig. 131.

BD^2

$BD^2 = BC^2 + CD^2$ (§. 417). Ergo $BD^2 = AB^2 + AC^2 + CD^2$ &c.

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. *Fig.* 132. 420. Quodsi AB fuerit = 1, & AC = 1; erit $CB = \sqrt{2}$. Si porro fiat AD = CB = $\sqrt{2}$; erit $DB = \sqrt{3}$. Si fiat AE = 2; erit $BE = \sqrt{5}$. Si fiat AF = EB = $\sqrt{5}$; erit $FB = \sqrt{6}$, & ita porro in infinitum. Omnes adeo radices quadratæ surdæ sunt ad unitatem ut linea recta ad aliam rectam; consequenter numeri (§. 10 *Arithm.*) iique irrationales (§. 43, 295 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

421. Cum CB sit diagonalis quadrati (§. 111); erit ea ad latus AB ut $\sqrt{2}$ ad 1. Sed $\sqrt{2}$ est numerus irrationalis (§. 420), adeoque unitati incommensurabilis (§. 43 *Arithm.*); consequenter diagonalis quadrati est lateri incommensurabilis.

COROLLARIUM IV.

422. Dantur adeo quantitates incommensurabiles, hoc est, quarum nulla datur pars aliquota communis (§. 31 *Arithm.*); consequenter rationes irrationales (§. 164 *Arithm.*). Et hinc patet non repugnare, ut hæ numeris irrationalibus exprimantur (§. 419).

PROBLEMA LVII.

Tab. VIII. *Fig.* 133. 423. *Datis chorda* AB *& radio* AC, *invenire chordam arcus dimidii* AD.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam radius CD arcum AB bisecat in D, *per hypoth.* etiam chordam AB bisecat & ad eam perpendicularis est (§. 291); adeoque anguli ad E recti sunt (§. 78). Quare

1. A quadrato radii AC subtrahatur quadratum chordæ dimidiæ datæ AE: residuum est quadratum ipsius EC (§ 417).
2. Ex hoc residuo extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*), quæ erit EC. Tab. VIII. *Fig.* 133.
3. Hæc ex radio DC subducta relinquit DE.
4. Addantur quadrata AE & DE, summa est quadratum DA (§. 417).
5. Inde ergo si extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*); habetur chorda arcus dimidii AD.

Ex. gr. Sit radius AC = 10000, & AB latus Hexagoni: erit AB itidem 10000 (§. 356), & AE = 5000.

Quare

$AC^2 = 100000000$	$AE^2 = 25000000$
$AE^2 = 25000000$	$ED^2 = 1795600$
$CE^2 = 75000000$	$DA^2 = 26795600$
	$DA = 5176$
$CB = 8660$	
$DC = 10000$	
$DE = 1340$	

PROBLEMA LVIII.

424. *Dato latere Polygoni regularis inscripti* AB, *invenire latus circumscripti* FG. Tab. VIII. *Fig.* 134.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam FG parallela ipsi AB, & DC chordam AB bifariam dividit (§. 355); erit $AE = \frac{1}{2}$ AB & CE : EA = CD : DG (§. 268). Quare si, ob angulum rectum ad E (§. 291), EC investigetur ut in Problemate præcedente; reperietur DG (§. 302 *Arithm.*), cujus duplum est latus polygoni circumscripti FG. Est enim CE : CD = EA : DG, & CE : CD = EB : DF (§. 268). Cum adeo sit EA : DG = EB : DF (§. 167 *Arithm.*), & EA = EB, *per demon-*

Tab. VIII. Fig. 134. *demonstrata:* erit etiam DG=DF (§. 177 *Arithm.*); adeoque FG=2DG. *Q. e. i. & d.*

Ex. gr. Sit CD = AB = 10000; erit AE = 5000 & EC = 8660 (§. 423); adeoque DG = 5773. Hinc FG = 11546.

PROBLEMA LIX.

425. *Invenire rationem diametri ad peripheriam.*

RESOLUTIO.

1. Quærantur per continuam bisectionem latera polygonorum inscriptorum (§. 423), donec perveniatur ad latus arcum quantumlibet exiguum subtendens.
2. Invento hoc latere, quæratur porro latus polygoni similis circumscripti (§ 424).
3. Multiplicetur utrumque per numerum laterum polygoni, ut habeatur perimeter polygoni, tam inscripti, quam circumscripti (§. 106).

Erit ratio diametri ad peripheriam circuli major quam ejusdem ad perimetrum polygoni circumscripti; minor vero, quam ejusdem ad perimetrum inscripti (§. 416 *Geom.* & §. 205 *Arithm.*). Differentia vero inter utramque perimetrum cognita, haud difficulter definitur ratio diametri ad peripheriam circuli in numeris prope veris.

Sit ex. gr. radius circuli 1, seu (ut latera Polygonorum per fractiones decimales exprimere liceat) 1.000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000,000; reperietur, continua a Quadrato bisectione, latus Polygoni 1,073,741,824 laterum inscripti vero proxime minus 0. 00000000058516723 1720685587122; circumscripti autem latus vero itidem proxime majus 0. 000000 000585167231706863873784. Hinc perimeter circumscripta 6. 283185307179 58649156537 vero proxime major; inscripta autem 6. 28318530717958645093 vero proxime minor. Cum ergo circuli peripheria intra hos limites contineatur; posita diametro 2. 000000000000000, erit peripheria minor quam 6. 28318530 71795865, major vero quam 6. 28318530 71795863. Unde ratio prope vera diametri ad peripheriam ut 100000000000000000 ad 314159265358979 32. Compendia calculi tradit *Ludolphus* A CEULEN (*a*).

SCHOLION I.

426. *In quadrando Circulo ab omni ævo, quo Geometria exculta, desudarunt ingenia præstantissima: perfectam tamen quadraturam in numeris finitis nemo adhuc dedit, utut nostra præsertim ætate ars inveniendi egregie promota fuerit. Rationem tamen diametri ad peripheriam in numeris prope veris dederunt multi:* ARCHIMEDES (*b*) *ea fini excogitavit methodum quadrandi Circulum per Polygona regularia inscripta & circumscripta, & Polygonis 96 laterum usus invenit rationem diametri ad peripheriam esse ut 7 ad 22 fere. Nimirum si diameter 1, perimeter Polygoni inscripti reperitur* $3\frac{10}{71}$; *perimeter vero circumscripti* $3\frac{1}{7}$. *Ejus vestigiis insistentes posteri rationes propiores investigarunt. Nemo autem plus operæ impendit* Ludolpho A CEULEN (*c*), *qui tandem reperit, posita diametro 1, peripheriam esse minorem quam* 3. 14159265358979323846264338327950, *sed majorem quam idem numerus, cyphra ultima in unitatem mutata. Enimvero quoniam numeri adeo prolixi praxi parum respondent; in Geometria practica hodie a plerisque assumitur, diametrum esse ad peripheriam.*

(*a*) In libro *De circulo & adscriptis* Conf. *Fundamenta Arithmetica & Geometrica* lib. 6. probl. 1. p. m 24'. & seqq.

(*b*) In libello *De circuli dimensione* prop. 2.

(*c*) In *Zetematum Geometricorum Epilogismo.* Zetem. 1. p. 92.

pheriam ut 100 *ad* 314, *vel in circulis majoribus ut* 10000 *ad* 31415 : *in qua proportione*, PTOLEMÆUS, VIETA, HUGENIUS *cum* LUDOLPHO *consentiunt.* HUGENIUS (*a*) *compendiosiorem monstravit viam ; sed pluribus Theorematis nixam, quæ in hisce Elementis non demonstrantur.*

COROLLARIUM.

427. Si diameter fuerit 113; erit peripheria 113. 31415: 10000 (§.272 *Arith.*) hoc est 355 quam proxime.

SCHOLION II.

428. *Hæc proportio, quam* Adrianus METIUS *tradit* (*b*) *a parente suo inventam & demonstratam* (*c*), *inter omnes, quæ parvis numeris exprimuntur, accuratissima. Quod si enim numerum* 355 *septem cyphris ad obtinendas fractiones decimales auctum per* 113 *dividas ; quotus cum proportione* Ludolphina *collatus ostendet eam ne quidem* $\frac{1}{10000000}$ *a vera differre.*

PROBLEMA LX.

429. *Data diametro Circuli invenire peripheriam & aream ejus ; & data peripheria diametrum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum detur ratio diametri ad peripheriam (§. 426, 427); una data, invenietur altera (§. 302 *Arithm.*)
2. Peripheria ducta in quartam diametri partem, habetur area circuli (§. 410, 392).

Ex. gr. Sit diameter 56: erit

100 — 314 — 56	Periph. 17584‴
56	$\frac{1}{4}$ Diam. 1400
1884	7033600
1570	17584
Per. 17° 5′ 8″ 4‴	Area 24° 61′ 76″ 00‴

COROLLARIUM I.

430. Si diameter 100 ; peripheria 314 (§. 426), adeoque area circuli 7850 (§. 429). Est vero Quadratum diametri 10000 (§. 370) : ergo hoc ad aream Circuli ut 10000 ad 7850, hoc est, ut 1000 ad 785 (§. 181 *Arithm.*) quam proxime.

COROLLARIUM II.

431. Similiter si diameter 113, peripheria 355 (§. 427), adeoque area Circuli $10028\frac{1}{4}$ (§. 429). Est vero Quadratum diametri 12769 (§. 370). Ergo hoc ad illam ut 12769 ad $10028\frac{1}{4}$ hoc est, ut 51076 ad 40115 (§. 178 *Arithm.*) ; consequenter (dividendo per 113) ut 452 ad 355 (§. 181 *Arithm.*), quæ *Metiana* proportio priori accurarior.

COROLLARIUM III.

432. Area igitur Circuli etiam invenitur, si ad 1000, 785 & Quadratum diametri ; vel ad 452, 355 & Quadratum diametri numerus quartus proportionalis quæratur (§. 302 *Arithm.*).

Sit ex. gr. diameter 560″, erit quadratum ejus 31° 36′ 00″. Quare

1000 — 31° 36′ 00″ — 785
785
1568000
25088
21952
24° 61′ 76″ Area Circuli.

COROLLARIUM IV.

433. Si area circuli minoris GEHF subtrahatur ex area majoris concentrici ADBC; relinquitur annulus ADBCGEHF. Tab. VIII. Fig. 135.

PROBLEMA LXI.

434 *Data area Circuli, invenire diametrum.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 785, 1000 & aream circuli datam 246176 numerus quar-

(*a*) In *Inventis de circuli magnitudine* prop. 10, p. 15. & prop. 20. p. 40.

(*b*) In *Geometria practica*, part. 1. c. 10. §. 3. p. m. 89

(*c*) In libello adversus quadraturam circuli Simonis A QUERCU conscripto.

quartus proportionalis 313600 (§. 302 *Arithm.*): qui eſt quadratum diametri (§. 430).

2. Inde extrahatur radix quadrata 560 (§ 269 *Arithm.*), quæ eſt diameter (§. 236 *Arithm.* & §. 370 *Geom.*)

PROBLEMA LXII.

Tab. VIII. Fig. 133. 435. *Dato radio circuli* AC, *una cum ratione arcus* AB *ad peripheriam; invenire aream Sectoris* ACB.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad 100, 314 & radium AC numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): qui eſt ſemiperipheria (§. 436 *Geom* & §. 181 *Arithm.*).

2. Quæratur porro ad 180°, arcum datum AB, & ſemiperipheriam inventam numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*): ut habeatur arcus AB in eadem menſura, in qua radius AC datur.

3. Tandem arcus AB ducatur in ſemiradium.

Factum exprimet aream Sectoris (§. 415, 392).

Ex. gr. Sit radius 6'; arcus 60°.

100 — 314 — 600'''
6 00

Semiperiph. 1884|00
180 — 1884 — 60

60) 3 ——— 1
6 2 8''' = AB
3 00 = ½AC.
Area 18' 8 4''|00| = ACB

PROBLEMA LXIII.

Tab. VIII. Fig. 133. 436. *Datis altitudine Segmenti* DE & *dimidia baſi* EA; *invenire aream ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur diameter (§. 328). Tab. VIII. Fig. 133.

2. Deſcribatur circulus (§. 131), & in eo applicetur baſis ſegmenti AB.

3. Ducantur radii AC & BC, & ope Inſtrumenti tranſportatorii inveſtigetur numerus graduum arcus ADB.

4. Dato jam radio AC, una cum arcus ADB ad peripheriam ratione, inveſtigetur area ſectoris ACB, &

5. Ex chorda AB atque altitudinis ſegmenti DE complemento ad radium EC, area trianguli ACB (§. 392).

6. Hoc denique ex illo auferatur: reſiduum erit Segmentum ADBEA.

Ex. gr. Sit AB = 600''', DE = 80'''; erit DF = 1205''' (§. 328), arcus AB = 60° (§. 152). Ergo area ſectoris ADBC = 18'84'' (§. 435). Jam EC = 522½''', AE = 300'''. Quare △ ACB = 156750'''; conſequenter ſegmentum AEBDA = 31650'''.

COROLLARIUM.

437. Quod ſi Segmentum majus BFA quæratur; triangulum BCA ſectori BFACB addendum.

SCHOLION.

438. *Ne pro invenienda area Sectoris atque Segmenti, peripheriam inveſtigare opus ſit; arcuum gradus atque ſcrupula, tam prima quam ſecunda, iſtiuſmodi particulis expreſſa in Tabula ſubſequente exhibere placet, qualium diameter eſt* 100000. *Constructio Tabulæ intelligitur ex reſolutione Problematis* 61 (§. 435). *Uſus talis eſt. Sit ex. gr. ut in caſu Problematis citati, diameter* 1200''', *arcus* 60°. *Cum* 60 *gradibus in Tabula reſpondeant* 52359 *particulæ diametri; inferatur:*

100000

100000 — 52359 — 1200
1200
10471800
52359
628|30800

Est ergo arcus $628'''$, *ut supra* (§. cit.) *eundem reperimus.*

Grad.	Part. per.	Min.	Part. per.
1	872	1	14
2	1745	2	29
3	2617	3	43
4	3490	4	58
5	4363	5	72
6	5235	6	87
7	6108	7	101
8	6981	8	116
9	7853	9	130
10	8726	10	145
20	17453	20	290
30	26179	30	436
40	34906	40	581
50	43633	50	727
60	52359	Sec.	Part. per.
70	61086	2	0
80	69813	3	$\frac{1}{2}$
90	78539	4	$\frac{1}{2}$
100	87266	5	1
110	95993	6	1
120	104719	7	$1\frac{1}{2}$
130	113446	8	$1\frac{1}{2}$
140	122173	9	2
150	130899	10	2
160	139626	20	4
170	148353	30	7
180	157079	40	9
360	314159	50	12

PROBLEMA LXIV.

439. *Parallelogrammum* ABEC *ex dato puncto* D *in duas partes aequales dividere.* Tab. VIII. Fig. 136.

RESOLUTIO.

Fiat EF=AD. & ducatur recta DF: erit ADFC=DBEF.

DEMONSTRATIO.

Ducatur diagonalis AE: erit $o = x$ (§. 156) &, ob parallelas AB & EC (§. 102), $y = u$ (§. 233). Sed AD=FE, *per constr.* Ergo △ ADG = △ FGE (§. 252). Est vero △ ACE = △ AEB (§. 337). Quare ACFG = DBEG (§. 91 *Arithm.*); consequenter ADFC =DBEF (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA LXV.

440. *Parallelogrammum atque Triangulum in partes quotcunque aequales dividere.* Tab. VIII. Fig. 137. 138.

RESOLUTIO.

1. Dividatur basis CD in tot partes aequales, in quot figura dividenda (§. 274).
2. In Parallelogrammo ducantur rectae 11, 22; in Triangulo A1, A2.

DEMONSTRATIO.

Quoniam parallelogramma A11C, 1221, 2BD2 inter easdem parallelas AB & CD existunt (§. 102); eandem altitudinem habent (§. 226, 227). Sunt itaque in basium ratione (§. 389); consequenter, ob C1=12 =2D, *per constr.* aequales. *Quod erat unum.*

Cum ex uno puncto A ad eandem rectam CD perpendicularis nonnisi unica duci possit (§. 213); triangula AC1, 1A2, 2AD eandem altitudinem (§.

(§. 228), adeoque basium rationem habent (§. 389). Sed bases æquales sunt, *per constr.* Ergo & Triangula. *Quod erat alterum.*

PROBLEMA LXVI.

Tab. VIII. Fig. 139. 441. *Figuram rectilineam quamcunque* ABCDE *in partes æquales dividere.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area figuræ (§. 400), & dividatur in tot partes æquales, in quot figura dividi debet, ex. gr. in 3.
2. Area partis, in nostro casu tertiæ, ulterius dividatur bifariam.
3. Area trianguli AED subtrahatur a parte tertia, & residuum dividatur per $\frac{1}{2}$AD; erit quotus altitudo trianguli AID priori AED addendum, ut AEDI sit pars tertia figuræ (§. 394).
4. Quare intervallo hujus altitudinis ducatur parallela ipsi AD (§. 258), quæ secabit latus AB in I: quo puncto dato, rectam DI ducere licet, tertiam partem figuræ AIDE abscindentem.
5. Pars tertia dimidia, sive sexta totius figuræ, dividatur per $\frac{1}{2}$DI, quotus erit altitudo trianguli IKD sextam figuræ partem constituentis (§. 394).
6. Intervallo igitur hujus altitudinis agatur ipsi ID parallela, ut habeatur punctum K (§. 258).
7. Dividatur quoque dimidia pars tertia figuræ per $\frac{1}{2}$KD, ut habeatur altitudo trianguli KLD sextæ itidem parti figuræ æqualis (§. 394).
8. Quare hujus intervallo denuo agatur ipsi KD parallela (§. 258), ut punctum L determinetur ducaturque recta KL, quæ partem figuræ tertiam KIDL resecabit.
9. Si figura in plures quam tres partes resolvenda; eodem modo ulterius procedendum.

Ex. gr. Sit AD = 516″, AC = 580″, EH = 154″, DG = 315″, BF = 375″; erit AED = 39732″ ADC = 91350″ & ABC = 108750″ (§. 392); adeoque area figuræ 239832 (§. 400); ejus pars tertia 79944; pars sexta 39972.

Pars III = 79944
AED = 39732
AID = 40212 (155 +, seu 156 fere = IM
$\frac{1}{2}$ AD = 258) 258
1441
1290
1512
1290
222

Pars VI = 35972 (151″ = KN.
$\frac{1}{2}$ DI = 264) 264
1357
1320
372
264
108

Pars VI = 39972 (139″ = LO
$\frac{1}{2}$ DK = 287) 287
1127
861
2662
2583
79

SCHOLION.

442. *Si* AED *majus tertia ex. gr. parte figuræ; ipsam ab illo subtrahi necesse est & residuum erit triangulum a triangulo* AED *auferendum, ut tertiæ parti figuræ æqualis evadat. Sæpe etiam consultum est, ut prima pars* AEDI *per duo triangula uti ceteræ determinetur.*

SCHOLION II.

443. *Ubi in charta divisio absoluta; in campo puncta* I, K, L *per quantitatem rectarum* AI, IK *&* DL *facile determinantur* (§. 126).

Finis Partis Prioris.

ELE-

ELEMENTA GEOMETRIÆ.

PARS POSTERIOR

ELEMENTA GEOMETRIÆ SOLIDÆ PROPONIT.

CAPUT PRIMUM.

De Principiis Geometriæ solidæ.

DEFINITIO I.

444. *Solidum*, five *Corpus*, eſt magnitudo tribus dimenſionibus prædita, ſeu extenſum in longitudinem, latitudinem, atque profunditatem.

DEFINITIO II.

Tab. VIII. Fig. 141. 445. *Angulus ſolidus* B eſt plurium quam duarum linearum BA, BC, BF in eodem puncto B concurrentium, nec in eodem plano conſtitutarum ad omnes inclinatio. Dicuntur autem *Anguli ſolidi æquales*, qui inter ſe invicem poſiti congruunt.

COROLLARIUM I.

446. Ergo angulus ſolidus B pluribus quam duobus planis in eodem plano non conſtitutis ABF, FBC, CBA continetur.

COROLLARIUM II.

447. Quoniam adeo tres minimum lineæ ad angulum ſolidum conſtituendum requiruntur (§. 445); tres minimum anguli plani ad ſolidum conſtituendum neceſſarii.

SCHOLION I.

448. *Unde etiam* Angulus ſolidus *definitur, quod ſit is, qui pluribus quam duobus planis angulis in eodem plano non conſiſtentibus, ad idem tamen punctum conſtitutis, continetur.*

COROLLARIUM III.

449. Ut anguli ſolidi ſint æquales, angulis planis & multitudine & magnitudine æqualibus ac eodem ordine diſpoſitis contineri debent, ut ſcilicet plana angulos planos æquales continentia æqualiter ad ſe invicem inclinentur.

SCHOLION II.

450. *Bene nimirum* TAQUETUS *obſervat, de angulis ſolidis, qui ex planorum inclinatione oriuntur, eodem modo ratiocinandum eſſe, quo de planis, qui oriuntur ex linearum ad ſe invicem inclinatione.*

COROLLARIUM IV.

451. Cum anguli ſolidi diſtingui nequeant niſi per planos, quibus continentur (§. 445), ubi plani & numero, & magnitudine æquales,& planorum eos continentium eadem fuerit inclinatio, ea coincidunt per quæ a ſe invicem diſtingui debent. Sunt ergo ſimiles (§. 24 *Arithm.*); conſequenter anguli ſolidi ſimiles ſunt æquales & contra (§. 449).

COROLLARIUM V.

452. Si anguli plani in eodem puncto concurrentes conficiant summam 360 graduum; planum circuli sternunt (§.41, 57), adeoque solidum angulum non constituunt (§.446). Quare summa eorum, qui ultra solidum non assurgunt, quatuor rectis seu 360° (§. 144) minor esse debet.

DEFINITIO III.

453. *Corpus regulare* est solidum planis regularibus & inter se æqualibus terminatum, totidem numero ad angulos constituendos concurrentibus. Reliqua corpora dicuntur *irregularia*.

SCHOLION.

454. *Corpora regularia dicuntur etiam* Platonica, *propterea quod* Plato *in* Timæo *corpora, quæ statuit, simplicia, cœlum puta, ignem, aerem, aquam, atque terramc um iisdem comparat.*

COROLLARIUM.

455. Cum quilibet angulus corporis regularis angulis planis & numero, & magnitudine æqualibus contineatur (§. 453), omnes anguli corporis cujuslibet regularis æquales sunt (§. 449).

DEFINITIO IV.

Tab. VIII. Fig. 140. 456. Si figura rectilinea ACB juxta ductum lineæ rectæ AE motu sibi semper parallelo deorsum feratur, *Prisma* ABCDFEA describit: & quidem *rectum*, si linea directrix AE fuerit ad planum describens perpendicularis, seu in nullam partem inclinatur; *obliquum* vero, si ea ad idem fuerit obliqua. In specie *Prisma* dicitur *triangulare* sive *trigonum*, si planum describens fuerit triangulum; *quadrangulare*, si fuerit figura quadrilatera, & ita porro.

COROLLARIUM I.

457. Quodlibet adeo prisma habet duas bases oppositas ABC & EDF æquales, & circumcirca terminatur tot parallelogrammis, quot basis latera habet. Est enim AC ipsi ED parallela atque æqualis *per hypoth.* Ergo & AE parallela ipsi CD (§. 257); consequenter ACDE est parallelogrammum (§. 102). Et idem eodem modo de ceteris planis lateralibus ostenditur. Tab. VIII. Fig. 140.

COROLLARIUM II.

458. Plana sectionum prismatis basi ACB parallele factarum sunt inter se æqualia. Æquantur enim plano describenti ACB (§. 456 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); ergo & inter se æqualia sunt (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO V.

459. Si planum describens ABCD fuerit quadratum, & linea dirigens AE lateri ejus AB æqualis, atque angulus BAE & DAE rectus; *Cubus* describitur. Tab. VIII. Fig. 141.

COROLLARIUM I.

460. Cubus terminatur sex quadratis inter se æqualibus: est enim ABCD = EFGH (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*). Cumque ex eadem ratione AB & EF sint inter se æquales atque parallelæ, & BA ad AE perpendicularis; erit etiam AE ad EF perpendicularis (§. 230); consequenter ABFE quadratum (§. 338) ipsi ABCD æquale (§. 374). Eodem modo ostenditur, reliqua plana terminantia esse quadrata ipsi ABCD æqualia.

COROLLARIUM II.

461. Plana sectionum basi parallele factarum sunt quadrata ipsi æqualia (§. 459 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); consequenter etiam æqualia inter se (§. 87 *Arithm.*).

DEFINITIO VI.

462. Si planum describens IKLM fuerit parallelogrammum; *Parallelepipedum* describitur. Tab. VIII. Fig. 142.

COROLLARIUM I.

463. Plana sectionum basi parallele factarum sunt parallelogramma ipsi æqualia

(§. 462

(§. 462 *Geom.* & *§.* 81 *Arithm.*); adeoque & æqualia inter se (*§.* 87 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

Tab. VIII. Fig. 142. 464. Cum LM & NO sint æquales & inter se parallelæ (§. 462 *Geom.* & §. 81 *Arithm.*); etiam MO & LN æquales sunt & parallelæ (§. 257); consequenter LMNO parallelogrammum (*§.* 102). Eodem modo ostenditur, plana terminantia reliqua esse parallelogramma. Terminatur adeo parallelepipedum sex parallelogrammis, quorum bina opposita inter se æqualia sunt.

DEFINITIO VII.

Tab. VIII. Fig. 143. 465. Si circulus AB juxta ductum rectæ AD, motu sibi semper parallelo, deorsum feratur, *Cylindrus* describitur; *rectus* quidem, si recta CF quam punctum C in descensu describit, centra basium C & F jungens, quæ *Axis* dicitur, fuerit ad diametrum DE perpendicularis; *scalenus* vero, si ad angulos obliquos eidem insistat. Quodsi parallelogrammum rectangulum CBEF circa latus unum CF gyretur, *Cylindrum* describit *rectum*.

COROLLARIUM.

466. Sunt ergo non modo bases cylindri AB & DE æquales; verum etiam sectiones basibus parallelæ sunt circuli iisdem & inter se æquales.

DEFINITIO VIII.

Tab. IX. Fig. 144. 467. Si recta quædam KM in peripheria circuli NM ita incedat, ut constanter inhæreat puncto fixo K; describetur *Conus* NKM. Recta ex puncto K, qui *vertex* coni dicitur, ad centrum basis L ducta dicitur *Axis Coni*: qui si ad circulum basim coni NM fuerit perpendicularis, *Conus rectus* est; si vero ad angulos obliquos eidem insistat, *scalenus*. Linea describens KM, seu recta ex vertice in peripheriam basis ducta, vocatur *Latus Coni*. Possumus quoque *Coni* genesin ita concipere, ut circellus infinite parvus, dum motu sibi semper parallelo ita deorsum fertur, ut centrum continuo sit in axe KL, radius PQ axi KP proportionaliter continuo augeatur. Quodsi triangulum rectangulum KLM circa rectam KL gyretur: *Conus* describitur *rectus*. Tab. IX. Fig. 144.

COROLLARIUM.

468. Quodsi PQ ipsi LM parallela, per ultimam coni genesin erit KL : KP = LM : PQ. Quare cum PQ & LM sint radii circulorum sibi invicem parallelorum; planum sectionis basi coni parallele factæ circulus est eadem minor.

SCHOLION.

469. Ex genesi ultima coni apparet, in definitionibus geometricis geneticis tanquam entium imaginariorum admitti etiam posse miraculosa. Et quoniam in cono obliquo latus coni non ejusdem longitudinis in quovis peripheria puncto; patet lineam describentem KM, *quæ altero sui extremo peripheriæ* NM *constanter adhæret, per punctum fixum* K *aliqua sui parte nunc deorsum, nunc sursum moveri debere.*

DEFINITIO IX.

470. Si semicirculus K juxta diametrum AB gyretur; *Sphæra* describitur: diciturque diameter circuli AB etiam *Diameter* atque *Axis Sphæræ*, centrum C etiam *Centrum Sphæræ*. Tab. IX. Fig. 145.

COROLLARIUM.

471. Omnes ergo rectæ ex sphæræ superficie in centrum ductæ sunt inter se æquales (*§.* 40).

DEFINITIO X.

472. *Pyramis* est solidum terminatum circumcirca tot triangulis ADC, CDB & BDA in uno puncto D Tab. IX. Fig. 146.

 coëun-

Tab. IX. *Fig.* 146. coëuntibus, quot basis ABC latera habet. Dicitur autem *triangularis*, *quadrangularis*, *quinquangularis* &c. si basis triangularis, quadrangularis, quinquangularis &c.

COROLLARIUM I.

473. Si *ac*, *cb*, *ba*, lateribus AC, CB, BA basis ACB parallelæ ducantur; erit DC: Dc = CA : *ca* = CB : *cb* (§. 268); adeoque CA : *ca* = CB : *cb* (§. 167 *Arithm.*); consequenter cum eodem modo ostendi possit esse CA : *ca* = AB : *ab*, erit triangulum *acb* simile triangulo ACB (§. 207). Quare si pyramis triangularis ACDB secatur plano basi parallelo; planum istud huic simile erit.

COROLLARIUM II.

474. Quoniam pyramis multangularis in tot triangulares resolvi potest, quot sunt latera basis demtis duobus, nempe quadrangularis in duas, quinquangularis in tres, &c. si pyramis multangularis plano basi parallelo secetur, constabit id ex triangulis, quæ singula singulis similia sunt, in quæ resolvitur basis (§. 473); consequenter cum vi demonstrationis primæ Problematis 47 (§. 363) pateat, similes esse figuras rectilineas quascunque, quæ ex triangulis similibus eodem ordine inter se junctis componuntur, in quavis pyramide planum sectionis basi parallelum est figura basi similis.

DEFINITIO XI.

475. *Tetraëdrum* est solidum quatuor; *Octaëdrum* est solidum octo; *Icosaëdrum* est solidum viginti triangulis æquilateris & æqualibus comprehensum; *Dodecaëdrum* vero solidum duodecim pentagonis regularibus & æqualibus contentum. Tab. IX. *Fig.* 147. 148. 149. 150.

DEFINITIO XII.

476. *Inclinatio plani* KEGL *ad planum* ACDB est angulus HFI, quem efficiunt rectæ HF & FI in puncto F ad lineam sectionis EG perpendiculares. Tab. XI. *Fig.* 151.

DEFINITIO XIII.

477. *Mensura solidi* est cubus, cujus latus perticæ unius, diciturque *Pertica cubica*. Hæc dividitur in *Pedes*, *Digitos*, &c. *cubicos*, hoc est, in cubos, quorum latus pedem, digitum &c. adæquat.

CAPUT II.

De Sectione & Situ Planorum.

THEOREMA I.

Tab. XI. *Fig.* 175. 478. *Recta linea pars quædam* AB *non est in subjecto plano* DE, *pars vero* BC *in sublimi.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim, si fieri possit, pars lineæ rectæ AB in plano DE, pars vero altera BC in sublimi. Cum linea recta terminata utrinque produci possit (§. 21); producatur AB in F: erit ergo AB pars rectæ AF. Sed eadem AB est pars rectæ ABC, *per hypoth.* Punctum igitur rectam describens in B mutat directionem, cum & versus F, & versus C progredi valeat, ubi ad B pervenit: quod cum sit absurdum Tab. XI. *Fig.* 175.

Tab. XI. Fig. 175. ſurdum (§. 19), rectæ lineæ quædam pars AB non poteſt eſſe in ſubjecto plano DE, pars vero quædam BC in ſublimi. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

Tab. XI. Fig. 176. 479. Duæ igitur rectæ ADEB & CDEF ſegmentum commune DE habere nequeunt (§. 478); conſequenter duæ rectæ AB & CF ſe mutuo non interſecant niſi in uno puncto D.

COROLLARIUM II.

Tab. XI. Fig. 177. 480. Cumque pars rectæ AD eſſet in ſubjecto plano, pars vero BD in ſublimi, ſi trianguli ABC pars ADE eſſet in ſubjecto plano, pars vero DBCE in ſublimi; triangulum ABC erit in eodem plano.

COROLLARIUM III.

Tab. XI. Fig. 178. 481. Et quoniam rectarum BE & DC ſe mutuo ſecantium in A partes AB & AC ſunt crura trianguli ABC; erunt eædem in eodem plano (§. 480). Sed in eodem plano eſt EA, in quo eſt AB, & AD in eodem eſt, in quo eſt AC (§. 478). Ergo lineæ ſe mutuo ſecantes EB & DC in eodem ſunt plano.

THEOREMA II.

482. *Si duo plana* ABCD *&* EFHG *ſe mutuo ſecent; erit communis ſectio recta* IK. Tab. XI. Fig. 179.

DEMONSTRATIO.

Quoniam rectæ AB & EF ſe mutuo non interſecant niſi in puncto I, nec rectæ DC & GH niſi in puncto K (§. 479); ſi communis planorum ſectio non eſt recta unica, ſed aliquod planum, termini illius plani in punctis I & K coire debent. Ducantur ergo in plano EFHG recta ILK & in plano ABCD recta IMK, quod fieri poſſe patet, ſi ſectio communis planorum ABCD & EFHG non eſt recta unica IK, utut planum ſectionis lineis curvis in punctis I & K coëuntibus terminari ſumas (§. 191). Duæ igitur rectæ ILK & IMK, cum earum extrema in I & K coincidant, totæ in punctis omnibus coincidere debent (§. 170); conſequenter communis ſectio eſſe nequit niſi recta jungens puncta I & K. *Q. e. d.* Tab. XI. Fig. 179.

THEOREMA III.

483. *Si duæ rectæ* AB *&* CD *fuerint in eodem plano; recta* EF *eas ſecans in* G *&* H *erit in eodem plano.* Tab. XI. Fig. 180.

DEMONSTRATIO.

Secet planum aliud planum datum, in quo poſitæ ſunt rectæ AB & CD, in punctis G & H; recta tranſiens per G & H eſt communis ſectio planorum (§. 482). Sed eadem eſt pars lineæ EF (§. 170), quæ duas AB & CD ſecat, *per hypoth.* Recta igitur EF eſt in eodem plano, in quo ponuntur duæ AB & CD. *Q. e. d.*

THEOREMA IV.

484. *Si recta* IE *fuerit perpendicularis ad duas rectas* KL *&* MN *in plano* ABCD *ductas* S, *& ſe mutuo in puncto* E *ſecantes; erit ea perpendicularis ad rectam quamvis aliam* OP, *quæ per punctum* E *ducitur in eodem plano.* Tab. XI. Fig. 181.

DEMONSTRATIO.

Fiat ME=EN & EL=EK. Quoniam MEL = KEN (§. 156), erit ML = KN, & angulus EMO = ENP (§. 179). Quare cum etiam ſit MEO = PEN (§. 156), erit MO=PN & EO = EP (§. 251). Quia IE perpendicularis ad MN, *per hypoth.* erit angulus IEM = IEN (§. 79); conſequenter, cum ſit ME = EN, *per conſtr.* & IE = IE, etiam IM=IN. Eodem modo oſten-

Tab. XI. Fig. 181. ostenditur esse IL=IK. Quoniam itaque ML=KN, *per demonstr.*; angulus INP=IMO, adeoque, ob IN=IM & PN=OM, *per demonstr.*, IP=IO (§. 179). Est vero etiam EP=EO, *per demonstr.*, & IE=IE. Quamobrem angulus IEP=IEO (§. 204); consequenter IE ad OP perpendicularis (§. 79). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

485. Recta igitur IE, ad duas rectas KL & MN in plano ABCD perpendicularis, omnibus rectis per punctum E in eodem plano ductis ad angulos rectos insistit (§. 78).

SCHOLION.

486. *Hinc* linea recta *IE* ad planum *ABCD* perpendicularis *definitur*, *quod ad rectas omnes lineas in plano ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit.*

THEOREMA V.

Tab. XI. Fig. 182. 487. *Si recta* IE *fuerit ad planum* ABCD *perpendicularis*, *& ex* E, *tanquam centro*, *in eodem plano descriptus sit circulus; erunt rectæ* IG, IF, *&c. ab eodem puncto sublimi ad peripheriam ductæ inter se æquales.*

DEMONSTRATIO.

Ducantur ex centro E ad puncta peripheriæ F, G, &c. radii EF, EG, &c. erit EF=EG (§. 40); cumque anguli FEI & GEI sint recti (§. 485), etiam FEI=GEI (§. 145). Quare cum porro sit EI=EI; erit FI=GI (§. 179). *Q. e. d.*

THEOREMA VI.

Tab. XI. Fig. 181. 488. *Ex eodem puncto* E *ad planum* ABCD *nonnisi unica perpendicularis* EI *duci potest.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur, si fieri potest, adhuc alia EQ, & per punctum E transiens in plano recta OP sit cum rectis EI & EQ in eodem plano: erit cum EQ, tum EI ad eandem rectam OP perpendicularis (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 213), ex eodem puncto E nonnisi unica perpendicularis ad planum EI erigi potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VII.

489. *Ab eodem puncto* I *in sublimi dato ad idem planum* ABCD *perpendicularis nonnisi unica* IE *demitti potest.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Demittatur enim, si fieri potest, adhuc alia IG. Jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit IEG triangulum in eodem plano (§. 480). Duo igitur in triangulo ad basin anguli E & G recti sunt (§. 486): quod cum sit absurdum (§. 218), a puncto I ad planum ABCD nonnisi unica perpendicularis demitti potest. *Q. e. d.*

THEOREMA VIII.

490. *Linea perpendicularis* IE *est brevissima*, *quæ a puncto extra planum dato ad idem duci potest.* Tab. XI. Fig. 182.

DEMONSTRATIO.

Ducatur enim recta adhuc alia IG & jungantur puncta E & G in plano recta EG; erit triangulum IEG in eodem plano (§. 480), & angulus ad E rectus (§. 486). Est igitur IE < IG (§. 220). *Q. e. d.*

THEOREMA IX.

491. *Si recta* LE *tribus rectis* FE, HE, IE, *vel etiam pluribus in eodem puncto* E *concurrentibus perpendiculariter insistat; erunt tres illæ rectæ* FE, HE *&* IE *vel etiam plures in eodem plano* ABCD. Tab. XI. Fig. 183.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 183. Sit enim, si fieri potest, recta EF in plano LEGK, quod secat planum ABCD, in quo sunt duæ reliquæ EH & EI, in recta EG (§. 482). Quoniam LE perpendiculariter insistit duabus rectis EH & EI in plano ABCD, *per hypoth.* eadem quoque ad angulos rectos insistit rectæ EG (§. 485). Sed cum LE etiam perpendicularis sit ad EF, *per hypoth.* erit etiam angulus LEF rectus (§. 78); consequenter angulus LEF ipsi LEG æqualis (§. 145), pars nempe toti (§. 9 *Arithm.*): quod cum sit absurdum (§. 84 *Arithm.*) rectæ FE, HE, & IE, quibus LE perpendiculariter insistit, in eodem sunt plano ABCD. *Quod erat unum.*

Quod si lineæ in puncto E concurrentes fuerint quatuor, quibus LE perpendiculariter insistit, cum sit tertia cum prima & secunda in eodem plano, *per demonstrata*, erit etiam quarta cum secunda & tertia in eodem plano, & ita porro. *Quod erat alterum.*

THEOREMA X.

Tab. XI. Fig. 184. 492. *Lineæ rectæ* GE *&* HF *eidem plano* ABCD *perpendiculares sunt inter se parallelæ; & si una parallelarum* GE *&* HF *fuerit ad planum perpendicularis, etiam ad idem perpendicularis erit altera.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta HF & EL=EF. Cum GE perpendicularis sit ad planum ABDC, *per hypoth.* insistet ea rectis EF & EL in plano isto ductis ad angulos rectos (§. 486). Moveatur GE juxta ductum rectæ EL, donec in L perveniat, ita ut ad planum semper sit recta, describet ea planum GELI, eritque LI, tum ad planum, tum ad EL perpendicularis; consequenter ipsi GE parallela (§. 256). Moveatur planum GELI circa rectam quiescentem GE, donec EL ipsi EF congruat (§. 168); cadet planum GELI in planum, in quo sunt rectæ EG & EF: quoniam itaque tam HF, *per hypoth.*, quam LI ad planum ABCD in puncto F perpendicularis, *per demonstr.*; ad idem vero punctum F nonnisi unica recta plano perpendicularis esse potest (§. 488); etiam recta LI cadet in FH; consequenter FH erit parallela ipsi GE. *Quod erat unum.*

Sint jam GE & HF inter se parallelæ & GE ad planum perpendicularis. Quod si reliqua ponantur ut ante; dum planum GELI incidit in planum GEFH, rectæ EG parallela LI cadet in rectam eidem parallelam FH (§. 260); consequenter cum LI sit ad planum perpendicularis, etiam FH ad idem perpendicularis erit. *Quod erat alterum.*

COROLLARIUM.

493. Rectæ igitur omnes ad rectam EF in plano GEFH perpendiculares etiam ad planum ABDC perpendiculares sunt.

SCHOLION.

494. *Hinc* EUCLIDES Planum *definit* ad planum rectum *sive* perpendiculare, *cum omnes rectæ lineæ, quæ communi planorum ABDC & GEFH sectioni EF perpendiculares ducuntur in planorum uno GEFH, rectæ sunt alteri plano ABDC.*

THEOREMA XI.

495. *Rectæ* AB *&* EF, *quæ sunt eidem rectæ* CD *parallelæ, non tamen in eodem cum ipsa plano, sunt inter se parallelæ.* Tab. XI. Fig. 185.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 185. Ducatur in plano parallelarum AB & CD recta GH ad CD perpendicularis, & ex H perpendicularis HI ad CD in plano parallelarum CD & EF. Jungantur puncta G & I recta GI; erit triangulum GHI in eodem plano (§. 480). Quoniam CH ad planum GHI perpendicularis (§. 484); erunt etiam AG & EI ipsi CH parallelæ, *per hypoth.* ad idem planum perpendiculares (§. 492); consequenter inter se parallelæ (§. *cit.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XII.

Tab. X. Fig. 167. 496. *Si duæ rectæ* AC *&* CB *fuerint parallelæ duabus rectis* DF *&* FE, *etiamsi non sint in eodem plano, anguli, quos comprehendunt, æquales sunt.*

DEMONSTRATIO.

Fiat CB=FE & CA=FD: quoniam CB parallela ipsi FE & CA parallela ipsi FD, *per hypothesin;* erit BE ipsi CF & AD eidem CF parallela & æqualis (§. 257); consequenter BE parallela (§. 495) & æqualis (§. 87 *Arithm.*) ipsi AD; ac ideo AB parallela & æqualis ipsi DE (§. 257). Est igitur angulus DFE = ACB (§. 204). *Q. e. d.*

THEOREMA XIII.

Tab. XI. Fig. 186. 497. *Si recta* IK *duobus planis* ABCD *&* EFGH *fuerit perpendicularis, erunt plana inter se parallela.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur recta IL in plano ABCD, & ponatur ML ad istud perpendicularis, quæ plano EFGH in M occurrit, cumque IK ad planum EG recta sit, *per hypoth.* ad IK parallela est (§. 492). Tab. XI. Fig. 186.
Quamobrem si puncta M & K jungantur recta MK, erit angulus K perinde ac I rectus (§. 486), consequenter LM = K (§ 238). Cum eodem modo demonstretur rectam ex quovis alio puncto plani ABCD ductam ipsi IK parallelam eidem æqualem esse; plana ABCD & EFGH ubivis a se invicem eodem intervallo distare (§. 490, 15) patet. Sunt igitur inter se parallela.

SCHOLION.

498. *Nimirum* Planum *ABCD* alteri *EFGH dicitur* parallelum, *perinde ac recta alteri rectæ parallela est* (§. 81), *si ubivis eandem ab eadem distantiam servat.*

THEOREMA XIV.

499. *Si planum* ADCB *secet duo plana parallela* EFGH *&* IKLM; *erunt sectiones* AD *&* BC *inter se parallelæ.* Tab. XI. Fig. 187.

DEMONSTRATIO.

Ponamus enim sectiones AD & BC non esse inter se parallelas; ergo continuatæ alicubi concurrent (§. 81, 83). Cum igitur, si plana cum ipsis continuentur, totæ in iisdem sint (§. 478); ipsa quoque plana EFGH & IKLM concurrent. Parallela igitur non sunt (§. 498): quod cum sit absurdum, sectiones AD & BC planorum parallelorum EFGH & IKLM parallelæ sunt. *Q. e. d.*

THEOREMA XV.

500. *Si duæ rectæ lineæ se mutuo tangentes* AC *&* AB *duabus aliis se mutuo tangentibus* EG *&* EF *fuerint parallelæ, etiam plana* ACDB *&* EGLF *per ipsas ducta erunt parallela.* Tab. XI. Fig. 188.

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. XI. Fig. 188. Concipiatur AH ad planum EGLF recta, & ex H ducantur HK ac HI rectis EF atque EG parallelæ (§. 258); erunt eædem HK & HI etiam parallelæ rectis AB & AC (§. 495) & AH ad HK & HI perpendicularis (§. 486). Perpendicularis igitur AH etiam perpendicularis est ad AB & AC (§. 230) adeoque ad planum ABCD (§. 484, 486); consequenter planum ABCD parallelum plano EFLG (§. 497). *Q. e. d.*

Tab. XI. Fig. 189. THEOREMA XVI.

501. *Duæ lineæ rectæ* NR *&* OS *a planis parallelis* ABDC, EFHG, IKLM *proportionaliter secantur, ut nempe sit* PR : PN = TS : TO.

DEMONSTRATIO.

Jungantur puncta sectionum N & O, R & S, rectis NO & RS, ducaturque recta OR; erit triangulum NOR & similiter triangulum OSR in eodem plano (§. 480), & PQ parallela ipsi NO, QT vero parallela ipsi RS (§. 499.). Est igitur RQ : QO = RP : PN, & QR : QO = TS : TO (§. 268); consequenter RP : PN = TS : TO (§. 167 *Arithm.*). *Q. e. d.*

Tab. XI. Fig. 182. PROBLEMA I.

502. *Ad datum planum* ABDC *in dato puncto* E *erigere perpendicularem* EI.

RESOLUTIO.

Ducatur ex puncto E in dato plano ABDC intervallo quocunque EG circulus, & ex centro E erigatur recta EI ea lege, ut punctum I quodcunque a peripheriæ punctis quibuscunque F & G æqualiter distet, quod mechanice præstatur ope filorum æqualium ex dictis punctis extensorum: erit ea ad planum ABCD in dato puncto E perpendicularis (§. 487). Tab. XI. Fig. 182.

COROLLARIUM I.

503. Cum triangulum IEG & quodcunque eodem modo determinatum, veluti EIF, sit rectangulum; evidens est, si crus unum normæ ita ad EG vel EF applicetur, ut vertex anguli recti, quem crura comprehendunt, sit in centro E, fore crus alterum ad planum ABCD in dato puncto E perpendiculare: ut adeo pateat normæ usus in erigendis perpendicularibus ad planum datum in puncto dato.

SCHOLION.

504. *Necesse est ut normæ crura non desinant in aciem tenuem, sed aliquam habeant latitudinem, ut norma ad rectam EG applicata sit ad planum recta, nec oculorum judicium fallat.*

COROLLARIUM II.

505. Quodsi punctum I extra planum detur, norma super plano erecta huc illucve promovenda, donec crus erectum idem attingat, si e puncto I perpendicularis IE demittenda. Quodsi crus normæ brevius sit, quam ut punctum I attingere possit, cum filo ex puncto I extenso idem coincidere debet. Tab. XI. Fig. 190.

THEOREMA XVII.

506. *Si recta* IK *sit ad planum* ABCD *perpendicularis; planum quodcunque, veluti* EHGF, *quod per eam ducitur, ad idem planum* ABCD *perpendiculare est.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur LM ad sectionem communem planorum HG perpendicularis. Cum etiam sit IK ad HG perpendicularis, (*per hypoth.* & §. 468) erit LM ipsi IK parallela (§. 256). Enimvero IK perpendicularis est ad planum ABCD, *per hypoth.* Ergo etiam LM (§. 492).

Est igitur planum EHGF ad planum ABCD rectum (§. 494). *Q. e. d.*

SCHOLION.

507. *Nemo non videt demonstrationem subsistere eandem, etiamsi in locum plani EFHG planum quodcunque aliud surrogetur, quod per IK ducitur.*

Tab. XI. Fig. 191.

THEOREMA XVIII.

508. *Sectio* NO *duorum planorum* EFGH *&* IKLM *ad idem tertium* ADCB *perpendicularium est ad idem planum perpendicularis.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam planum EFGH ad planum ADCB perpendiculare, *per hypoth.* ex puncto O duci poterit in plano EFGH recta ad planum ADCB perpendicularis (§. 502). Eodem modo patet, ex eodem puncto O duci posse rectam intra planum IKLM ad planum ADCB perpendicularem. Quare cum ad idem punctum O eidem plano ADCB nonnisi unica perpendicularis insistere possit (§. 488), communis autem planorum IKLM & EFGH sectio NO nonnisi unica recta sit (§. 482); sectio illa communis NO erit illa perpendicularis, quæ in utroque plano EFGH & IKLM ad planum ADCB duci potest. *Q. e. d.*

THEOREMA XIX.

Tab. IX. Fig. 151.

509. *Plani* KLGE *ad planum* ABDC *in omnibus punctis* F, f *&c. inclinatio eadem.*

DEMONSTRATIO.

Erigantur ex punctis F & *f* perpendiculares FH & *fh* in plano ABDC & aliæ FI & *fi* in plano EKLG (§. 212); fiatque HF=*hf* & FI=*fi*, erunt HF & *hf*, itemque FI & *fi* parallelæ (§. 256); consequenter etiam H*h* & I*i* parallelæ ipsi F*f* & H*h*=F*f*, itemque I*i*=F*f* (§. 257), adeoque etiam H*h* parallela ipsi I*i* (§. 495) & H*h*=I*i* (§. 87 *Arithm.*). Quoniam itaque HI & *hi* inter se parallelæ atque æquales sunt (§. 257): erunt anguli F & *f* æquales (§. 204), atque adeo inclinatio plani ad idem planum in singulis punctis eadem (§. 476). *Q. e. d.*

CAPUT III.

De Solidorum Constructione.

PROBLEMA II.

Tab. VIII. Fig. 141, 142.

510. CUbum ADCBFEHG, *vel Parallelepipedum* IKMLNOPQ *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur pro cubo rhombus DABC (§. 340); pro parallelepipedo rhomboides IKLM (§. 341).

Tab. VIII. Fig. 141, 142.

2. Construantur porro pro cubo quadratum AEFB & rhombus BCGF (§. 338, 340); pro parallelepipedo rectangulum LMON, cujus latus LN altitudini æquale & rhomboides MKOP (§. 339, 341).

Cum rhombi pro quadratis, & rhomboides pro rectangulis construantur; ut

Tab. VIII. *Fig.* 141, 142. ut plana lateralia FBCG & MKPO videri possint; erit solidum AG cubus (§. 459); solidum vero LP parallelepipedum (§. 462).

PROBLEMA III.

511. *Prisma* ACBFDE *in plano describere.*

RESOLUTIO.

Tab. VIII. *Fig.* 140. 1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si prisma fuerit triangulare.

2. In A excitetur perpendicularis ad AB altitudini æqualis AE (§. 249).

3. Construantur parallelogramma ACED, BCDF (§. 341).

Erit ACBFDE prisma triangulare (§. 456, 457).

PROBLEMA IV.

Tab. IX. *Fig.* 146. 512. *Pyramidem* DACB *in plano describere.*

RESOLUTIO.

1. Describatur basis, ex. gr. triangulum ACB, si triangularis fuerit; ita tamen ut latus AB, tanquam a facie aversum, non exprimatur.

2. Super AC & CB construantur triangula ADC & CDB in puncto D coëuntia: seu, assumto vel determinato puncto D, ducantur rectæ AD, CD, BD.

Erit ADBC pyramis triangularis (§. 472).

PROBLEMA V.

Tab. IX. *Fig.* 152. 513. *Rete describere, ex quo Cubus construi possit.*

RESOLUTIO.

1. In rectam AB latus cubi quater transferatur.

2. In A erigatur perpendicularis AC lateri cubi AI æqualis (§. 249), & parallelogrammum ACBD compleatur (§. 339). Tab. IX. *Fig.* 152.

3. Intervallo lateris cubi determinentur quoque in CD puncta K, M, & O.

4. Denique ducantur rectæ IK, LM, & NO, producanturque IK & LM utrinque in E & F atque in G & H, donec fiat EI = IK = KF & GL = LM = MH, & agantur rectæ EG, FH.

DEMONSTRATIO.

CK & AI ad AC perpendiculares sunt, *per constr.* & AI=CK=AC, *per constr.* Ergo ACKI quadratum (§. 338). Non absimili modo ostenditur esse IKML, MLNO, &c. quadrata ipsi AK æqualia. Est itaque ADFG rete, ex quo cubus construi potest (§. 460). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

514. *Rete describere, ex quo Parallelepipedum construi potest.* Tab. IX. *Fig.* 153.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. In rectam BD transferatur ex B in H latitudo, ex H in I longitudo, ex I in K iterum latitudo, & ex K in D longitudo parallelepipedi.

2. Super his lineis tanquam basibus construantur parallelogramma AH, EI, FK & GD, quorum communis altitudo AB altitudini parallelepipedi æqualis.

3. Super EF vero & HI construantur parallelogramma EM & HO, quorum altitudo EL & HN latitudini parallelepipedi æqualis (§. 339).

Quoniam AEBH = GFIK, EHIF = GCKD, ELMF=HNOI (§. 383); ex hoc reti parallelepipedum construere licet (§. 463, 464). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA VII.

515. *Rete pro Prismate describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 154.

1. Construatur basis prismatis, ex. gr. pro triangulari triangulum KBD.
2. Continuetur latus BD in A & E, donec fiat AB=BK & DE=DK.
3. Super AB, BD & DE construantur parallelogramma AG, BH, DF, quorum altitudo AC altitudini prismatis æqualis (§. 339).
4. Denique fiat super GH triangulum GIH, ipsi BKD æquale (§. 205).

Ex hoc reti prisma triangulare, nec absimili modo multangulare quodcunque construetur (§. 457).

THEOREMA XX.

Tab. IX. Fig. 155.

516. *Superficies Cylindri recti, seclusis basibus, æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine Cylindri.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur arcus EF adeo parvus ut pro linea recta haberi possit, ducanturque rectæ EG & FH inter se parallelæ & ad EF perpendiculares. Quoniam etiam EF ipsi GH parallelus (§. 465); erit EGHF rectangulum. Superficies itaque cylindri in innumera rectangula, ipsi EFHG æqualia, resolvitur, quorum communis altitudo est EG seu altitudo cylindri (§. 229), bases vero junctim sumtæ peripheriæ æquantur. Ergo eadem æqualis est rectangulo sub peripheria & altitudine cylindri (§. 389). *Q. e. d.*

SCHOLION.

517. *Nimirum arculus in quolibet casu tam exiguus assumitur, ut, si ejus differentia multiplicari supponatur per numerum partium, in quas peripheria concipitur divisa, prodeat particula in dato casu inassignabilis, adeoque contemptibilis parvitatis: quod fieri posse patet, quod polygonum circulo inscriptum continuo appropinquat ad peripheriam. Et idem tenendum est in aliis casibus, ubi de infinite parvo sermo fuerit. Sed ex instituto ea de re dicimus in Philosophia prima.*

PROBLEMA VIII.

518. *Rete pro Cylindro describere.*

RESOLUTIO.

1. Eadem diametro describantur circuli AB & CD. Tab. IX. Fig. 156.
2. Inveniatur horum peripheria (§. 429).
3. Super BC altitudini cylindri æquali construatur rectangulum (§ 339), ita ut CD sit peripheriæ inventæ æqualis.

Ex hoc reti construi potest cylindrus (§. 516).

THEOREMA XXI.

519. *Superficies Coni recti seclusa basi, æqualis est triangulo, cujus basis peripheria, altitudo latus Coni.* Tab. IX. Fig. 157.

DEMONSTRATIO.

Si arcus LM infinite parvus adeoque a recta non differens; triangulum KLM pro rectilineo recte habetur: cumque angulus K sit infinite parvus; anguli L & M a rectis non differunt (§. 240), estque adeo KM ad LM perpendicularis (§. 78), consequenter trianguli KML altitudo (§. 228). Sed coni recti superficies in innumera istiusmodi triangula inter se æqualia resolvitur (§. 467, 251). Ergo integra coni recti superficies æqualis est triangulo, cujus altitudo lateri, basis peripheriæ coni æqualis (§. 389). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

520. Superficies coni recti æquatur sectori circuli latere coni tanquam radio descripti, cujus arcus peripheriæ coni æqualis (*§*.415), adeoque ad suam peripheriam eam rationem habet, quam diameter basis ad latus coni (*§*. 412 *Geom. &* *§*. 167 *Arithm.*).

PROBLEMA IX.

521. *Rete pro Pyramide describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX Fig. 158. Sit ex. gr. construenda pyramis triangularis.

1. Radio AB describatur arcus BE, & ei applicentur tres chordæ BC, CD & DE inter se æquales.
2. Super DC construatur triangulum æquilaterum DFC, ducanturque rectæ AD & AC.

Ex hoc reti pyramis construi potest (§. 472).

SCHOLION.

522. *Si latera basis pyramidis DC, CF & DF inæqualia fuerint; evidens est fieri debere ED = DF & CB = CF. Nec adeo latet, quid factu opus sit, si basis fuerit polygonum, sive regulare, sive irregulare.*

PROBLEMA X.

523. *Rete pro Cono recto describere.*

RESOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 159.

1. Diametro basis AB describatur circulus, & diameter producatur in C, donec AC lateri coni æqualis fiat.
2. Quæratur ad 2 AC & AB, in numeris determinatas, atque 360°, numerus quartus proportionalis (§. 302 *Arithm.*).
3. Radio CA, ex centro C describatur arcus DE, & ope Instrumenti transportatorii fiat angulus DCE, consequenter arcus DE (§. 54) numero graduum invento æqualis. Tab. IX. Fig. 159.

Erit sector CDE cum circulo AB rete pro cono recto (§. 520).

COROLLARIUM.

524. Quodsi ex A in F transferatur latus coni truncari & radio CF arcus GH describatur, tandemque ad 360°, numerum graduum arcus GH, atque FC, numerus quartus proportionalis quæratur, & inde diameter circuli IF determinetur; habebitur rete pro cono truncato. Est enim CDBAE rete pro cono integro, CGFIH pro cono abscisso (§. 523): ergo DBEHIG pro truncato.

PROBLEMA XI.

525. *Rete pro Tetraëdro describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur triangulum æquilaterum DEF (§. 198). Tab. IX.
2. Super singulis ejus lateribus construantur adhuc alia itidem æquilatera DAE, EBF & FCD (§. *cit.*) Fig. 160.

Ex hoc reti tetraëdrum construi potest (§. 475).

COROLLARIUM.

526. Quodsi BC continuetur in H, donec fiat CH = FC, & ut in resolutione Problematis construantur triangula æquilatera CHI, CGH, HLI, DCI (*§*. 198); ex reti Octaëdrum construi potest (*§*. 475). Tab. IX. Fig. 161.

PROBLEMA XII.

527. *Rete pro Icosaëdro describere.*

RESOLUTIO.

1. Construatur triangulum æquilaterum ABC (§. 198). Tab. X.
2. In basi AB continuata fiat AB = BF = FG = GH = HD. Fig. 162.
3. Per C agatur ipsi AB parallela CE (§. 258), & fiat AB = CI = IK = KL = LM = ME.

4. Ducan-

Tab. X. Fig. 162.

4. Ducantur rectæ CS per C & B, NT per I & F, OV per K & G, &c.
5. Similiter ducantur aliæ rectæ YO per B & I, SP per F & K, TQ per G & L, &c.

Dico ex hoc reti construi posse icosaëdrum.

D E M O N S T R A T I O.

Demonstrandum est, viginti triangula ACB, ABY, CBI, CIN, BSF, BIF, IOK &c. æquilatera & inter se æqualia esse (§. 475): id quod sequenti ratione patescit. Quoniam CI parallela & æqualis ipsi AB, *per construct.* & AC æqualis & parallela ipsi BI (§. 257); erit $o = x$ & $m = n$ (§. 233); consequenter CAB = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ BIF = & ∽ FIK, &c. Porro quoniam CI & BF sunt inter se æquales atque parallelæ, *per constr.* erit NT parallela ipsi CS (§. 257), adeoque $y = u$ & $t = o$ (§. 233); consequenter CIN = & ∽ CBI (§. 251). Eodem modo ostenditur esse CBI = & ∽ IOK = & ∽ KPL, &c. = & ∽ ABY = & ∽ BSF = & ∽ FTG, &c. Sunt itaque omnia triangula inter se æqualia & æquilatera. *Q. e. d.*

P R O B L E M A XIII.

Tab. X. Fig. 163.

528. *Rete pro Dodecaëdro describere.*

R E S O L U T I O.

1. Describatur pentagonum regulare (§. 352).
2. Applicata regula ad A & D ducantur rectæ AG & DF ipsi AB æquales.
3. Eodem modo ducantur AI & CH, BL, & DK, BN & EM, &c.
4. Intervallo lateris pentagoni fiat intersectio in Q ex G & L, in R ex N & O, in S ex H & F, &c. ducanturque GQ & QL, NR & OR, HS & FS, &c. Tab. X. Fig. 163.
5. Eodem modo construantur pentagona reliqua *a, b, c, d, e, f.*

D E M O N S T R A T I O.

Demonstrandum est pentagona omnia esse regularia ipsique ABCDE æqualia (§. 475). Nimirum AB = GA = BL = GQ = QL, *per constr.* Cumque anguli x mensura sit arcus dimidius ABCD (§. 324), anguli vero pentagoni E similiter sit mensura dimidius arcus ABCD (§. 314); erit angulus x angulo pentagoni E æqualis (§. 141). Et quoniam eodem modo ostenditur, esse quoque angulum u angulo pentagoni æqualem; erit ABLQG pentagonum regulare (§. 352), idque, ob latus commune AB, ipsi AEDCB æquale (§. 177, 161). Eadem demonstratio cum de reliquis pentagonis valeat; evidens est, omnia & regularia, & inter se æqualia esse. *Q. e. d.*

P R O B L E M A XIV.

529. *Corpora geometrica construere.*

R E S O L U T I O.

1. Delineentur retia in charta ex pluribus foliis compacta (§. 513, & seqq.).
2. Delineata exscindantur, resecta charta superflua juxta eorum perimetros.
3. Exscissa agglutinentur chartæ coloratæ.
4. Hujus superfluum ita resecetur, ut partibus perimetri alternis margines quidam relinquantur, quemadmodum in reti tetraëdri indicavimus.

5. Sin-

Tab. IX. *Fig.* 160. 5. Singula retium intra perimetrum lineamenta, ex. gr. EF, FD & DE in reti tetraëdri, scalpello profundius imprimantur, ut commode complicari queant latera perimetri solidi.

6. Denique retia complicentur & marginum ope conglutinentur.

THEOREMA XXII.

530. *Cubus, Tetraëdrum, Octaëdrum, Dodecaëdrum, & Icosaëdrum sunt corpora regularia; nec præter hæc quinque aliud possibile.*

DEMONSTRATIO.

Cubus sex quadratis, tetraëdrum quatuor, octaëdrum octo, icosaëdrum viginti triangulis regularibus, dodecaëdrum denique duodecim pentagonis regularibus inter se æqualibus terminatur (§. 460, 475). Sunt igitur hæc corpora regularia (§. 453). *Quod erat unum.*

In tetraëdro tres, in octaëdro quatuor, in icosaëdro quinque anguli plani trianguli regularis ad solidum efficiendum concurrunt (§. 525, 526, 527). Quoniam vero summa sex istiusmodi angulorum est 360° (§. 243); triangulis regularibus nullum corpus, præter illa tria, contineri potest (§. 452). In cubo tres anguli quadrati solidum efficiunt (§. 513). Quare cum summa quatuor istiusmodi angulorum sit 360° (§. 98, 144); quadratis nullum corpus continetur nisi cubus. In dodecaëdro tres anguli pentagoni regularis solidum constituunt (§. 528). Quia vero summa quatuor est 432°, & summa trium in hexagono regulari 360°, atque in reliquis figuris regularibus 360° major (§. 345), ad angulum vero solidum constituendum minimum tres plani requiruntur (§. 447); pentagonis regularibus nonnisi dodecaëdrum, figuris vero plurium laterum nullum corpus terminari potest. Corpora igitur regularia nonnisi quinque sunt. *Quod erat alterum.*

CAPUT IV.

De Dimensione Solidorum.

PROBLEMA XV.

531. *Superficiem ac soliditatem Cubi determinare.*

RESOLUTIO.

I. Cum superficies cubi ex sex quadratis æqualibus componatur (§. 460); latus cubi in seipsum ducatur, & factum per 6 multiplicetur (§. 370).

II. Quodsi idem factum in latus ducatur: prodibit soliditas cubi.

Sit ex. gr. latus cubi AB 2° 7′ 4″. Tab. X. *Fig.* 164.

AB = 274	Basis = 75076
274	AB = 274
1096	300304
1918	525532
548	150152
ABDC = 75076	Solidit. 20° 57 0′ 824″
6	
Superfic. 45° 04′ 56″	

DEMONS-

DEMONSTRATIO.

Tab. X. *Fig.* 164. Cum mensuræ solidorum sint cubi, quorum latera perticæ, pedi, digito &c. æqualia (§. 477); soliditatem cubi determinaturus invenire debet, quot perticæ, pedes, digiti &c. cubici in eo contineantur. Quodsi jam latus in partes quotcunque æquales divisum concipiamus, tot erunt cuborum ordines quot in latere AB partes, & in quolibet ordine totidem existent quot in basi ACFE quadrata. Quare si basin ACFE, hoc est, factum ex latere cubi in seipsum (§. 370), per latus cubi AB multiplices; prodibit numerus cuborum minorum, ex quibus major componitur. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

532. Si latus cubi fuerit 10, erit soliditas 1000: si illud 12, hæc 1728. Quare cum pertica Geometrarum sit 10 pedum, pes 10 digitorum, &c. (§. 25); pertica cubica est 1000 pedum cubicorum, pes cubicus 1000 digitorum cubicorum &c. Hinc in exemplo nostro soliditas cubi est 20° 570′824″. Similiter cum pertica *Rhenana* sit 12 pedum, pes 12 digitorum; pertica cubica est 1728 pedum, pes cubicus 1728 digitorum. Quare si in nostro exemplo 20570824 dividas per 1728, quotus erit 11904′ & 712″. Quodsi 11904′ porro dividas per 1728; quotus erit 6° & 1536, adeoque habebis 6°, 1536′ & 712″.

SCHOLION.

533. *Patet adeo, quantum divisio mensuræ in 10 partes præstet divisione in 12.*

COROLLARIUM II.

534. Cubi sunt in ratione triplicata laterum (§. 259 *Arithm.*), & æquales, si latera æqualia sint.

THEOREMA XXIII.

535. *Parallelepipeda, Prismata & Cylindri, quorum bases & altitudines æquantur, æqualia sunt.*

DEMONSTRATIO.

Concipiantur hæc corpora planis eorum basibus parallelis secari in discos crassitiei quantumlibet exiguæ. Quoniam altitudines æquantur, *per hypoth.* ex uno tot disci prodibunt, quot ex altero. Cumque plana sectionum basi parallelarum eidem æqualia (§. 463; 458, 466); bases vero illorum corporum inter se æquales sunt, *per hypoth.* etiam disci singuli unius corporis discis singulis alterius æquantur (§. 87 *Arithm.*); consequenter cum disci omnes simul sumti cum corporibus idem sint, corpora tota inter se æqualia sunt (§. 88 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

536. *Metiri superficiem ac soliditatem Parallelepipedi.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur area parallelogrammorum ILMK, LMON & OMKP (§. 375, 387). Tab. VIII. *Fig.* 142.
2. Addantur in unam summam & hæc multiplicetur per 2. Erit factum superficies parallelepipedi (§. 464).
3. Quodsi basis ILMK multiplicetur per altitudinem; prodibit soliditas ejusdem.

Sit ex. gr. LM = 36′, MK = 15′, MO = 12′ & parallelepipedum rectangulum.

LM = 36	LM = 36	MK = 15
MK = 15	MO = 12	MO = 12
180	72	30
36	36	15
LIKM 540	LMON 432	MOKP 180
MO = 12	LIKM 540	
1080	MOKP 180	
54	1152	
	2	
Solid. 6°480′	23°04′ Superficies.	

DEMONSTRATIO.

De parallelepipedo rectangulo eadem valet demonstratio, qua in Probl. 15 (§. 531) usi sumus. Cum vero obliquangulum æquetur rectangulo super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 535); ducta basi in altitudinem habetur quoque soliditas obliquanguli. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIV.

Tab. X. Fig. 165. 537. *Planum diagonale* AHFD *dividit Parallelepipedum* ABDCEFG *in duo Prismata* ADCEFH *&* ADBIGH *inter se æqualia.*

DEMONSTRATIO.

Diagonalis AD dividit parallelogrammum CABD in duo triangula æqualia ACD & DBA (§. 337). Habent ergo prismata bases æquales. Quare cum DF perpendicularis ad planum ACDB (§. 462), sit etiam perpendicularis ad DA & DC, adeoque cum ad triangulum ADB, tum ad alterum ADC (§. 486); eadem quoque erit utriusque altitudo DF (§. 227), & ipsa itidem æqualia sunt (§. 535). *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

538. Est ergo prisma triangulare dimidium parallelepipedi super dupla basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XVII.

539. *Metiri superficiem ac soliditatem Prismatis.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur basis (§. 392, 400, 402) & multiplicetur per 2.

2. Quærantur porro areæ parallelogrammorum prisma circumcirca terminantium, & earum summa addatur facto antecedenti.

Ita prodibit superficies integra prismatis (§. 457). Tab. VIII.

3. Quodsi basis BAC per altitudinem CD multiplicetur; habebitur ejusdem soliditas. Fig. 140.

Ex. gr. Sit BC = 4° 3′ 2″, AG = 3° 5′ 7″
CD = 8° 6′ 9″.

½BC = 216″	AC = 432″
AG = 357	CD = 869
1512	3888
1080	2592
648	3456
Basis 77112″	ACDE 375408
	3
CD = 869	1126224
694008	2 ABC 154224
462672	Superfic. 128° 04′ 48″
616896	
67° 010′ 328″ Solidit.	

DEMONSTRATIO.

Prisma triangulare est dimidium parallelepipedi super dupla basi, sed ejusdem altitudinis (§. 539). Quodsi vero dupla basis, hoc est parallelogrammum multiplicetur per altitudinem, soliditas parallelepipedi prodit (§. 536). Ergo si simpla, hoc est, triangulum per eandem altitudinem multiplicetur; parallelepipedi dimidium, hoc est prismatis soliditas habetur. Omnia prismata reliqua cum in triangularia resolvi possint; eorum quoque

 soli-

soliditas prodit, basi per altitudinem multiplicata. *Q. e. d.*

SCHOLION.

540. *In exemplo nostro assumsimus, prismatis basin esse triangulum regulare. Quodsi vero basis fuerit figura irregularis; parallelogramma lateralia inæqualia sunt, adeoque area uniuscujusque sigillatim invenienda.*

PROBLEMA XVIII.

541. *Data diametro* AB *&* altitudi-
Tab. VIII. Fig. 143. *ne Cylindri* CF; *invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria baseos & basis ipsa (§. 429), hæcque multiplicetur per 2.
2. Peripheria ducatur in altitudinem; quod prodit est superficies, seclusis basibus (§. 516).
3. Quare si eidem addatur factum antecedens; habebitur superficies integra.
4. Ducatur quoque basis in altitudinem. Factum erit soliditas cylindri.

Ex. gr. Sit AB = 5° 6′, CF = 24° 6′; erit
peripheria = 17°584
CF = 24°600

105504000
70336
35168

Sup. absque Bas. 432°56′64″|00
Dupl. Bas. 492352

Superfic. 481°80′16″
Basis = 24°61′76″
CF = 2460

14770560
984704
492352

Solidit. 605°592′960‴

DEMONSTRATIO.

Cum circulus æqualis sit triangulo, cujus basis peripheria, altitudo radius (§. 410); cylindrus æqualis erit prismati triangulari eandem cum ipso altitudinem & basin æqualem habenti (§. 535). Ejus ergo soliditas habetur, ducta basi in altitudinem (§. 539). *Q. e. d.*

THEOREMA XXV.

542. *Pyramides & Coni super eadem basi & ejusdem altitudinis sunt æquales.* Tab. X. Fig. 166.

DEMONSTRATIO.

Sit ACB unum e triangulis, quibus terminatur pyramis una; ABD vero unum e triangulis, quibus terminatur altera: ducta EL ipsi AB parallela (§. 258), erit IK=LM (§. 226); adeoque ob CK=DM, *per hypoth.* CI=DL (§ 91 *Arithm.*): EF vero & GH erunt latera planorum, quibus secantur pyramides basibus suis parallelorum. Jam cum sit △CEF ∽ △CAB, & △DGH ∽ △DAB (§. 268); erit CI:CK =EF:AB, & DL:DM=GH:AB (§. 396). Sed CI=DL & CK=DM, *per demonstr.* Ergo EF:AB=GH:AB (§. 167 *Arithm.*); consequenter EF =GH (§. 177 *Arithm.*) Jam si pyramides secantur planis basi parallelis, plana sectionum basi similia sunt (§. 474); consequenter planum, cujus latus est EF, erit ad basin ut EF^2 ad AB^2, & planum, cujus latus est GH, erit ad eandem basin ut GH^2 ad AB^2 (§. 406). Quare cum $EF^2 = GH^2$, *per demonstr.* planum, cujus latus est EF & planum, cujus latus est GH, ad basin eandem rationem habent (§. 168 *Arithm.*); consequenter plana

Tab. X. Fig. 166. plana ista inter se æqualia sunt (§. 177 *Arithm.*). Igitur & disci, quantumlibet exiguæ crassitiei, in eadem a basi distantia inter se æquantur. Quoniam itaque, ob æquales altitudines *per hypoth.* ex una pyramide tot disci secari possunt quot ex altera; pyramis una alteri æqualis sit necesse est (§. 88 *Arithm.*) *Quod erat unum.*

Quodsi triangula ACB & ADB fuerint sectiones triangulares conorum; erunt EF & GH diametri circulorum basi communi parallelorum (§. 468). Cum adeo circuli isti æquales sint (§. 171); eodem quo ante modo demonstratur, conos æquales esse. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXVI.

543. *Prisma triangulare in tres Pyramides æquales dividi potest.*

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 167. Quoniam planum ACB parallelum plano DFE (§. 456), pyramides ABCF & DFEA habent altitudinem eandem (§. 498), atque bases ACB & DFE æquales (§. 457). Sunt ergo æquales (§. 542). Similiter cum BEFC sit parallelogrammum (§. 457) △CFB =△ BFE (§. 337). Habent adeo pyramides ACBF & BEFA æquales bases. Quoniam vero hæ bases in eodem sunt plano, quod per se patet, & verticem communem in A habent; ab eodem vero puncto sublimi A ad idem planum BEFC nonnisi unica perpendicularis duci potest (§. 489); pyramides istæ eandem quoque altitudinem habent; consequenter æquales sunt (§. 542). Quamobrem tres istæ pyramides inter se æquantur (§. 87 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

544. *Si ex ligno paretur prisma & debita ratione secetur; demonstratio captui tyronum magis accommodatur. Immo ad bilancem æqualitas ponderum examinari & inde magnitudinis æqualitas colligi potest.*

COROLLARIUM I.

545. Pyramis triangularis est tertia pars prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis.

COROLLARIUM II.

546. Et quoniam multangulare quodvis in triangularia resolvi potest; quælibet pyramis est pars tertia prismatis super eadem basi & ejusdem altitudinis (§. 187 *Arithm.*).

COROLLARIUM III.

547. Quia Conus pro pyramide infinitangula haberi potest, & Cylindrus pro prismate infinitangulo; Conus pars tertia est Cylindri super æquali basi & ejusdem altitudinis.

PROBLEMA XIX.

548. *Metiri superficiem ac soliditatem Pyramidis & Coni.*

RESOLUTIO.

Quæratur soliditas prismatis vel cylindri eandem cum pyramide vel cono basin habentis (§. 539, 541), inventaque per 3 dividatur: quotus erit soliditas pyramidis vel coni (§. 546, 547).

Ex. gr. Si soliditas prismatis fuerit 67010328‴, ut in Probl. 17 (§. 539); erit soliditas pyramidis 22336776‴. Si soliditas cylindri fuerit 605592960‴ ut in Probl. 18 (§. 541); erit soliditas coni 201864320‴.

Superficies pyramidis habetur, si tam basis ABC, quam triangulorum lateralium ACD, CBD, BDA area investigentur (§. 392), atque in unam summam colligantur. Tab. IX. Fig. 146.

Coni denique recti superficies prodit, peripheria baseos in latus ejus dimidium ducta (§. 519), & basi, qui circulus est, eidem addita.

Tab. IX. Fig. 144. Ex. gr. Sit diameter coni NM = 56'; erit peripheria 17584''', basis 246176'' (§. 429). Sit altitudo KL = 246'. Quoniam $LM = \frac{1}{2} NM = 28'$ & $KM^2 = KL^2 + LM^2 = 60516 + 784 = 61300$ (§. 417); erit KM = 2475'' (§. 269 *Arithm.*), consequenter superficies coni, seclusa basi, 2176020'' & hinc integra 2422196''.

PROBLEMA XX.

549. *Metiri superficiem ac soliditatem Coni truncati: datis ejus altitudine* CH *& diametris basium* AB *&* CD. Tab. X. Fig. 168. n. 1.

RESOLUTIO.

1. Datis diametris basium CD & AB inveniantur peripheriæ (§. 429).
2. Ad quadratum altitudinis CH addatur quadratum differentiæ radiorum AH, & ex aggregato extrahatur radix (§. 269 *Arithm.*), ut habeatur latus AC. (§. 417).
3. Semisumma peripheriarum multiplicetur per latus AC.

Productum erit superficies coni truncati.

Sit ex. gr. AB = 8', CD = 6', CH = 10', erit AH = 1'.

100 — 314 — 8'
8
———
2512''' periph. maj.

$CH^2 = 100'$
$AH^2 = 1$
———
$AC^2 = 101$

Ergo AC = 1005''' fere,

100 — 314 — 6'
6
———
1884''' Periph. min.

2512 Periph. maj.
1884 min.
———
4396 Summa.
———
2198 Semisumma.
1005 AC
———
10990
219800
———
2020'8''9'''90'''' Superfic. coni trunc.

DEMONSTRATIO.

Superficies coni truncati relinquitur, si superficies coni minoris ECD a superficie majoris AEB subtrahitur. Sed superficies minoris æquatur triangulo, cujus basis HI peripheria diametro CD descripta, altitudo MK, latus EC; superficies majoris vero triangulo, cujus basis NO peripheria diametro AB descripta, altitudo ML, latus AE (§. 519). Cum vero prior sit pars posterioris; illa ex hac subtracta, relinquitur pro superficie coni truncati trapezium parallelarum basium HION, cujus quidem bases HI & NO peripheriis diametris CD atque AB descriptis æquales sunt, altitudo KL vero latus AC existit. Habetur igitur superficies coni truncati semisumma dictarum peripheriarum in AC ducta (§. 400). Q. e. d. Tab. X. Fig. 168. n. 1. n. 2

II. Demissa ex C perpendiculari CH ad diametrum AB, cum etiam sit axis EF ad eandem in cono recto perpendicularis (§. 467), erunt CH & EF parallelæ (§. 492). Quamobrem cum triangulum EAF secet duo plana parallela CD & AB, *per hypoth.* erunt semidiametri CG & AF parallelæ (§. 499); conse-

consequenter CG=HF (§. 226), & CH=FG (§. 238). Soliditatem adeo coni truncati inventurus.

1. Inferat (§. 268): ut differentia semidiametrorum AH ad altitudinem coni truncati CH, ita semidiameter major AF ad altitudinem coni integri FE, per Probl. 33 Arithm. (§. 302 *Arithm.*) inveniendam.
2. Ex hac inventa subducat altitudinem coni truncati GF, ut relinquatur altitudo ablati EG.
3. Quærat soliditatem conorum CED & AEB (§. 548).
4. Denique illam ex hac auferat; residua erit soliditas coni truncati ACDB.

Ex. gr. Sint omnia, ut ante: erit FE= 40′, & hinc EG= 30′.

Periph. major	2512′′′
$\frac{1}{4}$ AB	200
Basis maj.	502400
EF	4000
	2009600000
3	
Conus AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Periph. min.	188,4′′′
$\frac{1}{4}$ CD	1,500
	94200
	1884
Baf. min.	282600
$\frac{1}{3}$ EG	1000
Con. CED	282600000
Con. AEB	$669866666\frac{2}{3}$
Con. trunc.	$387266666\frac{2}{3}$

THEOREMA XXVII.

550. *Sphæra æquatur pyramidi, cujus basis æqualis superficiei, altitudo autem radio sphæræ.*

DEMONSTRATIO.

Concipiatur superficies sphæræ in quadratula infinite exigua resoluta, quæ a planis non amplius different, & ex centro concipiantur ad eorum angulos ductæ rectæ. Evidens est sphæram constare ex innumeris pyramidibus quadratis in centro coëuntibus, quarum altitudines a radiis differunt quantitate inassignabili, hoc est, revera nulla, bases vero simul sumtæ superficiei sphæræ æquantur. Tota igitur sphæra recte habetur pro pyramide, cujus basis superficies, altitudo radius sphæræ. *Q. e. d.*

THEOREMA XXVIII.

551. *Sphæra est ad Cylindrum super æquali basi & ejusdem altitudinis ut* 2 *ad* 3. Tab. X. *Fig.* 169.

DEMONSTRATIO.

Si quadratum ABCD cum quadrante DBC & triangulo ADC inscripto circa latus DC gyretur, quadratum quidem cylindrum (§. 465), quadrans hemisphærium (§. 470), triangulum conum (§. 467) describit. Altitudo horum corporum cum eadem sit nempe DC (§. 227); si ea in discos quantumlibet exiguæ crassitiei secentur, numerus eorum in omnibus idem erit. Sit jam EH semidiameter unius disci cylindri; erit EG semidiameter disci respondentis in hemisphærio, EF semidiameter disci in cono. Cum vero hi disci sint circuli, quod ex genesi patet (§. 131); erunt ipsi inter se ut quadrata rectarum EH, EG & EF (§. 408), hoc est, cum sit, ob parallelismum EH & CB, *per hypoth.* EH=CB (§. 238)=CG (§. 40), atque ob CD : DA=CE : EF (§. 268) & CD =DA (§. 98), EC=EF, ut quadrata

rectarum CG, FG & EC. Quare si discum coni a disco cylindri subtrahas, relinquitur discus sphæræ (§ 417). Idem cum valeat de singulis discis ex reliquis divisionibus emergentibus, soliditas sphæræ relinquetur soliditate coni ex soliditate cylindri subducta. Est vero conus triens cylindri (§. 547). Ergo sphæra duas ejusdem partes tertias continet. *Q. e. d.*

THEOREMA XXIX.

552. *Cubus diametri est ad Sphæram propemodum ut* 300 *ad* 157.

DEMONSTRATIO.

Si diameter sphæræ 100, cubus ejus 1000000 (§. 531) & cylindrus eandem cum sphæra basin & altitudinem habens 785000 (§. 541); consequenter sphæra 1570000: 3. (§. 551). Est itaque cubus diametri ad sphæram ut 1000000 ad 1570000: 3, hoc est, ut 300 ad 157 (§. 181, 178 *Arith.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

553. *Dico cubum diametri esse ad sphæram propemodum ut 300 ad 157. In Demonstratione enim assumitur ratio prope vera diametri ad peripheriam* 100 : 314 (§. 426.).

THEOREMA XXX.

554. *Superficies Sphæræ est quadrupla circuli radio Sphæræ descripti.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam sphæra æqualis est pyramidi, cujus basis est superficies, altitudo radius sphæræ (§. 550); superficies ejus habetur, si soliditas per tertiam semidiametri aut sextam diametri partem dividitur (§. 548). Est vero soliditas sphæræ factum ex $\frac{2}{3}$ circuli maximi in diametrum (§. 551, 541). Quare si hoc factum per $\frac{1}{6}$ diametri dividas, seu, quod perinde est, primum per diametrum, ut quotus sint $\frac{2}{3}$ circuli maximi, hoc est, circuli circa diametrum sphæræ descripti, (§. 210 *Arithm.*), & deinde per $\frac{1}{6}$ (§. 208, 210 *Arithm.*); erit quotus $\frac{12}{3}$ circuli maximi (§. 243 *Arithm*), hoc est quadruplus circuli maximi (§. 223 *Arithm.*). Sed idem est superficies sphæræ, *per demonstrata.* Ergo sphæræ superficies circuli maximi quadrupla. *Q. e. d.*

COROLLARIUM.

555. Area circuli maximi est factum ex peripheria ejus in quartam diametri partem (§. 429). Ergo quadruplum hujus circuli est factum ex peripheria in diametrum. Superficies ergo sphæræ habetur, peripheria in diametrum ducta; consequenter rectangulo æqualis est, cujus basis peripheria circuli radio sphæræ descripti, altitudo diameter sphæræ (§. 375).

PROBLEMA XXI.

556. *Data diametro Sphæræ invenire superficiem ac soliditatem ejus.*

RESOLUTIO.

1. Quæratur peripheria circuli radio sphæræ describendi (§. 429).
2. Inventa ducatur in diametrum. Factum est superficies sphæræ (§. 555).
3. Hoc si porro multiplicetur per sextam diametri partem; prodibit sphæræ soliditas (§. 550, 548).

Ex. gr. Sit diameter 5600''', erit

Periph.	Circuli	17584''''
	Diam.	5600
		10550400
		87920
Superf. sphær.		98470400''''

Superf.

Superf. Sphær.	984704″ | 00
Diamet.	560″
	59082240
	4923520
	551434240

45 4
551434240 (91905706$\frac{2}{3}$ Sol. Sphær.
666666666

Aliter.

1. Quæratur cubus diametri 175616000″ (§. 531).
2. Inveniatur porro ad 300, 157 & cubum inventum 175616000″ numerus quartus proportionalis 91905706$\frac{2}{3}$ (§. 302 *Arithm.*), qui erit soliditas sphæræ (§. 552).

SCHOLION.

557. *Segmenta sphæræ ac sectores inferius in Analysi facilius invenire docemus quam hoc loco fieri poterat.*

PROBLEMA XXII.

558. *Metiri soliditatem ac superficiem quinque Corporum regularium.*

RESOLUTIO.

Cubi soliditas investigatur per Probl. 15 (§. 539). Tetraëdrum cum sit pyramis, & Octaëdrum pyramis geminata, Icosaëdrum vero ex viginti pyramidibus triangularibus, Dodecaëdrum ex duodecim quinquangularibus constet, quarum bases in superficie Icosaëdri & Dodecaëdri sunt, vertices in centro coëunt (§. 472, 475); horum corporum soliditas habetur per Probl. 19 (§. 548). Superficies eorundem prodit, si area figuræ unius ex terminantibus ipsa quæratur (§. 392 & 402) & inventa per numerum, a quo corpus denominatur, multiplicetur, nempe pro tetraëdro per 4, pro hexaëdro seu cubo per 6, pro octaëdro per 8, pro dodecaëdro per 12, pro icosaëdro per 20 (§. 475).

PROBLEMA XXIII.

559. *Corporis irregularis cujuscunque soliditatem invenire.* Tab. X. Fig. 170.

RESOLUTIO.

1. Immittatur corpus parallelepipedo cavo, eique aqua aut arena superfundatur, & altitudo aquæ seu arenæ AB notetur.
2. Corpore extracto, observetur denuo aquæ aut arenæ complanatæ altitudo AC.
3. Subtrahatur AC ex AB, ut relinquatur BC.
4. Quoniam corpus irregulare æquatur parallelepipedo, cujus basis ECGF, altitudo BC; ejus soliditas invenietur per Probl. 16 (§. 536).

Sit ex. gr. AB 8′, AC 5′; erit BC 3′. Sit porro DB 12′, BE 4′; erit soliditas corporis 144′.

SCHOLION I.

560. *Quodsi corpus in aqualiculo istiusmodi commode deponi nequeat, ex. gr. si statuam certo loco affixam dimetiri jubeamur; prisma quadrangulare aut parallelepipedum circa ipsum construi debet ex asseribus. Reliqua peragenda sunt ut ante.*

COROLLARIUM.

561. Inveniri ergo potest, quot linearum cubicarum sit aliquod lignum, saxum, metallum, aut materia aliqua quæcunque pendens libram unam.

SCHOLION II.

562. *Hinc in usus futuros construi potest Tabula gravitatem diversorum corporum ostendens secundum libras, quas pendit eorum pes cubicus: id quod per praxes hydrostaticas aliis*

aliis adhuc modis fieri potest, uti suo loco ostendetur.

PROBLEMA XXIV.

563. *Invenire soliditatem corporis cavi.*

RESOLUTIO.

Casus I. Si corpus cavum in numero geometricorum non contineatur, resolutio eadem, quæ Problematis præcedentis (§. 559).

Casus II. Si corpus cavum fuerit parallelepipedum, prisma, cylindrus, sphæra, pyramis, vel conus; soliditas primum totius corporis cavitate inclusa, dein cavitatis, quæ eandem cum corpore figuram habere supponitur, per methodos supra traditas (§. 536, 539, 541, 548, 556) inveniatur: hac enim ex ista subducta, relinquitur soliditas corporis cavi.

Sit ex. gr. soliditas cylindri cavi ABCD invenienda, sitque diameter totius corporis AB 56°, longitudo AC 2° 4′ 6″, erit soliditas cylindri inclusa cavitate 605′ 592″ 960‴. Sit diameter cavitatis 500‴; erit soliditas 482′ 775″ 000‴: quæ ex supra inventa subducta relinquit soliditatem corporis cavi 122′ 817″ 960‴. Tab. X. Fig. 171.

CAPUT V.

De Similitudine ac Ratione Solidorum.

THEOREMA XXXI.

564. *Corpora similia sunt, quorum plana terminantia & numero æqualia & similia existunt.*

DEMONSTRATIO.

Cum corpora ex planorum terminantium concursu gigni posse concipiamus; eodem modo determinantur, si plana terminantia & numero æqualia fuerint & similia (§. 119). Sunt igitur & ipsa similia (§ 120). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

565. Cum in planis similibus anguli homologi sint æquales (§. 175), anguli vero solidi homologi ex concursu planorum homologorum (§. 446) & in corporibus similibus multitudine æqualium oriantur (§. 564); in corporibus similibus anguli solidi homologi æquales sunt (§. 449).

COROLLARIUM II.

566. Quoniam in planis similibus latera homologa sunt proportionalia (§. 175); si ex. gr. juxta parallelepipedum ABDCEHGF aliud simile *abdcehgf* (quod in Tabula non expressimus) poni imaginemur, erit AB : BD = *ab* : *bd*, & DB : BG = *db* : *bg*. Quamobrem ex æquo AB : BG = *ab* : *bg* (§. 194 *Arithm.*). Cum adeo sit AB : *ab* = BD : *bd*, & AB : *ab* = BG : *bg* (§. 173 *Arithm.*); corporum similium longitudines AB & *ab*, latitudines DB & *db*, itemque altitudines BG & *bg* in eadem ratione existunt. Tab. X. Fig. 165.

COROLLARIUM III.

567. Cubus sex quadratis æqualibus terminatur (§. 460). Sunt vero quadrata omnia similia (§. 98, 175). Ergo cubi omnes sunt similes (§. 564).

COROLLARIUM IV.

568. Quoniam corpora regularia planis regu-

regularibus, adeoque similibus (§. 106, 175) & ejusdem quidem speciei numero æqualibus (§. 475) terminantur; corpora quoque regularia ejusdem speciei similia sunt (§. 564).

COROLLARIUM V.

569. Omnia igitur Tetraëdra, omnia quoque Octaëdra, Dodecaëdra & Icosaëdra similia sunt (§. 475).

THEOREMA XXXII.

570. *Cylindrorum & Conorum similium altitudines sunt ut radii basium; axes sunt itidem ut radii basium & iis sub eodem angulo junguntur.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VIII. Fig. 143. Tab. IX. Fig. 144.

Si coni & cylindri similes sunt, ea in iisdem eadem sunt, per quæ a se invicem discerni possunt (§. 24 *Arith.*). Patet vero conos & cylindros non posse distingui, nisi per rationem axis CF vel KL ad diametrum basis DE vel NM, atque angulum CFE vel KLM, quem efficit axis cum diametro (§. 465, 467). Axes igitur in conis & cylindris similibus ad diametros basium eandem rationem habent, & ad eas similiter inclinantur, seu ad eundem angulum insistunt. *Quod erat unum.*

Cum in figuris solidis, perinde ac in planis (§. 227), altitudo sit recta ex vertice in basin ad angulos rectos ducta; in conis & cylindris rectis axes sunt altitudines (§. 465, 467), adeoque patet *per demonstrata*, altitudines tum esse diametris basium proportionales. Et quoniam in ceteris altitudines in triangulis rectangulis subtendunt eosdem angulos obliquos, sub quibus nempe axes ad diametros inclinantur; ideo axibus (§. 267), consequenter etiam diametris basium (§. 167 *Arithm.*) proportionales sunt. *Quod erat alterum.*

THEOREMA XXXIII.

571. *Omnis Sphæra est alteri similis.*

DEMONSTRATIO.

Tab. IX. Fig. 145.

Omnem semicirculum esse alteri similem, patet ex demonstratione Theorematis 1 Part. 1 (§. 135). Sed sphæra describitur semicirculo K circa diametrum AB gyrato (§. 470): omnes igitur sphæræ eodem modo determinantur (§. 119), adeoque similes sunt (§. 120). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXIV.

572. *Omnia Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides & Coni sunt in ratione composita basium & altitudinum.*

DEMONSTRATIO.

Sunt enim ut facta ex basibus in altitudines (§. 536, 539, 541, 548, *Geom.* & §. 178 *Arithm.*): ergo in ratione composita basium & altitudinum (§. 159 *Arithm.*). *Q. e. d.*

COROLLARIUM I.

573. Quare si bases fuerint æquales, altitudinum, si altitudines, basium rationem habent (§. 181 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

574. Cylindrorum & conorum bases sunt circuli (§. 465, 467). Circuli sunt in ratione duplicata diametrorum (§. 409). Ergo cylindri & coni quicunque sunt in ratione composita ex simplici altitudinum & duplicata diametrorum (§. 572); & si fuerint æque alti, sunt ut quadrata diametrorum (§. 573).

COROLLARIUM III.

575. Quare si in cylindris altitudo fuerit diametro basium æqualis; erunt in ratione triplicata diametrorum basium (§. 159 *Arithm.*).

PROBLEMA XXV.

576. ***Invenire Cubum dato corpori, cujus soliditas inveniri potest, æqualem; vel qui sit ad hoc in data quacunque ratione, ex. gr. ut 3 ad 1, vel ut 1 ad 4.***

RESOLUTIO.

1. Investigetur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Ex ea, vel ejus multiplo aut submultiplo desiderato, ex. gr. triplo aut subquadruplo, extrahatur radix cubica (§. 282 *Arithm.*), quæ erit latus cubi desiderati (§. 531 *Geom.* & §. 248 *Arithm.*).

Ex.gr. Sit soliditas cylindri $107^{\circ}\ 171'875''$ reperietur latus cubi æqualis $4^{\circ}\ 7'\ 5''$.

PROBLEMA XXVI.

577. *Dato corpore, cujus soliditas inveniri potest; invenire dimensiones alterius ipsi æqualis dati generis & altitudinis vel baseos datæ.*

RESOLUTIO.

1. Inveniatur soliditas corporis per Problemata *Cap. præc.* tradita.
2. Dividatur per basin datam: quotus erit altitudo in prismatis, parallelepipedis & cylindris (§. 536, 539, 541 *Geom.* & §. 210 *Arithm.*), tertia vero altitudinis pars in pyramidibus atque conis (§. 548 *Geom.* & §. *cit. Arithm.*).
3. Si altitudo detur, soliditas corporis inventa dividatur per eam, ut habeatur basis prismatum, parallelepipedorum & cylindrorum; per tertiam altitudinis partem, ut habeatur basis pyramidum & conorum (§§. *cit.*)
4. Pro parallelepipedis & prismatis triangularibus & quadrangularibus area baseos discerpatur in factores duos, ut habeatur longitudo & altitudo (§. 387, 392, 402, 456, 462), quorum alteruter pro basi triangularis prismatis per 2 multiplicanda (§. 392); & insuper pro multangularis basi alter per numerum laterum dividendus, ut prodeat latus figuræ polygonæ (§. 402).
5. Pro cylindro & cono ex basi inventa porro quærenda ejus diameter (§. 434).

Ex. gr. Sit soliditas alicujus corporis $3^{\circ}456'978''$. Inveniri debet cylindrus, cujus altitudo $2^{\circ}4'6''$. Reperietur basis $1^{\circ}40'53''$ fere; diameter $134''$.

THEOREMA XXXV.

578. ***Corpora similia, Prismata, Parallelepipeda, Cylindri, Pyramides, atque Coni sunt in ratione triplicata homologorum laterum, itemque altitudinum.***

DEMONSTRATIO.

Sunt enim in ratione composita basium & altitudinum (§. 572). Sed bases sunt in ratione duplicata homologorum laterum (§. 406, 409) & altitudines lateribus basium homologis proportionales sunt (§. 566). Ergo corpora ipsa in ratione triplicata laterum homologorum, itemque altitudinum, existunt (§. 159 *Arithm.*). *Q.e.d.*

THEO-

THEOREMA XXXVI.

579. *Sphæræ sunt ut Cubi diametrorum.*

DEMONSTRATIO.

Tab. VI. Fig. * Sit circulo DAEB quadratum GFIH circumscriptum (§. 351). Quodsi semicirculus AEB cum quadrato dimidio AGHB circa axem communem AB in orbem moveatur, ille sphæram, hoc cylindrum describet, cujus altitudo AB diametro basis IH æqualis (§. 470, 465). Quare si ponamus circulum adhuc alium cum quadrato similiter circumscripto; quoniam ex Theorematis 1 Part. 1. demonstratione constat (§. 135), omnem semicirculum esse alteri similem, & AB ad BH utrobique est ut 1 ad 2, adeoque rectangulum unum alteri simile (§. 175); inde generabitur sphæra & cylindrus alteri similis (§. 119, 120). Cum adeo ea utrobique coincidant, per quæ a se invicem distingui debebat, quod in utroque casu gignitur (§. 24 *Arithm.*); erit cylindrus unus ad suam sphæram ut alter ad suam sphæram (§. 132 *Arithm.*); consequenter sphæræ sunt inter se ut isti cylindri (§. 173 *Arithm.*). Habent ergo rationem triplicatam diametrorum (§. 575), hoc est, ut cubi earundem existunt (§. 259 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVII.

580. *Æqualia Parallelepipeda, Prismata, Cylindri, Coni & Pyramides reciprocant bases & altitudines.*

DEMONSTRATIO.

Si enim hæc corpora fuerint æqualia, facta ex basibus in altitudinem æqualia sunt (§. 536, &c.). Quamobrem altitudo corporis A est ad altitudinem alterius B uti reciproce basis ipsius B ad basin ipsius A (§. 299 *Arithm.*). *Q. e. d.*

THEOREMA XXXVIII.

581. *Cylindrus, cujus altitudo æqualis est diametro baseos, est ad Cubum diametri ut* 785 *ad* 1000. Tab. X. Fig. 172. n. 1.

DEMONSTRATIO.

Si diameter AB 100, erit basis 7850 (§. 429). Et quoniam altitudo DC = AB, *per hypoth.* soliditas cylindri 785000 (§. 541). Sed cubus diametri AB = 1000000 (§. 531). Ergo cylindrus ad cubum diametri ut 785 ad 1000 (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

CAPUT VI.

De Stereometria Doliorum.

PROBLEMA XXVII.

582. *Virgulam construere, cujus ope haud difficulter invenitur numerus mensurarum fluidi alicujus, ex. gr. vini, cerevisiæ, &c. in vase cylindrico contenti.*

RESOLUTIO.

Tab. X. Fig. 172. n. 1. 2. 1. Diameter vasis cylindrici ABDE, uni mensuræ qua ad fluida mensuranda utimur æqualis, AB jungatur lineæ indefinitæ A 7 ad angulos rectos (§. 249).

2. Ex A transferatur in 1 recta A1 rectæ AB æqualis; erit B1 diameter vasis, quod duas mensuras capit, sed eandem cum vase priori altitudinem habet.

3. Fiat A2 = B1, erit B2 diameter vasis tres mensuras capientis, sed ejusdem denuo altitudinis cum vase, quod nonnisi unam capit. Eodem modo inveniuntur diametri vasorum capaciorum A3, A4, A5, A6, A7 &c.

4. In unum virgulæ latus transferantur divisiones inventæ A1, A2, A3, A4 &c. in alterum vero altitudo cylindri uni mensuræ æqualis, quoties fieri potest. Ita virgula constructa est.

Aliter.

Diametri A2, A3, A4, A5, A6, A7, &c. etiam per calculum inveniri in numeris & in particulis diametri AB per modum Scalæ geometricæ divisæ (§. 277) centesimis aut millesimis determinari possunt. Sit nempe diameter AB=1000; erit ejus quadratum 1000000. Ex hujus duplo extracta radix quadrata (§. 269 *Arithm.*) erit A2. Si ex triplo, quadruplo, quintuplo &c. radix extrahatur; prodibunt diametri A3, A4, A5 &c. quem in usum constructa est Tabula sequens: Tab. X. Fig. 172.

Mens.	Diam.	Mens.	Diam.	Mens.	Diam.
1	1.000	17	4.123	33	5.744
2	1.414	18	4.242	34	5.831
3	1.732	19	4.359	35	5.916
4	2.000	20	4.472	36	6.000
5	2.236	21	4.582	37	6.082
6	2.449	22	4.690	38	6.164
7	2.645	23	4.796	39	6.244
8	2.828	24	4.898	40	6.324
9	3.000	25	5.000	41	6.403
10	3.162	26	5.099	42	6.480
11	3.316	27	5.196	43	6.557
12	3.464	28	5.291	44	6.633
13	3.605	29	5.385	45	6.708
14	3.741	30	5.477	46	6.782
15	3.873	31	5.567	47	6.855
16	4.000	32	5.657	48	6.928

DE-

DEMONSTRATIO.

Tab. X. Fig. 172. Cylindri eandem altitudinem habentes sunt inter se ut quadrata diametrorum (§. 574). Ergo quadratum diametri vasis duas, tres, quatuor &c. mensuras capientis est duplum, triplum, quadruplum &c. quadrati diametri vasis mensuram nonnisi unam capientis. Quare si inde radices extrahantur, habebuntur in resolutione altera diametri ipsae (§. 246 *Arithm.*). Quoniam vero in prima AB=A1, erit ipsius B1 quadratum duplum, quadratum ipsius B2 triplum, quadratum ipsius B3 quadruplum &c. quadrati ipsius A1 (§. 417). Unde denuo patet esse rectas A2, A3, A4 &c. diametros vasorum quaesitas. Quodsi itaque has divisiones ad diametrum vasis cylindrici applices; illico constabit, quot mensuras capiat vas cylindricum eandem cum isto basin, sed altitudinem illius habens, quod unam mensuram capit. Quare si porro, ope alterius divisionis in virgula factae, investiges quoties altitudo unius mensurae in altitudine vasis dati continetur, & per hunc numerum diametrum modo inventam multiplices; prodibit numerus mensurarum cavitatem vasis dati adimplentium. *Q. e. d.*

SCHOLION I.

583. *Ex. gr. Sit diameter vasis cylindrici 8, altitudo 12; erit numerus mensurarum, quas capit 96.*

SCHOLION II.

584. *Altitudo cylindri mensuram unam capientis quo minor assumitur, eo diameter basis fit major. Unde tam ipsa, quam diametri cylindrorum plures mensuras capientium postea facilius in suas minutias subdividuntur.* BAYERUS (a) *suadet, ut altitudo nonnisi unius digiti assumatur.*

SCHOLION III.

585. *Inveniuntur autem diametri vasorum unam vel plures partes decimas mensurae capientium, si decima vel plures decimae partes vasis unam mensuram capientis, dividantur per hujus altitudinem, ut habeatur basis cylindri circularis (§. 541): etenim hac data diameter habetur per Probl. 58 (§. 434). Eodem modo inveniuntur diametri pro scrupulis vasorum duas & plures mensuras capientium.*

SCHOLION IV.

586. *Quodsi altitudo vasis constanter eadem retineatur, diametri pro mensuris integris earumque partibus decimalibus hac ratione inveniuntur. Sit ex. gr. diameter unius mensurae 1 seu 1000 partium decimalium; erit ejus quadratum 1000000: cujus pars decima 100000. Inde extracta radix quadrata 316 continet partes decimales diametri unius mensurae, quae conveniunt diametro cylindri decimam mensurae partem continentis, ejusdem tamen cum cylindro integram mensuram capiente altitudinis. Si ex duplo hujus decimae, nempe 200000, radix extrahatur; prodit diameter basis duas decimas unius mensurae capientis 447, & ita porro. Quodsi quadrato diametri unius mensurae 1000000 adjicias partem decimam 100000 & ex summa extrahas radicem quadratam 1.049; erit ea diameter vasis, quae capit $1\frac{1}{10}$ mensurae. Ratio patet per Demonstrationem Problematis praesentis. Atque sic patet, quomodo Virgula pithometrica accuratius construi possit, ut intervalla inter mensuras integras subdividantur in partes decimales.*

(a) *In der vollkommenen Visier-Kunst*, c. 25. p. 126.

Diametri pro menſuris integris & earum partibus decimalibus.							
		3.0	1.732	6.0	2.449	9.0	3.000
0.1	316	1	1.761	1	2.469	1	3.016
2	447	2	1.788	2	2.489	2	3.033
3	548	3	1.816	3	2.509	3	3.049
4	632	4	1.844	4	2.529	4	3.066
5	707	5	1.871	5	2.549	5	3.082
6	775	6	1.897	6	2.569	6	3.098
7	837	7	1.923	7	2.588	7	3.114
8	894	8	1.949	8	2.607	8	3.130
9	949	9	1.975	9	2.626	9	3.146
1.0	1.000	4.0	2.000	7.0	2.645	10.0	3.162
1	1.049	1	2.025	1	2.664	1	3.178
2	1.095	2	2.049	2	2.683	2	3.194
3	1.140	3	2.073	3	2.702	3	3.210
4	1.183	4	2.097	4	2.720	4	3.226
5	1.225	5	2.121	5	2.738	5	3.241
6	1.265	6	2.145	6	2.756	6	3.256
7	1.304	7	2.168	7	2.774	7	3.271
8	1.342	8	2.191	8	2.792	8	3.286
9	1.378	9	2.214	9	2.810	9	3.301
2.0	1.414	5.0	2.236	8.0	2.828	11.0	3.316
1	1.449	1	2.258	1	2.846	1	3.331
2	1.483	2	2.280	2	2.864	2	3.346
3	1.517	3	2.302	3	2.881	3	3.361
4	1.549	4	2.324	4	2.898	4	3.371
5	1.581	5	2.345	5	2.915	5	3.391
6	1.612	6	2.366	6	2.932	6	3.406
7	1.643	7	2.387	7	2.949	7	3.421
8	1.673	8	2.408	8	2.966	8	3.436
9	1.703	9	2.429	9	2.983	9	3.451

SCHOLION V.

587. *Ceterum me non monente patet, cylindrorum menſuram hic conſtitui cylindrum, quemadmodum ſupra ſolidorum omnium menſura aſſumtus eſt cubus. Unde & Virgula pithometrica ſic conſtructa* Virga cylindrica *appellatur. Similiter hic circulorum menſura conſtituitur circulus, ſicuti ſupra omnium ſuperficierum menſura quadratum.*

PROBLEMA XXVIII.

588. *Invenire ſoliditatem Dolii, hoc eſt, determinare numerum menſurarum, quas capit.*

RESOLUTIO.

1. Virga pithometrica vi Probl. præc. (§. 582) decenter applicata, exploretur tam longitudo Dolii AC, quam utraque diameter GH & AB. Tab. X. Fig. 173.
2. Cum, experientia non invita, rigore licet geometrico repugnante, Dolium pro cylindro habeatur, cujus baſis inter fundum & ventrem Dolii media æquidifferens; inter AB & GH quæratur numerus medius æquidifferens (§. 330 *Arithm.*), qui *Diameter æquata* dici ſolet.
3. Numerus inventus multiplicetur per longitudinem Dolii AC, erit factum, *vi demonſtrationis Problem. præced.* (§. 582) numerus menſurarum, quas capit Dolium.

Sit ex. gr. $AB = 8$ | $AC = 15$
$GH = 12$ | $\frac{1}{2}(AB + GH) = 10$

erit $AB + GH = 20$ | capac. dolii 150 menſ.

$\frac{1}{2}(AB + GH) = 10.$

SCHOLION I.

589. *Quodſi contingat, fundum non eſſe perfecte circularem, ſed unam diametrum eſſe altera longiorem; utramque diametrum metiri & earum ſemiſummam pro diametro circuli fundo Dolii æqualis aſſumere ſolent.*

SCHOLION II.

590. *Tabulæ, ex quibus inter ſe coaſſatis Dolia conſtrui ſolent, ultra fundum prominent. Pro longitudine igitur Dolii non aſſumenda eſt recta FE, ſed AC, quæ habetur, ſi quantitas prominentiæ tabularum, una*

Tab. X. Fig. 173. *una cum ejus dimidio cui fundi crassities æqualis supponitur, a recta FE utrinque subtrahitur. Solent autem quantitates subtrahendas creta notare utrinque in ipsa superficie Dolii, ex. gr. in K, si quantitas subtrahenda fuerit IK. Eum in finem peculiarem Virgulam parant, in partes minutas æquales divisam.*

SCHOLION III.

591. *Alios decepturi ex tabulis in medio gracilibus, circa extrema crassis & orbibus ligneis pariter crassis Dolium construunt: quæ fraus non facile detegitur.*

SCHOLION IV.

592. *Possemus equidem soliditatem cavitatis Dolii eodem modo explorare, quo supra corpora cava metiri docuimus* (§. 563): *si enim per soliditatem unius mensuræ divideretur, prodiret Dolii capacitas. Enimvero prolixitas calculi obstat, quo minus ea methodo utantur.*

SCHOLION V.

593. *Prostat etiam methodus, qua sine ullo calculo capacitas Dolii invenitur. Utuntur ea in* Batavia *&* variis Germaniæ *locis. Sed cum supponat, omnia Dolia esse inter se similia & longitudinem duplam diametri æquatæ, hoc est, semisummæ diametrorum AB & GH; non tuto ubique adhibetur.* KEPLERUS (*a*) *illam omnibus reliquis præfert, quia omnes cautelas mensorum in se continet.* Virga enim, *inquit*, introrsum immissa eliminat crassitiem tabularum, circulorum qui vincula sunt, viminumque quibus circuli lignei stringuntur. Eliminat excessum marginum, quorum in crenis hærent orbes. Hoc autem ratio alia mensurandi una eademqne opera præstare nulla potest. *Unde ad privatorum securitatem fraudesque eliminandas suadet*, ut lex illa Dolii construendi, quæ tertia parte longitudinis tabularum jubet describere circulum orbium ligneorum, magistratuum autoritate diligentiaque conservetur, pœnisque & proscriptione vasorum, quæ hanc figuram non habent, vindicetur. *Ea nimirum proportio in Doliis* Austriacis *observatur.*

(*a*) In *Stereometria doliorum vinariorum*, Part. 3. art. 3. f. n. 3.

SCHOLION VI.

594. *Sunt, qui assumunt, Dolium ex duobus conis truncatis componi, & ejus soliditatem per Probl. 20 (§. 549) quærunt. Alii cum aliis corporibus geometricis id comparant.* CLAVIUS (*b*) *alia pro duobus conis truncatis, alia pro frusto sphæroidis* Archimedeæ *habet, quoad prius consentiente, quoad posterius vero contradicente* KEPLERO (*c*). CLAVIO *tamen assentitur* OUGHTREDUS, *cumque in finem regulam a se inventam proposuit* (*d*). WALLISIUS *pro frusto fusi parabolici habet* (*e*). *Enimvero cum methodus proposita praxi satis respondeat, reliquæ vero quæ ab* Anglis *potissimum proponuntur* (*f*), *utut ex profundiori Geometria derivatæ, molestiores sint, nec ex Elementis Geometriæ demonstrari possint; illa contenti esse possumus. Pauca attamen adhuc dicemus de Virgæ mensoriæ a* KEPLERO *tantopere deprædicatæ fabrica.*

PROBLEMA XXIX.

595. *Construere Virgulam pithometricam, qua sine calculo capacitatem Dolii explorare licet.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Cum vasa pro quibus Virga hæc paratur, esse debeant cylindri, quorum altitudo DC æqualis diametro AB, si fiat ut 785 ad 1000 ita soliditas unius mensuræ ad numerum quartum proportionalem, per Probl. 33 (§. 302 *Arithm.*) inveniendum; reperietur cubus diametri cylindri unam mensuram capientis (§. 581). Tab. X. Fig. 172. n. 1.

2. In-

(*b*) *Geom. pract.* lib. 5. c. 10. Tom. II. Oper. f. 145.

(*c*) In *Stereometria* part. 2. fol. H. 3.

(*d*) In *Clave mathematica* c. 19. p. m. 103.

(*e*) In *Algebra* c. 81. Vol. II. Oper. f. 350.

(*f*) Vid. *The general Gauger* by Mr. DOUGHARTY p. 141 & seqq.

Tab. X. Fig. 172. n. 1.

2. Inde ergo si extrahitur radix cubica (§. 282 *Arithm.*); prodibit diameter vasis cylindrici mensuram unam capientis.

3. Jam cum vas illud habeat altitudinem AE vel CD diametro AB æqualem, & diagonalis BE assumatur pro indice capacitatis, *per hypoth.* si ex duplo quadrati diametri modo inventæ AB extrahatur radix (§. 269 *Arith.*); prodibit index vasis BE mensuram unam capientis (§. 417).

4. Ut porro inveniantur diagonales similium vasorum, quæ capiunt mensuras duas, tres, quatuor &c. tenendum est, ea esse ut cubos diametrorum (§. 578), consequenter etiam, ob similitudinem triangulorum, quale ABE (§. 183), ut cubos diagonalium (§. *cit.* & §. 260 *Arithm.*). Quare si diagonalis vasis unam mensuram capientis concipiatur in 1000 partes divisa, & ex cubi 1000000000 duplo 2000000000, triplo 3000000000, quadruplo 4000000000, &c. extrahantur radices cubicæ (§. 282 *Arithm.*); prodibunt diagonales vasorum, quæ duas, tres, quatuor, &c. mensuras capiunt.

5. Denique longitudo diagonalis primæ transferatur in Virgulam, & una dividatur in 1000 partes æquales (§. 277): ita enim ex parata hac Scala particulas millesimas diagonalibus reliquis competentes in Virgulam transferre licet.

Quoniam itaque Dolium in præsente casu habetur pro cylindro gemino, cujus altitudo æqualis est semisummæ diametrorum orbis AB & ventris GH, estque $FB = \frac{1}{2}(AB+GH)$, adeoque GB diagonalis in cylindro, cujus diameter semisumma diametrorum AB & GH; capacitas ejus statim innotescit, si per orificium G virgula usque ad B detrudatur. *Q. e. i. & d.* Tab. X. Fig. 173.

S C H O L I O N I.

596. *Constructioni Virgulæ itaque inservit Tabula sequens.*

Mens.	Diag.	Mens.	Diag	Mens.	Diag.	Mens.	Diag.
1	1000	16	2519	31	3141	46	3583
2	1259	17	2571	32	3174	47	3608
3	1442	18	2620	33	3207	48	3634
4	1587	19	2668	34	3239	49	3659
5	1709	20	2714	35	3271	50	3683
6	1817	21	2758	36	3301	51	3708
7	1912	22	2802	37	3332	52	3732
8	2000	23	2843	38	3361	53	3756
9	2080	24	2884	39	3391	54	3779
10	2154	25	2924	40	3419	55	3802
11	2223	26	2962	41	3448	56	3825
12	2289	27	3000	42	3476	57	3848
13	2351	28	3036	43	3503	58	3870
14	2410	29	3072	44	3530	59	3892
15	2466	30	3107	45	3556	60	3914

S C H O L I O N II.

597. Virgula *hæc* cubica *appellari solet, quemadmodum præcedens* cylindrica. *Et facile ad alia Dolia similia construitur, in quibus longitudo dimidiæ GF fuerit ad diametrum æquatam FB in quacunque ratione, modo in cylindro unam mensuram capiente altitudo AE ad diametrum AB in eadem fuerit.*

PRO-

PROBLEMA XXX.

598. *Virgam pithometricam construere ad determinandam quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Assumatur Dolium aqua plenum, cujus capacitas jam cognita, & numerus mensurarum ex. gr. per 20 aut numerum alium minorem vel majorem dividatur, prout Dolii capacitatem in partes majores vel minores dividi commodum visum fuerit.
2. Tab. IV. *Fig.* 81. Dolio beneficio libellæ Q ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, Virga per orificium ventris intrudatur, donec fundum Dolii attingat.
3. Ea quantitate fluidi ex Dolio emissa, quæ numero mensurarum per divisionem paulo ante n. 1. invento respondet, in Virgula notetur decrementum altitudinis in fluido, quod exprimit totius capacitatis partem vigesimam.
4. Eodem modo notabis decrementum altitudinis, reliquis particulis vigesimis quantitatis fluidi in Dolio contenti respondens.
5. Horum decrementorum intervallis in una Virgulæ facie notatis; altera dividitur in partes quotcunque minutas inter se æquales, ultra vigesimarum intervalla inæqualia continuandas, ex. gr. in 200 aut plures.

Ita Virga pro Dolio non pleno metiendo constructa est.

SCHOLION.

599. *Quodsi in usum domesticum pro eodem Dolio istiusmodi Virgulam parare volueris, sufficit decrementorum intervalla in una ejus facie notari, nec opus est faciei alterius in partes æquales divisione. Decrementa quoque altitudinis fluidi notantur numeris, qui quantitati ex Dolio emissæ respondent. ex. gr. si integrum Dolium capiat 64 mensuras & una effluxerit, in fine decrementi altitudinis scribitur 63.*

PROBLEMA XXXI.

600. *Determinare quantitatem fluidi in Dolio non pleno.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur capacitas totius Dolii *per Probl.* 28 (§. 588). Tab. X. *Fig.* 173.
2. Dolio libellæ beneficio ita collocato, ut axis ejus sit horizonti parallelus, ne scilicet fluidum in una Dolii parte altius sit, quam in altera, Virga per Problema præcedens (§. 598) parata per orificium Dolii G intrudatur, donec fundum in H attingat.
3. Ea rursus extracta, notetur quot partes in facie æqualium vino madidæ sint.
4. Hinc inferatur: ut numerus partium æqualium in altera Virgulæ facie profunditati totius Dolii GH respondentium ad numerum similium partium altitudini fluidi LH convenientium, ita numerus earundem partium, quæ intervallo scrupulorum vigesimorum congruunt, ad numerum quartum proportionalem *per Probl.* 33 *Arithm.* (§. 302) inveniendum.

Tab. X. Fig. 173.

5. Capiatur circino intervallum tot partium æqualium in Virga, quot numerus inventus exprimit, & transferatur in Scalam ſcrupulorum vigeſimorum, noteturque eorum numerus, quæ ipſi congruunt.

6. Per hunc dividatur numerus menſurarum, quas Dolium integrum capit: quotus erit numerus menſurarum, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt. *Q. e. i.*

Ex. gr. ſit GH 160, HL 58, numerus partium æqualium, quæ integro ſcrupulorum vigeſimorum intervallo congruunt, 120, capacitas denique Dolii 128 menſurarum.

Fiat : 160 — 58 — 120 ⁎2
40) 4 3 ——— 3 ⁎7⁎ ($43\frac{1}{4}$
174 ⁎⁎

Ponamus partibus $43\frac{1}{2}$ æqualibus reſpondere in Scala inæqualium $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$. Quodſi itaque 128 per 5 dividas, quotus $25\frac{3}{5}$ numerum menſurarum indicabit, quas fluidum in Dolio contentum replere poteſt.

SCHOLION.

601. *Si Dolia omnia eſſent ſimilia per methodum propoſitam ſatis accurate inveniretur quantitas fluidi in Dolio non pleno: ſed in diſſimilibus eadem exacte reperiri hac ratione nequit. Nondum autem inventa eſt methodus, & rigori geometrico ſatisfaciens & praxi reſpondens. Quam enim* KEPLERUS *dedit* (a), *ea nec demonſtrativa, nec praxi adaptata. Unde neque ipſi ſatisfacit. Et quamvis aliam poſtea eidem ſubſtituerit* (b): *ſatis tamen intricata eſt. Intricatiores adhuc ſunt, quas* BAYERUS (c) *&* DOUGHARTY (d) *tradunt.*

(a) In *Stereometria Doliorum*. f. O. 2. b.
(b) *In dem Auszuge der uhralten Meſſe-Kunſt* ARCHIMEDIS §. 88. f. 95.
(c) In *Conometria Mauritiana* c. 9. p. 102. & ſeqq.
(d) *The General Gauger* p. 164. & ſeqq.

Finis Elementorum Geometriæ.

ELEMENTA

Fig: 2. Fig: 3. Fig: 4.

Fig: 7. Fig: 8. Fig: 10.

Fig: 13. Fig: 14. Fig: 15.

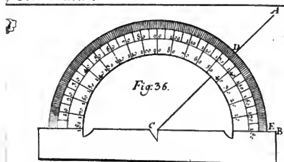
Fig: 18. Fig: 19. Fig: 20.

Fig: 22. Fig: 24.

Fig: 26. Fig: 27. Fig: 29.

Fig: 30.

Fig: 32. Fig: 33.


A
D
Fig: 36.
C
E
B

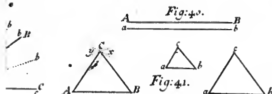


Fig: 40.
A
B
a
b
Fig: 41.
A
B
a
b

Fig: 45.
L
G
C
A
D
E
B
F

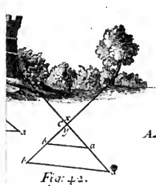


Fig: 42.

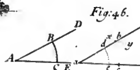


Fig: 46.
D
B
A
C
E

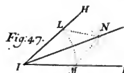


Fig: 47.
H
L
N
I
M
K

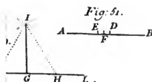


Fig: 51.
A
E
D
F
B
I
G
H
L

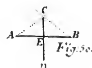
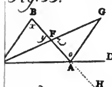
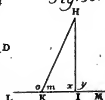
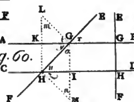
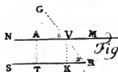

C
A
B
E
Fig. 50.
D

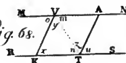
Fig. Geom. Tab. III.

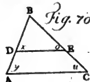


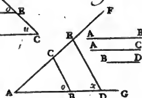


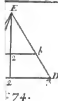


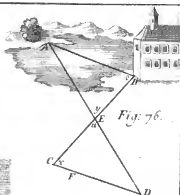


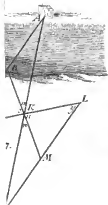


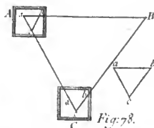


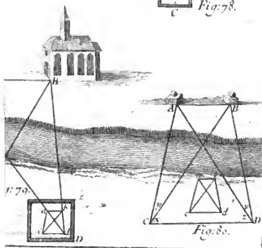


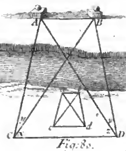

E
b
2
2
3
D
74.


A
B
y
E
a
C
F
D
Fig: 76.


A
K
L
M


A
B
a
b
c
C
Fig: 78.


H
D
g: 79.


A
B
C
D
c
d
Fig: 80.

ig: Geom: Tab: V.

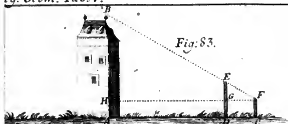


Fig: 83.
B
E
F
G
H
A
D
C

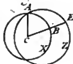


Fig: 86.
A
E
B
c
X
Z

Fig: 87.
A
D
F
G
B
C
E

Fig: 88.
N
A
B
E

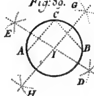


Fig: 89.
G
C
E
A
B
I
D
H

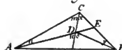


Fig: 90.
C
E
D
A
B

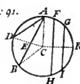


Fig: 91.
A
F
G
D
E
C
K
B
H
I

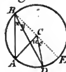


Fig: 94.
B
C
A
D
E

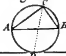
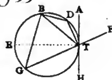
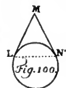


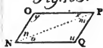
Fig: 95.
C
A
B
D

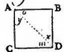
Fig: 96.
I
H
K
C
D
L
F

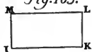
Fig. Geom. Tab. VI

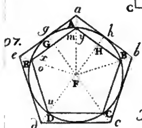


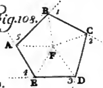


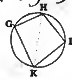


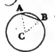


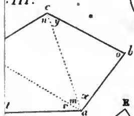


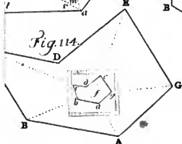


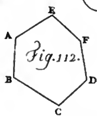


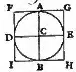


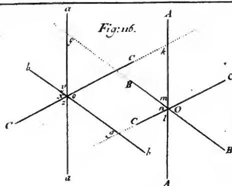




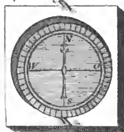


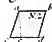


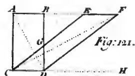


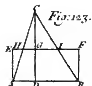


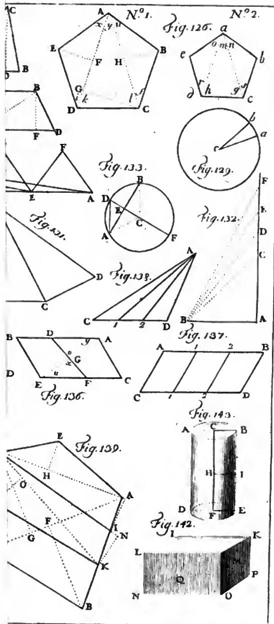
Pyxis magnetica.











N.° 1.
N.° 2.
Fig. 126.
Fig. 129.
Fig. 133.
Fig. 132.
Fig. 131.
Fig. 138.
Fig. 137.
Fig. 136.
Fig. 143.
Fig. 139.
Fig. 142.

Fig. Geom. Tab. IX.

Fig. 146.

Fig. 147.

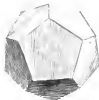


Fig. 150.

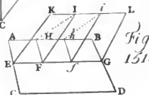


Fig. 151.

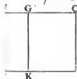


Fig. 152.

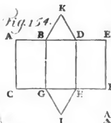


Fig. 154.

Fig. 155.

Fig. 157.

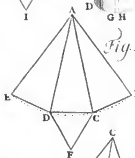


Fig. 158.

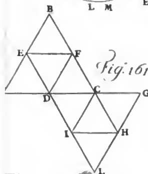


Fig. 161.

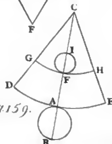


Fig. 159.

Fig. Geom. Tab. X

Fig. 164.

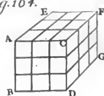
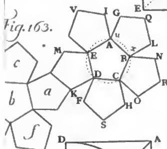


Fig. 165.

Fig. 163.



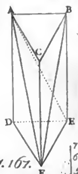


Fig. 167.

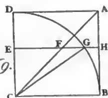
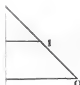


Fig. 169.



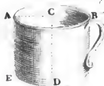


Fig. 172.

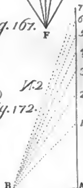
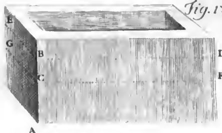
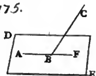


Fig. 170.




ig.175.
C
D
A
B
F
E

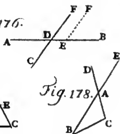


Fig. 176.
F
F
D
B
A
E
C

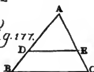


Fig. 177.
A
D
E
B
C

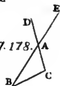
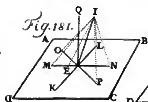
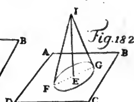
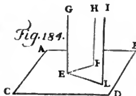


Fig. 178.
E
D
A
C
B

.180.
C
H
F
D


Q
I
Fig. 181.
A
B
O
L
M
E
N
K
P
C


I
Fig. 182.
A
B
G
E
F
D
C


G
H
I
Fig. 184.
A
B
F
E
L
C
D

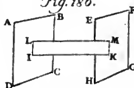
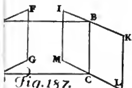
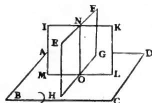
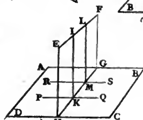
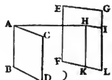


Fig. 186.
A
B
E
F
L
M
I
K
C
G
H
D


F
I
B
K
G
M
C
L
Fig. 187.


F
N
I
K
E
A
G
D
M
O
L
B
H
C
Fig. 191.


F
L
I
E
G
A
B
R
S
M
P
K
Q
D
H
C
Fig. 190.

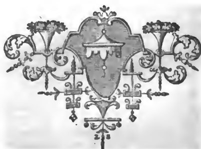

E
G
A
H
I
C
F
B
K
L
D
Fig. 188.

ELEMENTA
TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

PRÆFATIO.

OMENTI perquam exigui tyronibus videtur Trigonometria, utilitatis prorſus nullius. Enimvero rerum mathematicarum periti ore unanimi confitentur, quod, ſublata Trigonometria, maxima eorum pars pereat, quæ in Matheſi admiramur. Certe Stellarum magnitudinem, diſtantiam a Terra, motum, Eclipſium tam ſolarium quam lunarium computum, magnitudinem Globi terraquei, & innumera alia prorſus ignoraremus, ſi nobiliſſimæ hujus ſcientiæ auxilio deſtitueremur. Trigonometria igitur pro arte haberi debet, qua maxime abſcondita & a cognitione hominum remota in apricum producuntur. Eam qui neſcit, non magnos in Matheſi mixta ſentiet progreſſus: ſæpius ipſi in Philoſophia naturali hærebit aqua, ex. gr. Iridis phænomena ad rationes ſuas revocaturo aliaque meteora emphatica explicaturo. Studium igitur Trigonometriæ addiſcendæ afferatur indefeſſum, nec impatiens ſit mora, donec in partibus Matheſeos ſubſequentibus ineffabilis ejuſdem

uſus ex his ipſis etiam Elementis pateſcat. Fides oculata impediet, quo minus in poſterum judicia de rerum uſu (quod vulgo plerumque fieri ſolet) præcipitemus. Paucis Problematibus comprehendi, quæ alias per caſus plures diſtribuuntur: In Elementis enim præter neceſſitatem multiplicanda non ſunt, quæ ſpinoſa videntur tyronibus; nec culpatur brevitas, quæ perſpicuitati non officit, memoriæ levamen certiſſimum exiſtit. Cumque Trigonometria etiam in Geometria practica uſum habeat, quam cum Theoretica conjungi conſultum duximus; ideo hunc uſum ſub finem annectere placuit.



ELEMENTA

ELEMENTA TRIGONOMETRIÆ PLANÆ.

CAPUT PRIMUM.

De Constructione Canonis Sinuum, Tangentium, atque Secantium, tam naturalium, quam artificialium.

DEFINITIO I.

Tab. I. Fig. 1. 1. *Trigonometria plana* est Scientia ex tribus trianguli rectilinei partibus inveniendi reliquas.

Ex. gr. Ex duobus lateribus AB & AC atque angulo B inveniuntur anguli reliqui A & C cum latere tertio BC.

DEFINITIO II.

Tab. I. Fig. 2. 2. *Sinus rectus* AD arcus AE vel AI est chordæ AB arcus dupli AEB vel AIB dimidium. *Sinus totus* est radius HC, seu sinus quadrantis HE. *Sinus versus* est pars radii ED inter sinum rectum AD & arcum AE intercepta.

COROLLARIUM I.

3. Sinus ergo AD ad radium EC perpendicularis (§. 291 *Geom.*): consequenter sinus omnes eidem radio insistentes inter se paralleli (§. 256 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

4. Quoniam arcus AE est mensura anguli ACE, & AI ejus contigui ACI (§. 57 *Geom.*); quadrans vero HE mensura anguli recti (§. 143 *Geom.*): AD etiam sinus rectus & ED sinus versus est angulorum ACE & ACI; sinus vero totus est sinus anguli recti. Tab. I. Fig. 2.

COROLLARIUM III.

5. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eundem habent sinum.

COROLLARIUM IV.

6. Angulorum adeo obtusorum sinus iidem sunt, quos habent eorum complementa ad duos rectos (§. 147 *Geom.*).

DEFINITIO III.

7. *Tangens* arcus EA est portio rectæ tangentis circulum FF inter rectas ex centro C per extrema arcus E & A ductas interceptæ. Recta FC dicitur *Secans* ejusdem arcus.

COROLLARIUM I.

8. Tangens EF ad radium EC perpendicularis est (§. 308 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

9. Est etiam FE tangens, & FC secans anguli ACE, itemque ACI (§. 57 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

10. Duo igitur anguli, qui sunt deinceps, eandem habent tangentem atque secantem.

DEFINITIO IV.

Tab. I. Fig. 2. 11. *Cosinus* est sinus, *Cotangens* tangens, *Cosecans* secans arcus AH, qui est alterius AE complementum ad quadrantem. Ita ex. gr. AG sinus arcus AH dicitur cosinus arcus AE. Vocantur etiam *Sinus*, *Tangentes*, atque *Secantes complementi*.

THEOREMA I.

12. *Sinus arcuum similium ad radios suos eandem rationem habent.*

DEMONSTRATIO.

Chordæ enim arcuum similium ad radios eandem rationem habent (§. 290 *Geom.*). Sed sinus sunt chordarum dimidia (§. 2). Ergo & hi ad radios rationem eandem habent (§. 181 *Arithm.*). *Q. e. d.*

HYPOTHESIS.

13. *Sumatur radius pro unitate; & per ejus fractiones decimales determinetur quantitas sinuum, tangentium, atque secantium.*

SCHOLION.

14. *Ex* PTOLEMÆI Almagesto *discimus, Veteres radium in 60 partes, quas gradus vocabant, divisisse, & inde chordas per minuta prima, secunda, tertia &c. hoc est, fractiones radii sexagesimales determinasse, quibus in analysi triangulorum utebantur. Dimidiis chordis seu sinibus primum usi sunt, quantum constat,* Saraceni. Johannes REGIOMONTANUS *primum radio cum Veteribus tribuit 60 gradus, & sinus singulorum graduum per ejus fractiones decimales determinavit. Enimvero postea animadvertit, commodius fore, si radius sumatur pro unitate, ac ideo hypothesin præsentem in Trigonometriam introduxit. In Tabulis sinuum & tangentium ordinariis radius concipitur in 10000000 partes divisus, & ultra has fractiones in determinanda sinuum & tangentium quantitate non descenditur. Qui tamen Tabulas istas construxerunt, ad fractiones multo minores descenderunt, ne error irreperet in scrupulis primis assignabilis. Secantibus hodie opus non habemus, cum omnia Trigonometriæ Problemata absque illarum ope solvi possint.*

COROLLARIUM.

15. Cum latus Hexagoni regularis sextam circuli partem subtendat (§. 104, 342 *Geom.*) atque radio æquale sit (§. 356 *Geom.*); sinus graduum triginta est 5000000 (§. 2 *Trigon.* & §. 41 *Geom.*).

PROBLEMA I.

16. *Dato sinu* AD; *invenire cosinum* AG. Tab. I. Fig. 2.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam EC sinus ipsius EH (§. 2) ad HC, & AG sinus arcus AH (§. 2) perpendicularis ad eandem HC (§. 3); erit AG parallela ipsi DC (§. 256 *Geom.*) & ad G angulus rectus (§. 78 *Geom.*), adeoque △ AGC rectangulum (§. 91 *Geom.*). Quare cum AD & HC sint ad EC perpendiculares (§. 3); erit GC = AD (§. 226 *Geom.*). Si ergo

1. Ex quadrato radii AC subtrahatur quadratum sinus AD vel GC; relinquetur quadratum cosinus AG (§. 417 *Geom.*). Unde si
2. Radix quadrata extrahatur (§. 269 *Arithm.*); prodibit cosinus AG.

Ex. gr. Sit AC 10000000, AD 5000000: reperitur AG 8660254, sinus 60°.

PRO-

PROBLEMA II.

Tab.I. Fig.2. 17. *Dato sinu* AD *arcus* AE; *invenire sinum arcus dimidii* $\frac{1}{2}$ AE.

RESOLUTIO.

Inveniatur chorda arcus AE (§.423 *Geom.*). Hujus enim dimidium est ejus sinus (§. 2).

Ex. gr. Sint AC & AD ut in Probl. præc. reperietur sinus arcus $\frac{1}{2}$ AE, seu sinus $15° = 2588190$.

PROBLEMA III.

Tab.I. Fig.3. 18. *Dato sinu* DG *arcus* DF; *invenire sinum* DE *arcus dupli* DB.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Cum anguli ad E & G recti sint (§. 3) & angulus B utrique triangulo BCG & BDE communis; erit BG : CG = BD : DE (§. 267 *Geom.*). Quare cum CG inveniri possit, dato sinu DG (§. 16), & BD sit duplum ipsius DG (§. 2): invenietur quoque DE (§.302 *Arithm.*). *Q. e. f. & d.*

PROBLEMA IV.

Tab.I. Fig.4. 19. *Datis sinibus* FG & DE *arcuum* FA & DA, *quorum differentia* DF 45′ *major non est*; *invenire sinum quemcunque intermedium* IL.

RESOLUTIO.

1. Quæratur ad differentiam FD arcuum quorum sinus dantur, differentiam IF arcus AI cujus sinus quæritur atque arcus AF sinui dato minori respondentis, & differentiam sinuum datorum DH quartus numerus proportionalis (§.302 *Arithm.*).
2. Is addatur sinui dato minori FG. Erit aggregatum sinus quæsitus IL.

DEMONSTRATIO.

Cum arcus DF & FI paucorum sint minutorum, *per hypoth.* pro lineis rectis citra errorem sensibilem haberi poterunt. Porro FG, IL & DE parallelæ sunt (§. 3). Quare si ex F ad DE perpendicularis demittatur FH (§. 216 *Geom.*); erit HE=FG (§.226 *Geom.*); adeoque DH differentia sinuum datorum FG & DE (§ 64 *Arithm.*) Unde ob parallelas IK & DH, *per demonstrata*; FD : FI = DH : IK (§. 268 *Geom.*). *Q. e. d.* Tab.I. Fig.4.

PROBLEMA V.

20. *Datis sinibus* BD & FE *duorum arcuum quorumcunque* AB & AF; *invenire sinum arcus semidifferentiæ eorundem* $\frac{1}{2}$ BF. Tab I. Fig.5.

RESOLUTIO.

1. Sinus minor BD subtrahatur a majore FE, relinquetur differentia FK.
2. Ex datis sinibus BD & FE inveniantur cosinus BI & FH (§. 16).
3. Cosinus minor FH subtrahatur e majore BI, erit BK differentia.
4. Ex summa quadratorum differentiarum BK & IK extrahatur radix quadrata (§. 269 *Arithm.*); prodibit chorda arcus differentiæ BF, cujus dimidium est sinus quæsitus (§. 2). *Q. e. i.*

DEMONSTRATIO.

BD, FE & GC, tum AC, BI & FH inter se parallelæ, & illæ ad AC, hæ ad GC perpendiculares (§. 3), consequenter FH=KI & BD = EK (§. 226 *Geom.*) & angulus BKF rectus (§.230, 78 *Geom.*) Quamobrem FK differentia sinuum

Tab.I. Fig.5. sinuum BD & FE, BK vero differentia cosinuum FH & BI, atque FKB triangulum rectangulum (§.91 *Geom.*). Ergo cum sit $BF^2 = BK^2 + FK^2$ (§.417 *Geom.*); reperietur chorda BF, si ex summa quadratorum differentiæ sinuum FK & cosinuum BK radix quadrata extrahitur (§.246 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA VI.

21. *Invenire sinum 45 graduum.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Tab.I. Fig.2. Sit HI circuli quadrans; erit HCI angulus rectus (§.143 *Geom.*), adeoque △ cognomine rectangulum (§.91 *Geom.*), consequenter $HI^2 = HC^2 + CI^2$ (§.417 *Geom.*) $= 2\ HC^2$ (§.40, 374 *Geom.*). Quare cum HC sinus totus (§.2) sit 10000000 (§.14); si ex $2HC^2$ quadrato 200000000000000 extrahatur radix 14142136 (§.269 *Arithm.*); prodibit chorda HI (§.246 *Arithm.*), cujus dimidium 7071068 sinus 45° desideratus. *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

22. *Inferius in Analysi docebimus, quomodo ex dato radio latus Pentagoni regularis, hoc est, chorda 72° (§.342 Geom.), consequenter sinus 36° (§.2) inveniatur.*

PROBLEMA VII.

Tab.I. Fig.4. 23. *Dato sinu unius minuti seu 60″ FG; invenire sinum unius vel aliquot secundorum* MN.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AM & AF sunt admodum exigui, AMF pro linea recta haberi potest citra errorem in fractionibus radii decimalibus, quibus sinus exprimimus, assignabilem, hoc est, arcus AM & AF sinibus eorum proportionales assumere licet. Quare cum MN sit ipsi FG parallela (§.3) erit AF : FG = AM : MN (§.268 *Geom.*). Datis ergo AF, FG & AM *per hypoth.* invenitur MN (§.302 *Arithm.*). *Q. e. i. & d.* Tab.I. Fig.4.

SCHOLION.

24. *Eadem ratione, si opus foret, inveniri posset sinus aliquot scrupulorum tertiorum.*

PROBLEMA VIII.

25. *Datis sinibus* 30 (§.15), 15 (§.17), 45 (§.21) & 36 *graduum* (§.22); *Canonem omnium Sinuum construere, nonnisi unico minuto, aut denis secundis, immo unico secundo inter se differentibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex sinu 36 graduum inveniatur sinus 18°, 9°, 4° 30′, 2° 15′ (§.17); sinus 54°, 72°, 81°, 85° 30′, 87° 45′ (§.16): porro sinus 27°, 13° 30′, 6° 45′; 40° 30′, 20° 15′; 42° 45′ (§.17): inde sinus 63°, 76° 30′, 83° 15′, 49° 30′, 69° 45′, 47° 15′ (§.16): ulterius sinus 31° 30′, 15° 45′; 38° 15′; 24° 45′ (§.17): hinc sinus 58° 30′, 74° 15′, 51° 45′, 65° 15′, (§.16): denique sinus 29° 15′ (§.17) & ejus cosinus 60° 45′ (§.16).
2. Ex sinu 45° inveniantur sinus 22° 30′ & 11° 15′ (§.17), sinus 67° 30′ & 78° 45′ (§.16), sinus denique 33° 45′ (§.17) & 56° 15′ (§.16).
3. Ex sinu 30° & sinu 54° inveniatur sinus 12° (§.20).
4. Ex sinu 12° inveniantur sinus 6°, 3°, 1° 30′, 45′ (§.17), sinus 78°, 84°, 87°, 88° 30′, 89° 15′ (§.16): por-

porro ſinus 39°, 19° 30', 9° 45'; 42°, 21°, 10° 30', 5° 15'; 43° 30', 21° 45'; 44° 15' (§.17): ulterius ſinus 51°, 70° 30', 80° 15', 48°, 69°, 79° 30', 84° 45', 46° 30', 68° 15', 45° 45', (§.16): inde ſinus 25° 30', 12° 45; 35° 15'; 24°; 34° 30', 17° 15'; 39° 45'; 23° 15'(§.17): hinc ſinus 64° 30', 77° 15', 54° 45', 66°, 55° 30', 72° 45', 50° 15', 66° 45' (§.16): hinc porro ſinus 32° 15'; 33°, 16° 30', 8° 15'; 27° 45' (§ 17): inde ulterius ſinus 57° 45', 57°, 73° 30', 81° 45', 62° 15' (§.16): porro ſinus 28° 30', 14° 15'; 36° 45' (§. 17) & horum coſinus 61° 30', 75° 45', 53° 45' (§.16): denique ſinus 30° 45'(§.17) & ejus coſinus 59° 15' (§. 16).

5. Ex ſinu 15° inveniantur ſinus 7° 30' & 3° 45' (§. 17): hinc ſinus 75°, 82° 30', 86° 15' (§. 16): inde 37° 30', 18° 45', 41° 15' (§.17) & horum coſinus 52° 30', 71° 15', 48° 45' (§. 16): denique ſinus 26° 15'(§.17) & ejus coſinus 63° 45' (§. 16).

6. Quodſi ſinus hac ratione inventi in ordinem redigantur, numero 120, & differentiam inter duos immediate ſibi mutuo ſuccedentes 45' deprehendes: quemadmodum ex Tabula, quam eum in finem hic apponimus, primo intuitu apparet.

1	0°45'	21	15°45'	41	30°45'	61	45°45'	81	60°45'	101	75°45'
2	1·30	22	16·30	42	31·30	62	46·30	82	61·30	102	76·30
3	2·15	23	17·15	43	32·15	63	47·15	83	62·15	103	77·15
4	3· 0	24	18· 0	44	33· 0	64	48· 0	84	63· 0	104	78· 0
5	3·45	25	18·45	45	33·45	65	48·45	85	63·45	105	78·45
6	4·30	26	19·30	46	34·30	66	49·30	86	64·30	106	79·30
7	5·15	27	20·15	47	35·15	67	50·15	87	65·15	107	80 15
8	6· 0	28	21· 0	48	36· 0	68	51· 0	88	66· 0	108	81· 0
9	6·45	29	21·45	49	36·45	69	51·45	89	66·45	109	81·45
10	7·30	30	22·30	50	37·30	70	52·30	90	67·30	110	82·30
11	8·15	31	23·15	51	38·15	71	53·15	91	68·15	111	83·15
12	9· 0	32	24· 0	52	39· 0	72	54· 0	92	69· 0	112	84· 0
13	9·45	33	24·45	53	39·45	73	54·45	93	69·45	113	84·45
14	10·30	34	25·30	54	40·30	74	55·30	94	70·30	114	85·30
15	11·15	35	26·15	55	41·15	75	56 15	95	71·15	115	86·15
16	12· 0	36	27· 0	56	42· 0	76	57· 0	96	72· 0	116	87· 0
17	12·45	37	27·45	57	42·45	77	57·45	97	72·45	117	87·45
18	13·30	38	28·30	58	43·30	78	58·30	98	73·30	118	88·30
19	14·15	39	29·15	59	44·15	79	59·15	99	74·15	119	89·15
20	15· 0	40	30· 0	60	45· 0	80	60· 0	100	75· 0	120	90· 0

Inveniantur ergo sinus intermedii per Probl. 4. (§. 19).

7. Denique sinus scrupulorum secundorum ab 1 usque ad 60 inveniantur per Probl. præc. (§. 23).

Ita Canon sinuum erit constructus. *Q. e. f.*

PROBLEMA IX.

Tab. I. Fig. 2. 26. *Dato sinu* AD *arcus* AE, *invenire tangentem* EF *&* *secantem* FC *ejusdem arcus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

Quia sinus AD & tangens EF ad radium EC perpendicularis (§. 3, 8); erit ille huic parallelus (§. 256 *Geom.*). Quare ut cosinus DC ad sinum AD, ita sinus totus ad tangentem EF: item ut cosinus DC ad sinum totum AC, ita sinus totus EC ad secantem CF (§. 268 *Geom.*). Invenietur adeo per illationem primam tangens EF; per alteram secans FC (§. 302 *Arithm.*) *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

27. *Constructo igitur Canone sinuum* (§. 25), *haud difficilis est constructio Canonis tangentium atque secantium. Uterque junctim sumtus Canon triangulorum naturalis dici solet, quia triangulorum analysi inservit. Equidem passim apud Autores Theoremata non inelegantia occurrunt, quibus multi sinus facilius inveniuntur, quam exposita hactenus methodo.* URSINUS (*a*) *præsertim docet, quomodo ex sinu Canonis omnium primi, e. gr. unius secundi, per solam quasi additionem & subtractionem totus Canon derivetur. Enimvero cum ab aliis dudum constructus sit; sufficit utcunque ostendisse, quomodo construi potuerit.*

(*a*) *Trigon.* lib. 2. c. 5. p. 164.

PROBLEMA X.

28. *Invenire sinus cujuscunque dati logarithmum.*

RESOLUTIO.

Ut logarithmi eo accuratiores inveniantur, assumendi sunt sinus ad radium 10000000000 constructi. Mulctantur nempe sinus in Canone PITISCI majore 4 ultimis notis. Cum adeo sinus sint numeri 10 ut plurimum notis constantes, in canone autem logarithmorum qui prostat maximo, numeri naturales ultra 5 notas non ascendunt; logarithmi eorum inveniuntur *per Probl. 37 Arithm.* (§. 349). Utendum vero est Canone logarithmorum majore.

E. gr. Sit inveniendus logarithmus sinus 23°, qui apud PITISCUM 3907311284. Resectis versus sinistram quinque notis 39073, ipsis respondens logarithmus est 4.5918768, consequenter logarithmus numeri 3907300000 est 9.5918768. Differentia tabularis est 111. Quare infertur: ut 100000 ad 111 ita notæ residuæ sinus dati 11284 ad numerum quartum proportionalem 12? qui si addatur logarithmo 9.5918768, prodit logarithmus quæsitus 9.5918780, qualis in Canone triangulorum artificiali reperitur.

PROBLEMA XI.

29. *Invenire logarithmum tangentis, dato logarithmo sinus & cosinus.*

RESOLUTIO.

1. Logarithmus sinus addatur logarithmo sinus totius.
2. A summa subtrahatur logarithmus cosinus. Residuum est logarithmus tangentis (§. 26 *Trigon.* & §. 359 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Inveniri debet logarithmus tangentis 23°.

Addantur	Log. sin. 23° =	9.5918780
	Log. sin. tot. =	1 00000000
	a summa =	195918780
subtrahatur	Log. cos. =	99640261
relinquitur	Log. tang. =	96278519

PROBLEMA XII.

30. *Invenire logarithmum secantis arcus cujuscunque; dato sinu complementi ejusdem.*

1. Logarithmus sinus totius multiplicetur per 2.
2. Ab ejus duplo subtrahatur sinus complementi datus. Residuus fiet logarithmus secantis (§. 26 *Trigon.* & 359 *Arithm.*).

Ex. gr. Quærendus est logarithmus secantis arcum 23°. Calculi typus talis est:

Log. sin. tot. =	100000000
Ejus duplum =	200000000
Log. sin. compl. =	99640261
Log. secant. 23° =	10.0359739

SCHOLION.

31. Johannes NEPERUS, *qui primus logarithmos in Trigonometriam introduxit, sinus totius logarithmum facit* 0. *Hinc crescunt logarithmi sinuum, sinibus decrescentibus, & tangentium atque secantium sinu toto majorum logarithmi sunt defectivi, seu nihilo mires.* NEPERUS *logarithmos cosinuum* Antilogarithmos, *logarithmos vero tangentium* differentiales, KEPLERUS *etiam* Mesologarithmos *vocat. Dicuntur quoque hi logarithmi* Sinus & tangentes artificiales.

CAPUT II.

De Analysi Triangulorum.

THEOREMA II.

Tab.I. Fig.2. 32. *Tangens* 45° EF *æquatur radio* EC.

DEMONSTRATIO.

Quoniam arcus AE 45°. *per hypoth.* erit quoque angulus ACE 45° (§. 59 *Geom.*); consequenter angulus F 45° (§. 241 *Geom.*). Quare EF = CE (§. 253 *Geom.*). *Q. e. d.*

THEOREMA III.

Tab.I. Fig.1. 33. *In omni triangulo* ABC *latera sunt ut sinus oppositorum angulorum.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim omne triangulum circulo inscriptibile sit (§. 297 *Geom.*); erunt latera AC, CB & AB chordæ arcuum cognominum (§. 38 *Geom.*); consequenter latera dimidia sinus arcuum dimidiorum (§. 2). Sed arcus dimidii sunt mensuræ angulorum oppositorum B, A & C (§. 314 *Geom.*). Ergo ut latus AC ad sinum anguli sibi oppositi B; ita latus BC ad sinum anguli sibi oppositi A, ita etiam AB ad sinum anguli sibi oppositi C. *Q. e. d.* Tab.I. Fig.1.

SCHOLION.

34. *Ut vero evidentius appareat, in triangulo obtusangulo pro sinu anguli obtusi utendum esse sinu anguli acuti, qui eidem deinceps ponitur, & quem esse etiam sinum anguli obtusi supra annotavimus (§. 6), sequens addere lubet theorema.*

THEOREMA IV.

Tab.I. Fig.8. 35. *In triangulo obtusangulo* AGC *est ut latus angulo obtuso* G *oppositum* AC *ad sinum anguli acuti* AGE *eidem deinceps positi, ita latus angulo obtuso adjacens* GA *ad sinum anguli eidem oppositi* C.

DEMONSTRATIO.

Demittatur ex A in basin continuatam GC perpendicularis AE; erunt AEG & AEC triangula rectangula (§.78, 91 *Geom.*). Cum itaque sit ut sinus totus ad AC ita sinus anguli C ad AE & ut AG ad sinum totum ita AE ad sinum anguli AGE (§. 33); erit etiam ut AG ad AC ita sinus anguli C ad sinum anguli AGE (§. 201 *Arithm.*); consequenter latus angulo obtuso adjacens GA est ad sinum anguli eidem oppositi C, sicuti latus angulo obtuso oppositum AC ad sinum anguli acuti eidem deinceps positi AGE (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA XIII.

Tab.I. Fig.1. 36. *Datis duobus angulis* A *&* C, *una cum latere uni eorum* C *opposito* AB; *invenire latus alteri* A *oppositum* BC.

RESOLUTIO.

Inferatur (§. 33):
ut sinus anguli C
ad latus sibi oppositum datum AB;
Ita sinus anguli alterius A Tab.I. Fig.1.
ad latus quæsitum BC.

Invenietur adeo Logarithmorum ope BC, *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359).

Ex. gr. Sit C = 48° 35', A = 57° 28', AB = 74'. Calculus talis erit:

Log. sin. C	9.8750142
Log. AB	1.8692317
Log. sin. A	9.9258681
Sum. log. AB & sin. A	11.7950998
Log. BC	1.9200856

cui in Canone logarithmorum pro numeris vulgaribus respondent 83'. Cum vero logarithmus in Tabulis non exactus reperiatur; inveniri possunt numeri inventi 83' fractiones decimales, hoc est, in casu nostro digiti, si sub characteristica 2 post 830'' denuo logarithmus ipsius BC evolvatur: cui proxime respondet numerus 831''. Quodsi præter digitos etiam lineas desideres; eundem logarithmum quære post 8310''', & ei quam proxime respondere deprehendes 8319''''. Immo si Canon major ad manus sit, ipsa scrupula quarta expiscari licet, si logarithmus inventus post 83190'''' evolvatur: ubi eidem quam proxime respondet logarithmus numeri 83192. Est ergo BC 8° 3' 1'' 9''' 2'''' (§. 355 *Arithm.*).

SCHOLION.

37. *Quid facto opus sit, si logarithmi characteristica fuerit 3, in Arithmetica loco citato docuimus.*

PROBLEMA XIV.

38. *Datis duobus lateribus* AB *&* BC, *una cum angulo* C *uni eorum opposito; invenire angulos reliquos* A *&* B.

RESOLUTIO.

I. Inferatur (§. 33):
ut latus unum AB
ad sinum anguli dati sibi oppositi C;

Ita

Tab.I. *Fig.*1. Ita latus alterum BC
ad sinum anguli quæsiti sibi oppositi A.

Invenietur adeo logarithmus sinus anguli A utendo logarithmis *per Probl.* 42 *Arithm.* (§. 359.)

II. Quodsi latus AG vel AB dato angulo C oppositum fuerit minus latere AC, quod opponitur angulo quæsito, quæsitus angulus & obtusus esse potest G, & acutus B (§.234 *Geom.*); adeoque constare debet, utrum triangulum datum sit obtusangulum, an acutangulum. In casu posteriori satisfacit numerus graduum, qui sinui reperto respondet; in priori pro angulo obtuso sumitur ejus complementum ad 180° (§.35). Tab.I. *Fig.*8.

III. Quodsi angulus datus G in triangulo GAC fuerit obtusus, & datis præterea cruribus AG & AC quæratur acutus, in solutione pro sinu obtusi anguli AGC sumitur deinceps positi acuti AGE sinus (§.35).

Tab.I. *Fig.*1. Ex. gr. Sit AB = 94′, BC = 69′, C = 72° 15′.

Log. AB	1. 9731279
Log. sin. C	9. 9788175
Log. BC	1. 8388491
Sum. Log. sin. C & BC	11. 8176666
Log. sin. A.	9. 8445387,

cui in Canone proxime respondent 44° 21′. Quodsi Canon major non fuerit ad manus, & præter scrupula prima etiam secunda desiderentur, *vi Probl.* 4 (§. 19) hunc in modum inveniuntur.

A logarith. invento 98445387 subtrahe Tab.I. *Fig.*1.
Tabul. prox. min. 98445018

& notetur Differ. I. 369
Simil. ex prox. maj. 98446310 subduc
prox. min. 98445018

& notetur Diff. II. 1292
Inferatur, 1292 : 60 = 369
2) 646 : 30 30

646) 11070 (17
646

4610
4522

88

Est ergo angulus A = 44° 21′ 17″
Sed C = 72 15 0

Quare A + C = 116 36 17
Quon. A + C + B = 179 59 60

erit B = 63° 23′ 43″

Similiter dentur in triangulo rectangulo, præter rectum A, hypothenusa BC & cathetus AC pro angulo B. Sit nempe BC 49′ AC 36′. Calculus talis erit: Tab.I. *Fig.*6.

Log. BC	1. 6901961
Log. sin. tot.	10. 0000000
Log. AC	1. 5563025
Log. sin. B	9. 8661064,

cui in Canone proxime respondent 47° 16′.
Ergo C = 42° 44′ (§. 241 *Geom.*).
Quodsi AG = 349″, AC = 382″, angulus A = 57° 25′; erit Tab.I. *Fig.*8.

Log. AG	2. 5428254
Log. sin. C	9. 9256261
Log. AC	2. 5820634
Sum. Log. sin. C & AC	12. 5071689 5
Log. sin. G	9. 9648641,

cui in Canone proxime respondent 67° 15′. Est igitur angulus acutus G in triangulo AEG 67° 15′: quem si subtraxeris ex 180°, relinquetur pro obtuso AGC 112° 45′.

Tab.I. Fig.8. Detur denique in triangulo obtusangulo AGC angulus obtusus G 165° 17′, una cum cruribus AG = 179″ & AC 223″: Pro acuto C inferatur (§. 35).

Log. AC	2.3483049
Log. sin. AGE	9.4049009
Log. AG	2.2528530
Sum. Log. sin. G & AG	11.6577539
Log. sin. C	9.3094490

cui in Canone respondent quam proxime 11° 46′.

L E M M A.

39. *Si a semisumma duarum quantitatum subtrahatur semidifferentia, relinquitur quantitas minor: Si vero illi hæc addatur, prodit major.*

D E M O N S T R A T I O.

Numerus major componitur ex minore & differentia (§. 64 *Arithm.*): ergo summa ex minore bis sumta & differentia, consequenter semisumma ex minore & semidifferentia. Quare si a semisumma semidifferentia subtrahatur, minor quantitas relinquitur (§. *cit. Arithm.*). *Quod erat unum.*

Quodsi vero semisummæ semidifferentia addatur, aggregatum erit compositum ex quantitate minore & differentia (§. 61 *Arithm.*), adeoque numerus major, *per demonstr. Quod erat alterum.*

P R O B L E M A XV.

Tab.I. Fig.6. 40. *Datis duobus lateribus* BA & AC, *cum angulo intercepto* A; *invenire angulos reliquos.*

R E S O L U T I O.

I. Si triangulum ABC fuerit rectangulum; assumto crure uno circa rectum AB pro radio, erit alterum CA tangens anguli oppositi B (§. 7, 8) Inferatur ergo:

ut crus unum AB Tab.I. Fig.6.
ad alterum AC;
Ita sinus totus
ad tangentem anguli B.

Ex. gr. Sit BA 79′, AC 54′: erit

Log. BA	1.8976271
Log. AC	1.7323938
Log. sin. tot.	10.0000000
Log. tang. B,	9.8347667, cui in

Canone respondent quam proxime 34° 21′. Ergo angulus C 55° 39′ (§. 241 *Geom.*).

II. Si angulus A fuerit obliquus; Tab.I. Fig.7.

1. Inferatur:

ut summa laterum datorum AB & AC
ad differentiam eorundem;
Ita tangens semisummæ angulorum quæsitorum C & B
ad tangentem semidifferentiæ eorundem.

2. Addatur semidifferentia ad semisummam; aggregatum erit angulus major C. Eadem a semisumma subtrahatur, residuus fiet angulus minor B.

Ex. gr. Sit AB 75′, AC 58′, A 108° 24′, erit

AB 75	AB 75	A + B + C	179°	60′
AC 58	AC 58	A	108	24
Sum. 133	Diff. 17	B + C	71	36
		½(B + C)	35	48

Log. (AB + AC) - - -	2.1238516
Log. (AB − AC) - - -	1.2304489
Log. tang. ½(B + C)	9.8580694
Summa Logg.	11.0885183

Log. Tang. ½(C − B), 8.9646667, cui in Tabulis proxime respondent 5° 16′.

½(B + C) = 35° 48′	½(B + C) = 35° 48′
½(C − B) = 5 16	½(C − B) = 5 16
C = 41° 4	B = 30° 32

De-

DEMONSTRATIO.

Tab.I. *Fig.*7. Crure majore dato AB, ex vertice anguli dati A describatur circulus (§. 131 *Geom.*), & crus minus AC utrinque continuetur (§. 21 *Geom.*), donec circulo in E & D occurrat. Erit, ob AE = AB = AD (§. 40 *Geom.*), CE summa laterum datorum, CD differentia eorundem. Quoniam DE diameter (§. 39 *Geom.*); erit EBD semicirculus (§. 135 *Geom.*); consequenter angulus EBD rectus (§. 317 *Geom.*), adeoque EB ad BD perpendicularis (§. 78 *Geom.*). Quare si BD sumatur pro sinu toto; erit EB tangens anguli EDB (§. 7, 8). Est vero $o = x + y$ (§. 239 *Geom.*), & inde ob $u = \frac{1}{2}o$ (§. 313 *Geom.*), $u = \frac{1}{2}(x + y)$. Ergo EB tangens semisummæ angulorum quæsitorum x & y. Quoniam $x = u + n$ (§. 239 *Geom.*); erit n semidifferentia angulorum x & y (§ 39). Sumto itaque DB denuo pro radio, si describatur arcus DG (§. 131 *Geom.*) & in D excitetur perpendicularis DF (§. 249 *Geom.*); erit DF tangens anguli n (§. 7, 8), hoc est, semidifferentiæ angulorum quæsitorum x & y, *per demonstr.* Jam cum anguli EBD & FDB sint recti, *per demonstr.* & hinc FD & EB parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque BED & FDE æquales (§. 233 *Geom.*), item verticales ad C æquales (§. 156 *Geom.*): erit CE : EB = CD : DF (§. 267 *Geom.*), consequenter & CE : CD = EB : DF (§. 173 *Arithm.*). Data itaque per tangentem DF angulorum quæsitorum semidifferentia, reliqua in resolutione manifesta sunt, per Lemma præcedens (§. 39). *Q. e. d.*

PROBLEMA XVI.

41. *Datis tribus lateribus* AB, BC, & CA; *invenire angulos* A, B & C. Tab.I. *Fig.*8.

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Ex vertice anguli A, latere minimo AB, describatur circulus (§. 131 *Geom.*); erit ob AD = AB (§. 40 *Geom.*) CD summa crurum AC & AB, CF vero differentia eorundem. Et ideo inferre licet (§. 333 *Geom.*);
   ut basis BC
   ad summam crurum CD;
   Ita differentia crurum CF
   ad segmentum basis CG.
2. Inventum adeo segmentum CG (§. 302 *Arithm.*) si subtrahatur a basi CB; relinquitur chorda GB.
3. Demittatur ex A perpendicularis AE ad chordam GB (§. 216 *Geom.*), erit BE = EG = ½GB (§. 291 *Geom.*). Datis adeo, in triangulo rectangulo AEB, lateribus AB & BE, & in altero ACE lateribus AC & CE; inveniuntur anguli B atque A (§. 38). *Q. e. f. & d.*

E. gr. Sit AB = 36', AB = 45', BC = 40':

erit AC = 45'		AC = 45'	
AB = 36		AB = 36	
AC + AB = 81		FC = 9	

Log.	BC	= 1.6020600
Log.	AC + AB	= 1.9084850
Log.	FC	= 0.9542425
Logg. summa		= 2.8627275
Log.	CG	= 1.2606675

cui

cui in Tabulis quam proxime respondent 18' 2'' 3''' (§. 355 *Arithm.*).

BC = 4000''' EG = 1089'''
CG = 1822 CG = 1822

BG = 2178 CE = 2911

BE = 1089

Log. AB	=	3.5563025
Log. sin. tot.	=	10.0000000
Log. EB	=	3.0370279
Log. sin. EAB	=	9.4807254,

cui in Tabulis quam proxime respondent 17° 36', adeoque angulus ABE 72° 24' (§. 241 *Geom.*).

Log. AC	=	3.6532125
Log. sin. tot.	=	10.0000000
Log. CE	=	3.4640422

Log. sin. EAC = 9.8108297, cui in Tabulis quam proxime respondent 40° 18'. Ergo ACE 49° 42' (§. 241 *Geom.*), & CAB 57° 54' (§. 86 *Arithm.*).

CAPUT III.

De usu Trigonometriæ planæ in Geometria practica.

PROBLEMA XVII.

42. *Construere Instrumentum transportatorium rectilineum; hoc est Scalam secundum eam proportionem divisam, quam habent subtensæ arcuum ad radium.*

RESOLUTIO.

1. Ex communi Canone sinuum excerpantur sinus arcuum 2° 30', 5°, 7° 30', 10°, 12° 30' &c. nempe in progressione arithmetica progredientium, in qua terminorum differentia est $2\frac{1}{2}$ gr. Eos multiplica per 2; erunt facta chordæ arcuum 5, 10, 15, 20, 25 &c. (§. 2): ut hic in Tabella factum vides.

Gr.	Chor. dimid.	Chor. integ.	Gr.	Chor. dimid.	Chot. integ.
5	43.6	87	50	422.6	845
10	87.1	174	55	461.7	923
15	130.5	261	60	500.0	1000
20	173.6	347	65	537.2	1074
25	216.4	433	70	573.5	1147
30	258.8	517	75	608.7	1217
35	300.7	601	80	642.7	1285
40	342.0	684	85	675.5	1351
45	382.6	765	90	707.1	1414

2. Ducatur recta AD & ad eam erigatur perpendicularis AB (§. 249 *Geom.*) pro arbitrio in quinque, decem, viginti, &c. partes æquales dividenda, prout vel solos gradus, vel gradus dimidios, vel par- Tab.I. *Fig.9.*

Tab.I. *Fig.9.* partes quartas &c. indicare debent subtensæ.

3. Per singula divisionum puncta agantur rectæ ipsi AD parallelæ (§.258 *Geom.*).

4. In lineam AD, incipiendo semper a puncto A, transfer particulas chordarum integrarum gradibus 5°, 15°, 25°, 35°, &c. respondentes ex Scala geometrica in particulas minutissimas divisa (§. 277 *Geom.*): in linea vero superiori BC eodem modo designentur particulæ chordarum respondentes gradibus 10, 20, 30, 40, 50 &c. Quodsi Scala geometrica non continet particulas adeo minutas, quales desiderantur; utendum est chordis dimidiis: quod perinde ac si particulæ in Scala bifariam dividerentur. Negligenda autem est nota puncto a reliquis separata, vel si major fuerit, ejus loco addenda est unitas ultimæ earum, quæ retinentur; ex. gr. loco 258.8 assume 259. Ultimas nimirum notas ideo adjecimus, ut appareret, quomodo earum dupla pro chordis computata fuerint.

5 Ducantur transversæ ex B in 5, ex 5 in 10, ex 10 in 15, ex 15 in 20, ex 20 in 25, &c.

Cum enim A 5, B 10 &c. sint chordæ 5, 10 &c. graduum, & chordæ a quinis ad quinos gradus fere arcubus proportionaliter crescant; erit *c* 1 subtensa arcus 1°, *d* 2 subtensa 2 &c. graduum (§. 268 *Geom.*).

COROLLARIUM I.

43. Quia subtensa 60° est radius (§. 356 *Geom.*); anguli quantitatem investigaturus intervallo B 60 describat ex vertice anguli intra crura ejus arcum, qui est mensura ipsius (§. 57 *Geom.*), & ejus chordam ad Scalam applicet, quæ, si ex. gr. ex *d* in 42 pertingat, ostendit angulum esse 42°. Tab.I. *Fig.9.*

COROLLARIUM II.

44. Angulus datæ quantitatis construetur, si radio B60 describatur, ex centro B, arcus CF, & subtensa gradus dati, ex. gr. 23, in Scala reperta transferatur ex C in D. Erit enim DC mensura anguli B (§.57 *Geom.*); adeoque tot graduum, quot arcus continet (§.59 *Geom.*). Tab.I. *Fig.10.*

SCHOLION.

45. *Hujus Instrumenti beneficio quantitatem angulorum etiam in scrupulis satis accurate explorari experientia loquitur.*

PROBLEMA XVIII.

46. *Circulo Polygonum regulare inscribere & circumscribere.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Assumto radio 10000 partium, quales in Canone triangulorum habere supponitur, inde excerpatur sinus ejus arcus, qui prodit peripheria integra 360° per duplum numerum laterum polygoni, aut (quod perinde est) semiperipheria, hoc est 180°, per numerum laterum polygoni divisa. Illius enim duplum est chorda arcus dupli (§ 2), adeoque latus AB polygoni circulo inscribendi (§.342 *Geom*). Tab.I. *Fig.11.*

2. Quodsi radius circuli, cui ex. gr. pentagonum inscribendum, detur juxta certam aliquam mensuram ex. gr. 345"; latus polygoni in eadem men-

mensura invenitur per regulam trium (§. 302 *Arithm.*), inferendo nempe

```
10000 — 1176 — 3450'''
            3450
           ------
           58800
           4704
          3528
          ------
          4057|200 (4° 0' 5'' 7''' lat.
          1   ø|000        Pentag.
```

3. Dato radio, describatur circulus, & in eo applicetur latus polygoni, quoties fieri potest (§. 342 *Geom.*).
4. Polygono regulari circulo inscripto simile circumscribetur (§. 355 *Geom.*).

SCHOLION.

47. *Ne molesta sit rationis lateris Polygoni ad radium ex Canone sinuum investigatio, in Tabula hic exhibemus latera Polygonorum ejusmodi particulis expressa, qualium radius habet* 10000000. *In praxi tot notæ versus dextram resecantur, quot per circumstantias singulares superfluæ judicabuntur.*

Num. Later.	Quantitas Lateris	Num. Later.	Quantitas Lateris
III	17320508	VIII	7653668
IV	14142135	IX	6840402
V	11755705	X	6180339
VI	10000000	XI	5634651
VII	8677674	XII	5176380

Tab.I. PROBLEMA XIX.

Fig.11. 48. *Super data recta* AB *Polygonum regulare describere: & dato Polygono regulari* ABCDE *Circulum circumscribere.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut ratione lateris ad radium ex Tabula præ- Tab.I. cedente assumta quæratur radius in ea Fig.11. mensura, in qua datur latus AB (§. 302 *Arithm.*): dato enim latere AB & radio AL, Polygonum describi potest (§. 342 *Geom.*). Si vero intervallo radii ex A & B super latere Polygoni uno fiat intersectio in L; habebitur centrum L circumscribendi circuli (§. 37 *Geom.*).

PROBLEMA XX.

49. *Datis sinu verso* AB *& sinu* BC, Tab.I. *in mensura communi, non in particulis* Fig.12. *radii decimalibus; invenire arcum* FAC *in gradibus.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO.

1. Quæratur ex his datis semidiameter AD (§. 328 *Geom.*).
2. Datis jam in triangulo DBC, præter rectum B (§. 3), lateribus BC & DC; invenitur angulus ADC (§. 38): qui indicat numerum graduum in arcu AC (§. 59 *Geom.*), cujus duplus est arcus FC (§. 291 *Geom.*). *Q. e. i. & d.*

SCHOLION.

50. *Hujus Problematis usus est in inveniendo segmento circuli* (§. 436 Geom.).

PROBLEMA XXI.

51. *Datis in figura rectilinea qua-* Tab.I. *cunque omnibus lateribus* AB, BC, Fig.13. CD, DE, EA, *& angulis* o *&* y; *invenire diagonales.*

RESOLUTIO.

1. In △ ABE, datis duobus lateribus AB & AE, una cum angulo *o*; invenitur primum angulus A (§. 38); dein diagonalis BE (§. 36).

2. Eo-

2. Eodem modo resoluto triangulo BCD invenitur diagonalis BD. *Q. e. f.* Tab.I. *Fig.* 13.

PROBLEMA XXII.

52. *Datis in figura rectilinea quacunque duobus lateribus* AB *&* BC, *una cum diagonalibus* BE *&* BD, *atque angulis* o, x *&* y; *invenire latera reliqua* CD, DE *&* EA.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABE duobus lateribus AB & BE, cum angulo intercepto *o*, invenitur primum angulus *u* (§ 40), & deinde porro AE (§. 36).
2. Eodem prorsus modo in triangulis reliquis BED & BCD investigantur latera ED & DC. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIII.

53. *Datis in figura rectilinea quacunque omnibus lateribus* AB, BC, CD, DE, EA, *& tot angulis quot sunt latera demtis tribus*, C *&* D; *invenire diagonales* BD *&* BE.

RESOLUTIO.

1. In triangulo BCD, datis lateribus BC & CD, cum angulo intercepto C, investigetur angulus *m* (§. 40), quo ex angulo D subducto relinquitur angulus *n*, atque porro diagonalis BD (§. 36).
2. Datis jam in triangulo BDE lateribus BD & DE, cum angulo intercepto *n*; eodem prorsus, quo ante, modo reperitur diagonalis BE. *Q. e. f.*

PROBLEMA XXIV.

54. *Datis in figura rectilinea quacunque latere* AB, *una cum angulis* o, x, y, e, u *&* n; *invenire diagonales* AC, AD, BD *&* BE, *una cum lateribus* BC *&* AE. Tab.II. *Fig.* 22.

RESOLUTIO.

1. Datis in triangulo ABC angulis *o* & B $(=e+u+n)$, una cum latere AB, inveniuntur latus BC & diagonalis AC (§. 36).
2. Similiter datis in triangulo ABD angulis $o+x$ & $e+u$, una cum latere AB, inveniuntur diagonales BD & AD (§. *cit.*).
3. Denique datis in triangulo ABE angulis A $(=o+x+y)$ & *e*, una cum latere AB, inveniuntur latus AE & diagonalis BE. *Q. e. f.*

SCHOLION.

55. *Cum Ichnographiæ arearum optime perficiantur, datis omnibus lateribus itemque diagonalibus* (§. 363 *Geom.*); *horum Problematum in Planimetria usus est non contemnendus. Qui tamen praxi operam dant molestias calculi fugiunt; lucro magis quam accurationi intenti.*

PROBLEMA XXV.

56. *Metiri distantiam duorum locorum* BC, *ex eodem tertio* A *accessorum.* Tab.I. *Fig.* 14.

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas anguli A, puncto A ad arbitrium assumpto (§. 152 *Geom.*), nec non rectarum AB & AC (§. 126 *Geom.*).
2. Datis in △ BAC duobus lateribus AB & AC, cum angulo intercepto A, inveniatur primum angulus B (§ 40), & hinc porro distantia BC (§. 36). *Q. e. f.*

SCHOLION.

Tab. I. Fig. 14 57. *Exempla non addimus, cum Problemata, quibus triangula in hac Trigonometriæ applicatione solvuntur, jam in superioribus fuerint exemplis illustrata. Ut tamen de commoda stationis electione A judicari possit, quædam adhuc addenda sunt. Nimirum lineas AB & AC, quæ sunt latera trianguli resolvendi BAC satis accurate in campo metiri licet (§.126 Geom.): sed in metiendo angulo facile aliquot scrupulis primis vel in excessu, vel in defectu peccamus: cum tamen hoc angulo erroneo in calculo utamur tanquam vero, fieri omnino non potest quin distantia erronea obtineatur. Quamobrem de quantitate erroris admittendi hic nobis dispiciendum.*

THEOREMA V.

Tab.II. Fig.15. 58. *Si error aliquot scrupulorum in quantitate anguli* A *admittatur, laterum vero* BA *&* AC *magnitudo fuerit accurata; erit arculi* CD *errorem* CAD *metientis quantitas, ad* DE *differentiam distantiæ veræ* EC *ab erronea per calculum producta* BD; *ut sinus totus, ad sinum anguli* BCA, *qui lateri* AB *opponitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si in angulo BAC metiendo peccetur, ut prodeat tantillo major BAD, ob rectarum AC & AD æqualitatem, *per hypoth.* triangulum BAC degenerat in alterum BAD. Describatur ex A, intervallo AC tanquam radio, arcus CD, qui per punctum D, ob AC=AD (§.40 *Geom.*), necessario transit. Quoniam angulus CAD nonnisi aliquot scrupulorum est, arcus exiguus CD, qui eum metitur (§. 57 *Geom.*), pro recta haberi, &, si ejus ad peripheriam detur ratio, in eadem mensura determinari potest, in qua datur latus AC (§.435 *Geom.*). Describatur similiter ex centro B, intervallo BC, arcus CE, qui ex eadem ratione pro recta haberi poterit, eritque, ob BC=BE (§. 40 *Geom.*), ED differentia inter distantiam veram BC & erroneam BD: anguli vero ACD, BCE & CED sunt recti (§. 309 *Geom.*); consequenter BCE=ACD (§. 145 *Geom.*), atque adeo BCA=ECD (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus totus ad CD, ita sinus anguli ECD sive BCA, *per demonstr.* ad ED (§. 33): ergo etiam ut sinus totus ad sinum anguli BCA, ita CD ad ED (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab.II. Fig.15.

COROLLARIUM I.

59. Eodem ergo manente errore CD in Angulo A metiendo admisso, error in distantia admissus ED major est, si angulus BCA major fuerit; minor autem, si hic quoque minor fuerit (§. 205, 206 *Arith.*).

COROLLARIUM II.

60. Statio itaque in A ea eligenda, quæ acutum valde efficit angulum BCA (§. 59): quod obtinetur, si angulus A fuerit major recto (§. 240 *Geom.*) & latus AC > AB (§. 189 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

61. Cum angulus BAD major sit angulo BMD (§. 188 *Geom.*); præstat eligi stationem A viciniorem, quam remotiorem (§. 59).

SCHOLION.

62. *Supponimus hic parti lateris AB congruere semidiametrum Instrumenti goniometrici, dum angulum metimur, lateri vero AC respondere regulam mobilem* (§.152 Geom.).

COROLLARIUM IV.

63. Quoniam error ED in distantia definienda admissus major est, si quantitas arcus CD major fuerit (§. 58), quantitas autem

Tab.II. autem arcus CD major prodeat, eodem *Fig.*15. errore CAD admisso, si latus AC longius, quam si brevius fuerit, ideo hinc quoque patet, stationem viciniorem præstare remotiori.

SCHOLION.

64. *Ceterum hinc apparet, praxes accuratissimas esse, quæ solis lineis in campo mensuratis nituntur, ubi in earum positione ob errorem in angulorum quantitate commissum aberrari nequit. Dedimus hic specimen aliquod eorum, quæ circa praxin Geometriæ accuratam expendi merentur, ut ostenderemus, theoriam accuratam parere praxin accuratam, & ad theoriam perfecte addiscendam excitemus, qui olim praxi operam daturi. Falluntur enim, qui sibi persuadent, per theoriam addisci non posse certas praxium accuratarum circumstantias, tum demum observandas, ubi manum praxi admoveris. Etenim plerumque tantum confuse observantur; per theoriam vero accurate determinantur.*

PROBLEMA XXVI.

Tab.I. 65. *Invenire distantiam duorum lo-* *Fig.*15. *corum* AC, *quorum unus* A *tantum accessibilis.*

RESOLUTIO.

1. Investigetur quantitas angulorum A & B, statione in B electa (§. 1 2 *Geom.*), itemque rectæ AB (§. 126 *Geom.*).
2. Inveniatur AC (§. 36). *Q. e. f.*

THEOREMA VI.

Tab.II. 66. *Si in distantia* AB *ex duobus an-* *Fig.*23. *gulis* A & ACB, *una cum latere* AC, *investiganda, nonnisi in angulo uno* ACB *metiendo aberretur; arcus* BE, *qui errorem in angulo* BCD *admisso metitur, erit ad* BD *differentiam inter distantiam veram* AB & *erroneam* AD, *ut sinus anguli tertii* o *distantiæ stationum* AC *oppositi ad sinum totum.*

DEMONSTRATIO.

Illud per se patet in hoc casu distantiam erroneam calculo productam AD continuo in directum jacere veræ AB; consequenter latus CD terminans angulum erroneum ACD secare distantiam veram in præsente casu productam in D. Describatur ergo, ex centro C, radio CB, arcus BE, qui est mensura erroris BCD (§. 57 *Geom.*), cumque nonnisi paucorum minutorum sit, *ex hypothesi*, pro recta haberi potest. Quamobrem cum anguli BED & CBE sint recti (§. 309 *Geom.*), erunt anguli *o* & *u* (§. 147 *Geom.*), itemque *u* & *x* æquales recto (§. 241 *Geom.*); consequenter $o+u=x+u$ (§. 145 *Geom.*), atque ideo $o=x$ (§. 91 *Arithm.*). Est vero ut sinus anguli *x* (sive *o*, *per demonstr.*) ad arcum BE; ita sinus totus ad BD (§. 33). Ergo BE est ad BD ut sinus anguli *o* ad sinum totum (§. 173 *Arithm.*). *Q. e. d.* Tab.II. *Fig.*23.

COROLLARIUM I.

67. Cum sinus anguli *o* majorem habeat ad sinum totum rationem, si major, quam ubi minor fuerit (§. 203 *Arithm.*); eodem errore in metiendo angulo ACB admisso, hoc est, arcu BE existente eodem, minor erit error in distantia determinanda admissus BD, ubi angulus *o* major, quam ubi minor fuerit (§. 206 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

68. Unde consequitur, talem hoc in casu fieri debere stationum A & C electionem, ut anguli A & C sint admodum obliqui, angulus vero *o* evadat recto proximus: id quod obtinetur si anguli A & C junctim sumti tantillo excedant rectum (§. 240 *Geom.*).

COROLLARIUM III.

Tab.II. Fig.23. 69. Anguli obtusi eundem sinum habent cum acutis, qui ipsis deinceps ponuntur (§. 5). Quamobrem si recto fuerint multo majores, perinde est in præsenti casu, ac si angulus *o* esset valde acutus. Quodsi autem angulum *o* in electione stationum obtusum desideres, tantillo rectum excedere debet, consequenter anguli A & C simul a recto tantillo deficiant necesse est.

COROLLARIUM IV.

70. Si angulus *o* fuerit rectus, arcus BE cum ipsa BD coincidit, atque adeo errori in distantia admisso æqualis reperitur, ubi in eadem mensura determinatur, in qua datur distantia stationum AC ex radio nempe CB (§. 435 *Geom.*).

COROLLARIUM V.

71. Errore adeo in angulo C existente eodem, qui in distantia admittitur minimus omnium est, ubi angulus *o* fuerit rectus.

THEOREMA VII.

72. *Si in dimetienda distantia locorum* AB, *ex duobus angulis* A *&* C *& uno latere* AC, *error etiam in altero angulo metiendo* A *admittatur, præter eum qui in angulo* C *committitur; erit errorem in angulo* A *commissum metiens arcus* DI, *distantia uno errore implicita* AD *tanquam radio descriptus, ad errorem inde in distantia productum* IH, *ut sinus anguli tertii* o *quantitate erroris primi* m *diminuti ad ejus cosinum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si AH fuerit recta positione data, in quam ob errorem in angulo A metiendo admissum promovetur distantia AB, recta errorem primum *m* terminans CD continuanda, donec illi in H occurrat, eritque AH distantia ex duplici errore *m* & *k* admisso. Tab.II. Fig.23. Jam, distantia uno errore implicita AD tanquam radio, describatur arcus DI mensura erroris *k* (§. 57 *Geom.*); erit is tum ad AD, tum ad AI perpendicularis (§. 308 *Geom.*); consequenter anguli DIH & ADI recti (§. 78 *Geom.*), cumque arcus DI sit paucorum minutorum (§. 59 *Geom.*) pro recta haberi potest. Hinc porro ut in Demonstratione præcedente colligitur esse $y = x = o - m$ (§. 239 *Geom.*). Est vero ut sinus anguli *y* ad DI, ita sinus anguli *z* ad IH (§. 33). Ergo DI ad IH ut sinus anguli *y* ad sinum anguli *z* (§. 173 *Arithm.*), sive cosinum anguli *y* (§. 241 *Geom.* & §. 11. *Trig.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

73. *Si in dimetiendo angulo peccetur in defectu, error in distantia admissus eodem modo determinatur, nisi quod tum fiat subtractivus, atque adeo unus alterum imminuere, immo prorsus compensare possit, ubi alter additivus, alter subtractivus fuerit. Sed plura non addimus, ob rationem paulo ante dictam.*

PROBLEMA XXVII.

74. *Invenire distantiam duorum locorum inaccessorum* AB. Tab.II. Fig.17.

RESOLUTIO.

1. Statione commoda in C electa investigetur quantitas anguli ACB, itemque angulorum D & E atque BCE (§. 152 *Geom.*), punctis D & E cum C in eadem linea designatis (§. 125 *Geom.*).
2. Investigetur etiam quantitas rectarum DC & CE (§. 126 *Geom.*).

3. Sum-

3. Summa angulorum ACB & BCE, itemque BCE & E subtrahatur ex 180°, ut relinquantur anguli ACD (§. 148 *Geom.*) & CBE (§. 245 *Geom.*): eodemque modo inveniatur angulus DAC.

Tab.II. Fig. 17.

4. Datis jam in triangulis DAC & CBE angulis cum latere uno, nempe DC in primo, CE in altero, inveniuntur AC & CB (§. 36), & hinc porro angulus CAB (§. 40), tandemque AB (§. 36).

PROBLEMA XXVIII.

Tab.II. Fig. 18. 75. *Invenire altitudinem accessibilem* AB.

RESOLUTIO.

1. Statione in E electa, Instrumentoque (§. 284 *Geom.*) rite collocato, investigetur quantitas anguli ADC (§. 152 *Geom*).
2. Quæratur porro distantia stationis ab altitudine DC (§. 126 *Geom.*), quæ erit ad AC perpendicularis (§. 227 *Geom.*).
3. Cum adeo C sit rectus (§. 78 *Geom.*), in triangulo ACD invenietur AC (§. 36).
4. Huic si addatur BC; prodibit altitudo integra AB. *Q. e i.*

THEOREMA VIII.

Tab.II. Fig. 19. 76. *Si in quantitate anguli* A *investiganda aberretur, erit altitudo vera* BD *ad falsam* BC, *ut tangens anguli veri* DAB *ad tangentem anguli erronei* CAB.

DEMONSTRATIO.

Assumto AB pro sinu toto, erit DB tangens anguli DAB; CB autem tangens anguli CAB (§. 7). Sunt itaque altitudines BD & BC ut tangentes angulorum DAB & BAC. *Quod erat unum.*

Eodem modo se habet Demonstratio, si angulus erroneus sit minor vero.

COROLLARIUM I.

77. Quoniam, posita eadem quantitate anguli veri atque erronei, eadem est ratio altitudinis veræ ad erroneam (§. 76); error plurium pedum committitur in altitudine majore quam in minore.

COROLLARIUM II.

78. Quia tangentes arcuum majorum & valde exiguorum, seu recto vel minuto proximorum, minorem rationem inter se habent quam tangentes mediocrium seu semirecto vicinorum, minore nempe ad majorem relata, Canone tangentium teste; si idem error committitur in angulo majore aut valde exiguo, & mediocri; error in altitudine admissus major erit in casu priore, quam in posteriore.

SCHOLION.

79. *Sit ex. gr. angulus verus BAD* 30°, *AB* 67': *erit altitudo vera* 3° 8' 6''. *Ponamus assumi angulum erroneum BAC* 31°: *is producet altitudinem erroneam BC* 4° 0' 2'' (§. 36). *Sit in distantia minore BE angulus DEB recto proximus* 86°, *& assumatur per errorem angulus* 87°: *reperietur altitudo erronea* 5° 1' 6'', *quæ erroneam supra inventam excedit* 1° 1' 4''.

COROLLARIUM III.

80. Quoniam itaque in distantia minore EB angulus E major est quam DAB in majore AB (§. 188 *Geom.*), in distantia autem valde remota difficulter anguli admodum exigui quantitas exacte determinatur: in metiendis altitudinibus distantia stationis ab altitudine assumenda est mediocris, ita ut angulus DEB non multum abeat a semirecto.

THEO-

THEOREMA IX.

Tab.II. Fig.20. 81. *Si Instrumentum in* A *non fuerit horizontaliter collocatum, sed vel quantitate anguli* BAD *versus horizontem inclinatum, vel quantitate anguli* EAB *ab eodem reclinatum; erit altitudo vera ad falsam ut tangens anguli veri* CAB *ad tangentem erronei* CAD *vel* CAE.

DEMONSTRATIO.

Sumto enim AB pro radio, CB est tangens anguli veri CAB (§.7). Inferendum ergo: ut sinus totus ad tangentem CAB, ita AB ad altitudinem veram. Infertur autem per errorem: ut sinus totus ad tangentem CAD, ita AB ad altitudinem erroneam. Quamobrem ut tangens CAB ad tangentem CAD ita altitudo vera ad erroneam (§.196 *Arithm.*). *Quod erat primum.*

Idem eodem modo ostenditur, si instrumentum quantitate anguli EAB a situ horizontali reclinetur. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

82. *Eadem ergo hic locum habent Corolria, quæ modo Theoremati præcedenti subjecimus. Cæterum patet altitudines exactas non inveniri ob duplicem errorem, ex vitioso nempe situ tam lineæ AC, quam AB commissum.*

PROBLEMA XXIX.

83. *Metiri altitudinem inaccessam* AB. Tab.II. Fig.21.

RESOLUTIO.

1. Eligantur duæ stationes G & E cum altitudine AB in eadem recta (§. 284 *Geom.*), tanto intervallo DF distantes, ut angulus FAD non sit nimis exiguus, nec altera statio G nimis vicina altitudini AB (§. 78, 80).
2. Investigetur quantitas angulorum ADC, AFC & CFB (§. 152 *Geom.*), itemque distantiæ FD longitudo (§. 126 *Geom.*).
3. Inveniatur primum in triangulo AFD, ex datis angulo D, *per observationem*, & angulo AFD (§.239 *Geom.*) & latere FD, latus AF (§. 36); dein, ex notis in triangulo ACF, præter rectum C, angulo F & latere AF, latus AC, itemque CF (§.36); tandem, ex cognitis in triangulo FCB, præter rectum C, angulo CFB & latere CF, latus CB (§.36).
4. Addantur AC & CB. Ita prodit altitudo quæsita AB (§.86 *Arithm.*).

Finis Trigonometriæ planæ.

ELEMENTA

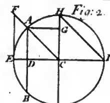


Fig: 2.
F
A
H
G
E
D
C
I
B

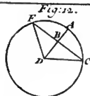


Fig: 12.
F
A
B
D
C

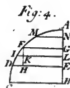


Fig: 4.
A
M
N
F
G
I
L
K
D
E
H
C
B

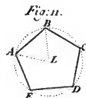


Fig: 11.
B
A
C
L
E
D

Fig: 6.
C
A
B

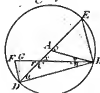


Fig: 7.
E
A
F
G
B
D

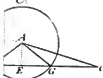


Fig: 8.
A
E
G
C

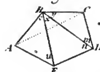
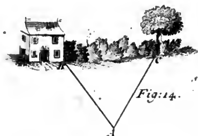


Fig: 13.
B
C
A
D
E


B
C
Fig: 14.
A

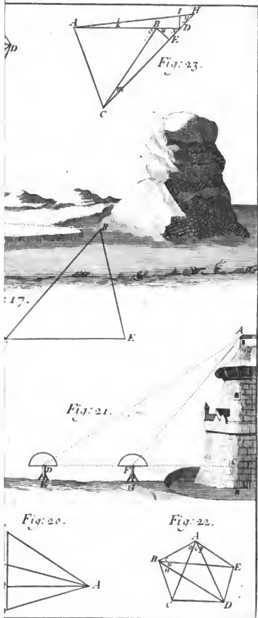
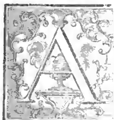


Fig: 23.
17.
Fig: 21.
Fig: 20.
Fig: 22.

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ
TAM FINITORUM QUAM INFINITORUM.

PRÆFATIO.



PICEM totius Eruditionis humanæ conſcendimus Analyſin tradituri: eſt enim Ars, per calculum quantitatum generalem, proprio marte inveniendi veritates in Matheſi non minus pura, quam applicata. Elementis Arithmeticæ communis atque Geometriæ hactenus expoſitis inſtructus, & Analyſi adjutus, multa inveniet, quæ ex aliorum ſcriptis non ſine tædio alias haurire deberet; immo omnibus adhuc ignorata deteget. Ea vero perfectiſſima eſt ſtudiorum noſtrorum ratio, quæ paucis memoriæ mandatis aptos reddit ad inveniendum quodlibet, eo maxime tempore, quo ejus cognitione opus. Nec major intellectus perfectio concipitur promptitudine ex datis quibusdam alia incognita eliciendi. Accedit, in moderna Analyſi, Artis ratiocinandi perfectiſſima occurrere exempla. Notiones enim ſignis expreſſæ imaginationi præſentia ſiſtunt, quæ alias ultra ejus ſphæram aſcenderent: longa ratiociniorum ſeries, quibus non ſine multa attentione ac circumſpectione notionum nexus detegitur, in Artem ſignorum combinatoriam convertitur, conſtanter eandem & principiis paucis ac manifeſtis ſuperſtructam. Illud autem prorſus mirabile exiſtit, ope Analyſeos unica ſæpius linea tot veritates exprimi, quas juxta communem methodum exponendas ac demonſtrandas volumina integra non caperent. Hinc, unius lineæ intuitu, integras fere diſciplinas, paucorum

minutorum ſpatio, addiſcere licet, quibus, juxta communem methodum comprehendendis, anni complures vix ſufficerent. Solidam ergo in Matheſi eruditionem conſecuturus Analyſi ſtudeat opus eſt. Ne autem, non tam difficultate (ea enim revera nulla eſt), quam novitate rei deterritus a præſtantiſſimo ſtudiorum genere arceatur; Arithmeticam ſpecioſam familiarem ſibi reddat, neglectis ſub initium regularum rationibus, ſicubi difficultatem faceſſant, & exemplis numericis in locum earundem ſubſtitutis. Ubi ad exempla algebraïca pervenerit, non inutile judicamus, ut Tyrones data per numeros variis modis explicent, & idem Problema in caſibus ſpecialibus aliquoties ſolvant: ita enim futurum, ut calculo facilius adſueſcant & ejus rationes ſimplices perſpiciant. Neque vero putandum eſt, integram Analyſin jamdum eſſe inventam; quin potius tenendum, plurima adhuc ſubſidia deeſſe poſterorum induſtria detegenda. Certe quæ in Elementis Geometriæ docuimus, per modernam Analyſin non omnia eruuntur, inprimis ſi a linearum & ſuperficierum ſitu pendent. Quamobrem LEIBNITIUS, Vir in omni eruditione ſummus, pro ea, quæ ipſi eſt, ingenii perſpicacitate novam quandam *Analyſin ſitus* excogitavit, peculiari calculi generi (quem *calculum ſitus* appellat) ſuperſtructam, a calculo magnitudinum, quibus in noſtra Analyſi utimur, toto cœlo differentis. Immo, qui hactenus reperta animo comprehenderit & ad ſolvenda Problemata cum cura adhibuerit, pluribus regulis inveniendi artem ipſe locupletabit. Ceterum, quæ vel in Arithmetica, vel in Geometria elementari, ſtudio prætermiſſa, ea per Analyſin eruimus, ex Geometria quoque ſublimiori inveſtigantes, quæ præ reliquis ſcitu neceſſaria.

ELEMEN-

ELEMENTA
ANALYSEOS MATHEMATICÆ.

PARS PRIMA,
ELEMENTA ANALYSEOS FINITORUM TRADIT.

SECTIO PRIMA,
DE ARITHMETICA SPECIOSA.

CAPUT PRIMUM.
De Arithmetica Rationalium.

DEFINITIO I.

1. ANALYSIS *mathematica* est Methodus resolvendi Problemata mathematica.

DEFINITIO II.

2. *Arithmetica speciosa* est, quæ computum quantitatum seu numerorum indeterminatorum docet. Vocatur etiam *Logistica speciosa*.

HYPOTHESIS I.

3. *Quantitatum datarum signa sint literæ alphabeti priores*, a, b, c, d &c. *quæsitarum postremæ* z, y, x &c. *Quantitates æquales eadem litera indigitentur.*

SCHOLION I.

4. *Nempe cum quantitates datæ ac quæsitæ tanquam distinctæ intellectui repræsententur per diversas notiones; eædem quoque tanquam distinctæ repræsentandæ sunt imaginationi per signa diversa.*

SCHOLION II.

5. *Nos* CARTESIUM *sequimur in* Geometria. *Angli nonnulli, exemplo* HARRIOTI *in* Artis Analyticæ praxi, *incognitas quantitates vocalibus; cognitas consonantibus designant.* VIETA *hujus Logisticæ inventor usus est literis majoribus, qui eam primus perfecit* HARRIOTUS *& ipsum secutus* CARTESIUS *literas minores substituerunt.*

Hypothesis II.

6. *Si quantitatum denominandarum quædam relationes mutuæ dantur, aut aliunde tanquam cognitæ supponi possunt; eas quoque in denominatione exprimi consultum est.*

Ex. gr. Si fuerint duæ quantitates quæsitæ, quarum una alterius tripla, & una vocetur x, major rectius dicetur $3x$, quam y. Similiter cum quantitas major sit aggregatum ex semisumma duarum quantitatum & earundem semidifferentia, minor vero differentia inter semisummam & semidifferentiam earundem quantitatum (§. 39 *Trigonom.*); consultum sæpius est, ut semisumma dicatur x & semidifferentia y, atque hinc quantitas major $x + y$, minor $x - y$, quam ut ipsa major x & minor y vocetur.

Scholion.

7. *Quinam fructus ex commoda quantitatum denominatione expectandi, ex subsequentibus patebit. Breviatur calculus, idemque facilitatur; resolutiones Problematum sæpe magis genuinæ inveniuntur. Alii suo loco sese offerent. Plura circa denominationem moneri possent, nisi consultius judicaremus ea per exemplum, quam per præcepta doceri.*

Hypothesis III.

8. *Signa operationum arithmeticarum retineantur, quæ in* Arithmetica communi *tradidimus* (§. 63, 65, 68, 71, 254, 295,); *nisi quod quantitates se mutuo dividentes, ubi commodum fuerit, instar fractionum scribantur.*

Ex. gr. $\frac{a}{b} = a : b$; $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

Scholion.

9. *Vulgo multiplicationis signum est* $\times$. *Ex. gr.* ab *scribitur* a×b. *Sed cum hoc signum facile cum litera* x *a typothetis confundatur, usus ejus merito improbatur.*

Hypothesis IV.

10. *Si vel unus, vel ambo factores ex pluribus literis componuntur; compositi parenthesi ( ) includuntur.*

Ex. gr. factum ex $a + b - c$ in d ita scribitur: $(a + b - c)\,d$. Similiter factum ex $a + b - c$ in $d - g$ hunc in modum effertur, $(a + b - c)\,(d - g)$.

Scholion.

11. *Vulgo hæc facta ita scribunt:* $\overline{a+b-c}\times d$ & $\overline{a+b-c}\times\overline{d-g}$. *Sed cum hæc scriptio typothetis molestias creet, inprimis si ex alio capite linearum supra literas ducendarum numerus multiplicatur, signis* Leibnitianis *utendum esse judicamus, quæ non inutiliter in* Actis Eruditorum Lipsiensibus *usurpantur & ab admodum* R. P. Guidone Grando (a) *in Italia primum introducta.*

Hypothesis V.

12. *Si quantitatum se mutuo dividentium una, vel ambæ ex literis pluribus componuntur; signo parentheseos ( ) similiter utimur, nisi circumstantiæ singulares suadeant, eas fractionum instar scribi.*

Ex. gr. Quotus ex $a + b$ per c ita scribitur, $(a + b) : c$. Quotus vero ex $a + b$ per $c - d$ ita exprimitur, $(a + b) : (c - d)$. Similiter $a : (a + b)$ designat quotum ipsius a per $a + b$ divisi. Iidem quoti communiter ita scribuntur: $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a+b}{c-d}$, $\frac{a}{a+b}$.

(a) In *Quadratura Circuli & Hyperbolæ*. Part. 2. p. m. 58.

Hypo-

HYPOTHESIS VI.

13. *Exponentes indeterminati tam rationum, quam dignitatum indicentur per* m n, r, s, t *&c.*

Ex. gr. x^m, y^n, z^r &c. designant potentias indeterminatas diversi generis (§. 254 *Arithm.*); *mx*, *ny*, *rz* multipla vel submultipla diversa quantitatum *x*, *y*, *z*, prout *m*, *n*, *r* vel numeros integros, vel fractos designant (*§.*136 *Arithm.*).

HYPOTHESIS VII.

14. *Si radix ex pluribus literis componitur; parenthesi includitur & exponens ipsi suffigitur, ut ante.*

Ex. gr. $(a+b-c)^2$ designat quadratum ex $a+b-c$; $(a+b-c)^m$ potentiam quamlibet, seu indeterminatam ipsius $a+b-c$.

SCHOLION.

15. *Communiter ita scribunt* $\overline{a+b-c}^2$, $\overline{a+b-c}^m$.

DEFINITIO III.

16. *Quantitas* signo + affecta dicitur *positiva*, item *affirmativa*, atque *nihilo major*: quæ vero signo — afficitur, *privativa*, item *negativa*, atque *nihilo minor*, a nonnullis *absurda*.

COROLLARIUM I.

17. Quoniam + est signum additionis (§. 63 *Arithm.*); — vero signum subtractionis (*§.*65 *Arithm.*): quantitas positiva prodit, si vera aliqua nihilo additur, e. gr. $0+3=+3$. $0+a=+a$; privativa relinquitur, si quantitas aliqua vera ex nihilo subtrahitur; ex. gr. $0-3=-3$, $0-a=-a$.

SCHOLION I.

18. *Ponamus, te habere nummorum nihil, tibique donari* 100; *habebis ergo* 100 *nummos, adeoque plus nihilo. Plus nempe habes quam ante. Hi nummi quantitatem positivam constituunt. Ponamus, e contrario, te nihil habentem solvere debere* 100 *nummos;* 100 *ergo nummorum debitum contrahes, adeoque, antequam solutio fiat, minus nihilo habebis. Solvendi enim sunt* 100 *nummi, ut nihil habeas. Hoc debitum quantitas negativa est. Notandum vero quantitates positivas initio vel solitarie positas signo nullo affici. Cur vero positivæ dicantur nihilo majores, negativæ nihilo minores; ex Corollario patet.*

COROLLARIUM II.

19. Sunt adeo quantitates privativæ verarum, per quas intelliguntur, defectus; consequenter non quantitates veræ.

SCHOLION II.

20. *Defectum per eam quantitatem metimur, quæ deficit, & sic intelligibilis evadit.*

COROLLARIUM III.

21. Si residuo additur, quod fuerat ablatum, ea prodit quantitas, ex qua subtractio facta (§. 106 *Arithm.*). Ergo $-a+a=0$, $-3+3=0$ (*§.*17): hoc est, $-a$ & $+a$, itemque -3 & $+3$ se mutuo destruunt.

COROLLARIUM IV.

22. Quoniam defectus unus alterum excedere potest (ex. gr. si 7 deficiunt, plura desunt, quam ubi 3 deficiunt), quantitates vero privativæ sunt verarum defectus (*§.*19); ideo quantitas una privativa aliquoties sumta alteram superare potest. Quamobrem quantitates privativæ inter se homogeneæ sunt (*§.*32 *Arithm.*).

COROLLARIUM V.

23. Sed quia defectus positivæ quantitatis aliquoties sumtus positivam superare nequit, cum potius multo magis ab ea deficiat (*§.*17); quantitates privativæ positivis heterogeneæ sunt (*§.*32 *Arithm.*).

COROLLARIUM VI.

24. Cum adeo quantitates privativæ positivis heterogeneæ (*§.*23), privativis homogeneæ sint, (§. 22); inter privativam & positivam ratio intercedere nequit, inter privativas vero ratio datur (§. 126 *Arithm.*). Ex. gr. $-3a:-5a=3:5$.

SCHOLION III.

25. *Non mirum videri debet inter quantitates privativas* $-3a$ *&* $-5a$ *eandem esse rationem, quæ est inter positivas* $+3a$ *&* $+5a$. *Quod enim quantitates quatuor, quarum binæ binis heterogeneæ sunt, proportionales esse possint, tum ex rationum doctrina intelligitur, tum ex Geometria manifestum est, in qua eandem rationem inter lineas esse demonstravimus, quæ inter superficies datur. Ex. gr. Parallelogramma æqualium basium rationem altitudinum habent* (§. 389 Geom.) *& in praxi regulæ trium pretia sumuntur ut mercium quantitates; licet pretia mercibus heterogenea sint. Falluntur autem, qui inter* 1 *&* -1, *atque inter* -1 *&* 1 *rationem eandem esse sibi persuadent* (§. 24).

THEOREMA I.

26. *Quantitas qualibet pro unitate assumi potest.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas enim quælibet in se una est (§. 3 *Arithm.*), nec ad aliam determinatam tanquam ad unitatem jam refertur (§ 13 *Arithm.*). Ergo ipsa pro unitate assumi potest (§. 4 *Arithm.*). *Q. e. d.*

PROBLEMA I.

27. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas addere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ eodem signo afficiuntur; numeri iis præfixi adduntur, ut in Arithmetica communi.
2. Si signis diversis afficiuntur, additio mutatur in subtractionem & residuo præfigitur signum majoris.
4. Quantitates diversis literis notatæ junguntur mediante signo + (§. 8).

$$\begin{array}{llll} 4a + 2b - 2c - 5d - g & & a - b \\ 5a - 2b + 6c + 2d - 3g & & c \\ \hline 9a \quad + 4c - 3d - 4g & & a - b + c \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum litera quælibet, qua quantitas aliqua indigitatur, pro unitate assumi possit (§. 26); erit $a + a + a + a = 4a$; consequenter $4a + 5a = 9a$ (§. 96 *Arithm.*). Eodem modo patet esse $-g - 3g = -4g$. *Quod erat unum.*

Quoniam $6c = 4c + 2c$ *per demonstr.* erit $6c - 2c = 4c + 2c - 2c$ (§. 91 *Arithm.*). Sed $2c - 2c = 0$ (§. 21). Ergo $6c - 2c = 4c$. Similiter $-5d = -3d - 2d$, *per demonstr.* Sed $-5d + 2d = -3d - 2d + 2d$ (§. 88 *Arithm.*) & $-2d + 2d = 0$ (§. 21). Ergo $-5d + 2d = -3d$. *Quod erat alterum.*

Tertium per se patet (§. 8).

SCHOLION.

28. *Ut hic calculus facilius intelligatur, ponamus* a *denotare thalerum*, b *grossum*, c *nummum; habebimus*

7a − 9b + 5c =	7 th.	− 9 gr.	+ 5	num.
3a + 5b − 9c =	3	+ 5	− 9	
10a − 4b − 4c =	10 th.	− 4 gr.	− 4	num.

Atque per idem exemplum facilius quoque capitur ratio, cur in casu diversitatis signorum additio in subtractionem mutetur & residuo signum majoris quantitatis relinquatur. Nimirum in summa 10 *thalerorum deficiunt* 9 *grossi: quamobrem si quinque addantur, defectus minuitur & ad* 4 *reducitur. Quoniam vero non* 5 *grossi integri, sed demtis* 9 *nummis, summæ adjiciendi; summa* 10 th. − 4 gr. *excedit genuinam* 9 *nummis, qui adeo auferendi. Jam cum in nume-*

numero superiori, cui inferior additur, occurrant 5 numeri, hi quidem actu auferri possunt: qui vero adhuc desiderantur 4, tanquam defectus notandi. Et hac quidem ratione regula a primo Inventore detecta.

THEOREMA II.

29. *In subtractione quantitatum compositarum signa subtrahendæ mutantur in contraria, nempe + in — & — in +.*

DEMONSTRATIO.

Si $c+d$ fuerit subtrahenda ex $a+b$; differentiam esse debere $a+b-c-d$, adeoque signa + in quantitate subtrahenda in — mutari, ex *hypoth.* 3 (§. 8) patet. Sed si $c-d$ subtrahenda ex $a+b$, & integrum c subtrahitur; quantitas major subducta quam fieri debebat. Ergo quod plus justo subtractum est d, iterum addendum. Prodit ergo $a+b-c+d$. *Q. e. d.*

PROBLEMA II.

30. *Quantitates tam eadem, quam diversis signis affectas a se invicem subtrahere.*

RESOLUTIO.

1. Si quantitates eadem litera notatæ signa eadem habent, & minor e majore subtrahenda; subtractio ut in Arithmetica communi (§. 103 *Arithm.*) absolvitur.
2. Si vero major e minori subducenda; contraria ratione minor e majore subtrahitur & residuo præfigitur signum —, si quantitates signo + afficiuntur; signum vero +, si signo — gaudent.
3. Si quantitates diversa signa habent; in additionem mutatur subtractio & aggregato præfigitur signum ejus quantitatis, ex qua subtractio facta est.
4. Si quantitates diversis literis notatæ, signa subtrahendæ tantum in contraria mutantur.

$8a - 5c + 9d = 8$th. $- 5$gr. $+ 9$ num.
$6a - 8c - 7d = 6 - 8 - 7$

$2a + 3c + 16d = 2$th. $+ 3$gr. $+ 16$ num.

$$\begin{array}{l} 9b+15c-7d+8e-f \\ 6b+20c-9d-9e+7f \\ \hline 3b-5c+2d+17e-8f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ d-e+f \\ \hline a+b-c-d+e-f \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+d \\ c-e-g \\ \hline a+d-c+e+g \end{array}$$

DEMONSTRATIO.

Cum quantitates eadem litera notatæ sint vel unitates eædem, vel ejusdem unitatis multiplæ aut submultiplæ (§. 26); erit $8a - 6a = 2a$ (§. 35, 103 *Arithm.*). *Quod erat unum.*

Si quantitas major $20c - 9d$ ex minore $15c - 7d$ subtrahenda; erit residuum $15c - 7d - 20c + 9d$ (§. 29). Sed $15c - 20c = -5c$ & $-7d + 9d = 2d$ (§. 27). Ergo $15c - 7d - 20c + 9d = -5c + 2d$. *Quod erat alterum.*

Si $-9e + 7f$ subtrahi debent ex $8e - f$; erit residuum $8e - f + 9e - 7f$ (§. 29). Sed $-f - 7f = -8f$ & $8e + 9e = 17e$ (§. 27). Ergo $8e - f + 9e - 7f = 17e - 8f$. *Quod erat tertium.*

Quartum patet per Theor. 2 (§. 29).

Aliter.

1. Signa quantitatis subtrahendæ mutentur in contraria (§. 29): quo facto
2. Additio fiat (§. 27), seu quæ se mutuo destruunt deleantur.

Ex. gr.

Ex.gr. Si ex $9b + 15c - 7d + 8e - f$ subtrahi debet $6b + 20c - 9d - 9e + f$ fiat (§. 29) $- 6b - 20c + 9d + 9e - f$; erit (§. 27) residuum $3b - 5c + 2d + 17c - 2f$. Nimirum $+ 6b - 6b$, $+ 15c - 15c$, $- 7d + 7d$, se mutuo destruunt (§. 21).

SCHOLION.

31. *Mirum videri poterat, quod cum quantitates privativæ positivis heterogeneæ sint (§. 23), heterogeneæ autem nec addi* (§. 61 Arithm.), *nec a se invicem subtrahi possint* (§. 64 Arithm.), *privativæ tamen positivis addantur & ab iis subtrahantur. Enim vero rem curatius perpendens animadvertes, proprie loquendo privativam nunquam addi positivæ, nec ab eadem subtrahi: sed in additione subtrahi, quod plus justo fuerat additum* (§. 27); *in subtractione addi, quod plus justo fuerat subductum* (§. 30).

THEOREMA III.

32. *Si quantitas positiva per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit positiva.*

DEMONSTRATIO.

Est enim in multiplicatione ut unitas ad factorem unum, ita alter ad productum (§. 66 *Arithm.*). Sed uterque factor est positivus, *per hypoth.* Ergo & factum positivum esse debet (§. 24). *Quod erat unum.*

Si $+ a$ ducitur in $+ b$, factum est $+ab$, *per demonstr.* Ergo si $+ ab$ dividitur per $+ a$, quotus erit $+ b$; si per $+ b$, quotus $+ a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA IV.

33. *Si quantitas negativa per positivam multiplicetur aut dividatur; in utroque casu quantitas prodit negativa.*

DEMONSTRATIO.

Multiplicare idem est hac quantitatem aliquam aliquoties sibimetipsi addere (§. 67 *Arithm.*). Est vero summa quantitatum negativarum negativa (§. 27). Ergo factum ex negativa in positivam negativum est. *Quod erat unum.*

Factum ex $- a$ in $+ b$ est $- ab$ *per demonstr.* Ergo si $- ab$ dividitur per $+ b$, quotus est $- a$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA V.

34. *Si quantitas negativa per negativam multiplicetur aut dividatur; quantitas positiva prodit.*

DEMONSTRATIO.

Quantitas privativa per privativam proprie loquendo multiplicari nequit (§. 66 *Arithm.*): id quod ipsa notio quantitatis privativæ insinuat (§. 19), utpote quæ repugnat actui positivo, qualis est iterata ejusdem quantitatis additio, in qua multiplicatio consistit (§. 67 *Arithm.*). Quare hæc multiplicatio proprie tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut addi rursus debeat, quod plus justo fuerat subtractum: id quod evidentissime ita demonstramus.

Sit ACDB parallelogrammum rectangulum, & in eo $AC = a$, $CD = b$. Ducatur EF ipsi CD parallela (§. 258 *Geom.*); erit ob rectos ad E & F (§. 230 *Geom.*) & $EF = AB$, itemque $AE = BF$ (§. 238 *Geom.*), ABFE rectangulum (§. 100 *Geom.*). Eodem modo ostenditur, ducta HG ipsi BD parallela; fo- Tab. I. Fig. 1.

re

Tab.I. *Fig.* 1. re GHBD & BHIF, consequenter AEIH rectangula. Sit ergo AE $= c$, GD $= d$: erit EC $= a - c$, CG $= b - d$, atque hinc ACDB $= ab$, AEIH $= bc - dc$ & HGDB $= ad$ (§.375 *Geom.* & §.33 *Analyf.*). Quodsi areas rectangulorum AI, & HD subtrahas ab area rectanguli AD; relinquitur area rectanguli ECGI, hoc est, factum ex $a - c$ in $b - d$ (§. 375 *Geom.*). Reperitur adeo $(a - c)(b - d) = ab - ad - bc + cd$ (§. 30). Unde apparet, factum ex $-c$ in $-d$ esse $+ cd$. *Quod erat unum.*

In divisione quærimus, quoties quantitas una in altera contineatur (§. 69 *Arithm.*). Divisurus ergo quantitatem privativam per privativam quærit, quoties defectus unus in altero contineatur (§. 19): quotus adeo qui idem indicat (§. 69 *Arithm.*), utique quantitas positiva esse debet. *Quod erat alterum.*

SCHOLION.

35. *Possunt etiam Theorema 3 & 4 ope rectanguli demonstrari.*

THEOREMA VI.

36. *Si quantitas positiva per negativam multiplicatur aut dividitur; quantitas privativa prodit.*

DEMONSTRATIO.

Cum in multiplicatione quantitas multiplicanda toties sibimetipsi addatur, quoties multiplicans unitatem continet (§. 66 *Arithm.*); quantitas vero privativa sit defectus alicujus quantitatis (§. 19); proprie loquendo positiva per privativam multiplicari nequit. Hinc denuo multiplicatio tantum locum habet, ubi privativæ positivis junguntur, ita ut subtrahatur, quod plus justo fuit additum: id quod ita demonstramus.

Sint LMON & PMOQ rectangula, & in iis NO $= a$, MO $= b$, QO $= c$, erit NQ $= a - c$, area PQOM $= bc$, LNOM $= ab$, (§. 375 *Geom.*), consequenter LNQP $= b(a - c) = ab - bc$. Ergo b ductum in $-c$ efficit $-bc$. *Quod erat unum.* Tab.I. *Fig.* 2.

Factum ex $-c$ in $-d$ est $+ cd$ (§. 34). Ergo si $+ cd$ dividis per $-c$, quotus esse debet $-d$ (§. 210 *Arithm.*). *Quod erat alterum.*

THEOREMA VII.

37. *In multiplicatione ac divisione eadem signa efficiunt +, diversa —.*

DEMONSTRATIO.

Si quantitates se mutuo multiplicantes aut dividentes fuerint positivæ vel privativæ; quantitas prodit in utroque casu positiva (§. 32, 34): si vero altera privativa, altera positiva; quantitas prodit privativa (33, 36). Ergo eadem signa efficiunt +, diversa —. *Q. e. d.*

PROBLEMA III.

38. *Quantitates tam eodem, quam diversis signis affectas in se invicem ducere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 111 *Arithm.*), nisi quod notetur regula: *eadem signa faciunt +, diversa* — (§. 37).

$$\begin{array}{r} a + c \\ b + d \\ \hline + ad + cd \\ ab + bc \\ \hline ab + ad + bc + cd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b - d \\ a - b - d \\ \hline - ad - bd + dd \\ - ab - bb + bd \\ aa + ab - ad \\ \hline aa * - bb - 2ad * + dd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 = 8 + 4 - 2 \\ 2 = 8 - 4 - 2 \\ \hline - 16 - 8 + 4 \\ - 32 - 16 + 8 \\ 64 + 32 - 16 \\ \hline 20 = 64 * - 48 * + 4 \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{r} 8 = 10 - 2 \\ 7 = 10 - 3 \\ \hline - 30 + 6 \\ 100 - 20 \\ \hline 56 = 100 - 50 + 6 = 50 + 6 \end{array}$$

SCHOLION.

39. *Exemplum posterius demonstrationem exhibet ocularem multiplicationis per digitos. Nimirum 2 & 3 sunt distantiæ factorum a denario per digitos in utraque manu erectos repræsentari solitæ; quod relinquitur, factis ex distantiis istis in denarium a 100 subductis, indicatur digitis residuis in utraque manu &, ut ab erectis distinguantur, depressis, singulis nempe pro totidem denariis sumtis. Ita in nostro casu in altera manu deprimuntur digiti 2, in altera 3, simul 5, adeoque quinque numerantur decades. Summæ adjicitur factum ex digitis in utraque manu erectis in se invicem.*

PROBLEMA IV.

40. *Quantitates compositas dividere.*

RESOLUTIO.

Si quantitas una per alteram actu dividi potest, orta nempe ex divisore in aliam (§. 210 *Arithm.*); divisio instituitur ut in numeris (§. 117 *Arithm.*), notata tamen regula: *eadem signa faciunt* +, *diversa* — (§. 37).

In aliis casibus tantum observanda, quæ supra præcepimus (§. 8).

Ex. gr. dividere jubemur $aa - bb - 2ad + dd$ per $a - b - d$.

$$\begin{array}{l} a - b - d)\ aa - bb - 2ad + dd\ (a + b - d \\ \qquad aa - ab - ad \\ \hline \qquad + ab - bb - ad + dd \\ \qquad + ab - bb - bd \\ \hline \qquad\qquad - ad + bd + dd \\ \qquad\qquad - ad + bd + dd \\ \hline \qquad\qquad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

PROBLEMA V.

41. *Fractionem fractioni addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Omnia hic fiunt ut in Arithmetica communi (§. 236, 237 *Arithm.*).

Ex. gr. sint fractiones addendæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$. Reductæ ad eandem denominationem erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, (§. 235 *Arithm.*). Ergo summa $\frac{ad+bc}{bd}$ (§. 27).

Similiter sit fractio $\frac{a}{b}$ subtrahenda ex $\frac{c}{d}$. Reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$, ut ante. Ergo differentia $\frac{bc-ad}{bd}$ (§. 30).

PROBLEMA VI.

42. *Fractionem per fractionem multiplicare aut dividere.*

RESOLUTIO.

Denuo hic omnia fiunt ut in Arithmetica communi (§. 239, 243 *Arithm.*).

Ex. gr.

Ex. gr. Sint fractiones ſe mutuo multiplicaturæ $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: erit factum $\frac{ac}{bd}$.

Sint fractiones ſe mutuo diviſuræ $\frac{ac}{db}$ & $\frac{a}{b}$; erit quotus $\frac{ac}{bd} \cdot \frac{b}{a} = \frac{acb}{abd} = \frac{c}{d}$ (§.231 *Arithm.*).

COROLLARIUM I.

43. Cum $a = \frac{a}{1}$ (§.59 *Arithm.*); erit factum ex a in $\frac{c}{d}$, hoc eſt, ex integra quantitate in fractam, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{1} = \frac{ac}{d}$. Unde patet, numeratorem fractæ multiplicandum eſſe per integram, ſi fractio per integrum multiplicari debet: quemadmodum fit in Arithmetica communi (§.242 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

44. Ergo quotus ex $\frac{c}{d}$ per a, hoc eſt, ex quantitate fracta per integram diviſa, $\frac{c}{d} \cdot \frac{1}{a} = \frac{c}{ad}$. Unde patet, denominatorem dividendi multiplicandum eſſe per diviſorem, & factum ſubſcribendum numeratori immutato, ſi fractio per integrum dividenda.

PROBLEMA VII.

45. *Quantitatem quamcunque per diviſorem compoſitum dividere, utut diviſionem exactam non admittat.*

RESOLUTIO.

Diviſio inſtituatur ut in Arithmetica communi (§.117 *Arithm.*), tamdiu continuanda, donec quotus legem manifeſtet, juxta quam termini ejus in infinitum progrediuntur; obſervata ſubtractionis, itemque multiplicationis ac diviſionis lege de ſignorum mutatione (§.29, 37).

Ex. gr. Si quantitas dividenda b, dividens $a+c$, erit:

$$a+c)\,b\,\Big(\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc_2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4} \text{ \&c. in infin.}$$

$$b + \frac{bc}{a}$$

$$\overline{\qquad - \frac{bc}{a}}$$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$$

$$\overline{\qquad + \frac{bc^2}{a^2}}$$

$$+ \frac{bc^2}{a^2} + \frac{bc^3}{a^3}$$

$$\overline{\qquad - \frac{bc^3}{a^3}} \text{ \&c. in infin.}$$

Nimirum ſi b per a dividitur, quotus eſt $\frac{b}{a}$ (§.8). Factum ex $\frac{b}{a}$ in $a+c$ eſt $\frac{ab}{a} + \frac{bc}{a}$ (§.43), hoc eſt, $b + \frac{bc}{a}$ (§.223 *Arithm.*): quod ex dividenda b ſubductum relinquit $-\frac{bc}{a}$ (§.30). Si porro $-\frac{bc}{a}$ per a dividitur, erit quotus $-\frac{bc}{a^2}$ (§.44). Factum ergo ex $a+c$ in $-\frac{bc}{a^2}$, hoc eſt, $-\frac{abc}{a^2} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§. 43, 37), ſeu $-\frac{bc}{a} - \frac{bc^2}{a^2}$ (§.231 *Arithm.*), ex dividenda $-\frac{bc}{a}$ ſubtractum relinquit $+\frac{bc^2}{a^2}$ (§. 30). Unde patet quomodo diviſio continuanda. Inventis autem vel quinque terminis, tum quotus, tum ipſa diviſionis ratio inſinuat, quotum conſtare ex infinita terminorum ſerie, quorum numeratores ſunt potentiæ ipſius c, quarum exponentes a numero ordinis unitate differunt, per b multiplicatæ; denominatores vero potentiæ ipſius a, quarum expo-

nentes æquantur numero ordinis terminorum. Ex. gr. in termino tertio potentia ipſius e in numeratore ſecunda eſt, potentia vero ipſius a in denominatore tertia.

COROLLARIUM I.

46. Si $b = 1$ & $a = 1$, ſubſtituto valore hoc in quoto, prodit $1 = c + c^2 - c^3$ &c. in infin. Quare $1 : (1 + c) = 1 - c + c^2 - c^3$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

47. Quodſi termini in quoto continuo decreſcant, ſeries dat quotum vero quantumlibet propinquum. Ex. gr. ſi $b = 1$, $c = 1$ & $a = 2$; valoribus his ſubſtitutis in ſerie generali, aut diviſione ut in exemplo univerſali inſtituta, reperietur $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$ &c. Ponamus jam ſeriem terminari in termino quarto; in defectu quidem peccabitur, ſed qui minor quam $\frac{1}{32}$. Si eadem terminetur in ſexto; denuo peccabitur in defectu, ſed qui minor $\frac{1}{128}$. Series igitur quo longius continuatur, eo propius ad verum quotum accedit.

SCHOLION.

48. *Similiter invenietur* $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ &c. in infin. $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$ &c. in infin. $\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$ &c. in infin. *En legem conſtantem, juxta quam omnes fractiones, quarum numerator unitas, per ſeries infinitorum terminorum exprimere licet. Sunt nempe illæ ſeries progreſſiones geometricæ decreſcentes, ita quidem ut numerator ſemper ſit unitas, denominator termini primi idemque exponens rationis unitate differat a denominatore fractionis reſolvendæ.*

COROLLARIUM III.

49. Si termini in quoto continuo creſcunt, ſeries a quoto tanto magis diſcedit, quo longius continuatur, nec quoto æqualis fit, niſi terminetur, ultimumque reſiduum ſub ſigno ſuo adjiciatur. Ex. gr. Sit $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; reperietur quotus $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128$ &c. Terminus unus 1 ſuperat $\frac{1}{3}$ exceſſu $\frac{2}{3}$; termini duo deficiunt $\frac{4}{3}$; termini tres excedunt $\frac{8}{3}$; quatuor deficiunt $\frac{16}{3}$; & ita porro. Ponamus ſeriem terminari in -8; erit $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$. Sed $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$. Ergo $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$. Similiter ſi ſit $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$; reperietur quotus $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. ubi termini numero pares, $= 0$, deficiunt continuo $\frac{1}{2}$; termini autem numero impares conficiunt 1; conſequenter exceſſus $= \frac{1}{2}$. Ergo $\frac{1}{1+1} = 1 - \frac{1}{2}$, vel $= 0 + \frac{1}{2}$. Ponamus ſeriem univerſalem (§.46) terminari in $-c^3$: erit $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} = (1 + c - c - c^2 + c^2 + c^3 - c^3 - c^4 + c^4) : (1 + c)$ (§.235 *Arithm.*) $= \frac{1}{1+c}$ (§.21).

SCHOLION I.

50. *Tyrones hoc Problema cum ſuis Corollariis ſub initium prætermittere poſſunt, donec inferius ad illud provocetur.*

SCHOLION II.

51. *Quoniam ſi* $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ *in ſeriem reſolvitur, quotus a fractione propoſita, quantumlibet continuatus, continuo differt* $\frac{1}{2}$ (§.49), *reſolutio in præſenti caſu irrita evadit. Unde patet fons erroris, quem commiſit* Guido GRANDUS *in Tractatu* De quadratura circuli & hyperbolæ, *Cor.* 3, *Prop.* 7, *Part.* 1, *p.m.* 29, *ubi infert, ob* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. *in infinitum* $= 0$, *ſummam infinitarum nullitatum eſſe* $\frac{1}{2}$. *Nec veritatem attigiſſe liquet* LEIBNITIUM *in* Actis Eruditorum *Tom.* 5, Supplement. *p.*264, *& ſeqq.*

DEFINITIO IV.

52. *Series*, quæ ad verum valorem continuo appropinquant, dicuntur *convergentes*: quæ ab eodem continuo recedunt, *divergentes*.

COROL-

COROLLARIUM I.

53. Ergo series fractionum continuo decrescentium (§.47, 48) sunt convergentes: ceteræ vero, quarum termini continuo crescunt (§.49), divergentes.

PROBLEMA VIII.

54. *Potentiam quamcunque per aliam ejusdem radicis multiplicare vel dividere.*

RESOLUTIO.

I. In multiplicatione addantur exponentes, summa est exponens facti.

x^3	y^m	y^m	a^m	x^n
x^4	y^m	y^n	a^r	x^s
x^7	y^{2m}	y^{m+n}	a^{m+r}	x^{n+s}

II. In divisione exponens dignitatis dividentis subtrahatur ab exponente dividendæ; residuum est exponens quoti

$$\frac{x^7}{x^4}\Big(x^3 \qquad \frac{y^{m+n}}{y^n}\Big(y^m \qquad \frac{a^m x^n}{a^r x^s}\Big(a^{m-r} x^{n-s}$$

DEMONSTRATIO.

Cum exponentes dignitatum in progressione arithmetica (§. 251, 333 *Arithm.*), dignitates in geometrica (§. 250, 332 *Arithm.*) progrediantur; illi pro harum logarithmis recte habentur (§. 334 *Arithm.*). Ergo summa exponentium, quos habent dignitates se mutuo multiplicantes, est exponens facti (§. 337 *Arithm.*); differentia exponentium, quos habent dignitates se mutuo dividentes, est exponens quoti (§.343 *Arithm.*). *Q. e. d.*

SCHOLION.

55. *Progressiones istæ hæ sunt:*
$x^0, x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.
Nempe $x : x = x^1 : x^1 = x^0$ (§. 54). *Sed* $x : x = 1$ (§. 69 Arithm.). *Ergo* $x^0 = 1$ (§. 87 Arithm.).

PROBLEMA IX.

56. *Potentiam quamcunque datam ad aliam dati exponentis evehere; aut ex eadem dati similiter exponentis radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Quoniam potentia data, intuitu ejus ad quam evehenda, radix est (§. 246 *Arithm.*) & exponentes logarithmi dignitatum existunt, *per demonstr. in Probl. præc.* (§. 54): exponens potentiæ novæ habebitur, potentiæ datæ exponente in exponentem ejus, ad quam evehi debet, ducto (341 *Arithm.*).

Ex. gr. Potentia x^m evecta ad dignitatem n est x^{mn}. Potentia y^3 evecta ad dignitatem 2 est y^6.

II. Non absimili modo liquet, exponentem radicis haberi, si exponens dignitatis datæ dividatur per exponentem radicis datum (§. 341 *Arithm.*).

Ex. gr. Radix quadrata ex x^6 est x^3: radix n ex x^{mn} est x^m: radix n ex x^m est $x^{m:n}$.

COROLLARIUM.

57. Est itaque $\sqrt{x} = x^{1:2}$, $\sqrt[3]{x} = x^{1:3}$ $\sqrt[n]{x^m} = x^{m:n}$ (§.341 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales ad expressionem rationalem reduci possunt.

SCHOLION.

58. *Quantum in Analysi commodi afferat hæc reductio ex capite subsequente elucescet. Etenim si quantitates irrationales ad formam rationalium reducantur; peculiari pro iis calculo opus non est, sed rationalium instar tractari possunt: quemadmodum primi docuerunt* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS.

CAPUT II.

De Arithmetica Irrationalium.

PROBLEMA X.

59. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad eandem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ & $\sqrt[s]{y^r}$. Quoniam $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ & $\sqrt[s]{y^r} = y^{r:s}$ (§.57), diversitas denominationis ab exponentibus diversis pendet, exponentes vero fractiones sunt, quæ ad alias ipsis æquales, sed ejusdem denominationis reduci possunt (§. 235 *Arithm.*). Ergo quantitates surdæ reducuntur ad eandem denominationem, exponentibus earundem ad eandem reductis. Erit adeo $x^{n:m} = x^{ns:ms}$ & $y^{r:s} = y^{mr:ms}$ seu $x^{n:m} = \sqrt[ms]{x^{ns}}$ & $y^{r:s} = \sqrt[ms]{y^{mr}}$ (§.57).

Ex.gr. Sint quantitates reducendæ $\sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{5}$. Quoniam $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{5} = 5^{1:3}$ (§.57); erunt reductæ $2^{3:6}$ & $5^{2:6}$ (§.235 *Arithm.*), hoc est, $\sqrt[6]{2^3}$ & $\sqrt[6]{5^2}$ (§.57); seu, 2 actu ad potentiam tertiam & 5 ad secundam evehendo, $\sqrt[6]{8}$ & $\sqrt[6]{25}$.

SCHOLION.

60. *Quodsi quis ægre admiserit reductionem ad eandem denominationem in exponentibus quantitatum irrationalium factam; is easdem formulas, quas ejus ope elicuimus, per Algebram investigare potest, quemadmodum inferius docebimus.*

PROBLEMA XI.

61. *Quantitates irrationales ad simpliciorem expressionem reducere.*

RESOLUTIO.

Sit quantitas reducenda $\sqrt[m]{a^n x^m}$. Quoniam ea æqualis est ipsi $a^{n:m} x^{m:m}$ (§.57), & $x^{m:m} = x$ (§.56.), erit $\sqrt[m]{a^n x^m} = a^{n:m} x = x \sqrt[m]{a^n}$. Locum ergo habet reductio, si quantitas sub signo radicali per istiusmodi potentiam, quæ eundem cum radicali signo exponentem habet, divisibilis. Divisio nempe actu instituenda, quoto sub signo radicali relicto & divisoris radice eidem præfixa.

Ex.gr. Sit reducenda $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8.2}$. Quoniam 8 est cubus perfectus, cujus radix 2: habebimus $\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}$. Eodem modo reperitur $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8.3} = 2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{16.3} = 2\sqrt[4]{3}$.

COROLLARIUM I.

62. Si quantitates irrationales ejusdem gradus ad simpliciorem expressionem reductæ sub signis radicalibus eandem quantitatem relinquant; erunt inter se ut quantitates rationales signis præfixæ (§. 178 *Arithm.*); consequenter quantitates irrationales inter se commensurabiles esse possunt (§. 160 *Arithm.*).

Ex.gr. $\sqrt{8} = \sqrt{4.2} = 2\sqrt{2}$, & $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$. Ergo $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2:3$, hoc est, $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2:3$. In casu reliquo sunt incommensurabiles.

SCHOLION I.

63. *Istud quantitatum irrationalium genus* communicantium *nomine venire solet.*

COROL-

COROLLARIUM II.

64. Per præsens adeo Problema invenitur ratio rationalis irrationalium, si qua datur.

COROLLARIUM III.

65. Quia $\sqrt[m]{a^n x^m} = x \sqrt[m]{a^n}$ (§. 61); quantitas ex parte rationalis, ex parte irrationalis ad pure irrationalem reducitur, si quantitas rationalis ad eam dignitatem evehitur, cujus gradum indicat exponens signo radicali præfixus, & dignitas per quantitatem sub signo radicali multiplicatur. E. gr. $5\sqrt{2} = \sqrt{2.25} = \sqrt{50}$, & $5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.5^3} = \sqrt[3]{3.125} = \sqrt[3]{375}$.

SCHOLION II.

66. *Quodsi quæsiveris, quomodo in resolutione innotescat, utrum quantitas sub signo radicali posita per potentiam aliquam requisitam sit divisibilis, nec ne; & quænam sit ista potentia; in divisores resolvenda est, inter quos locum obtineant necesse est omnes potentiæ a prima usque ad requisitam, si cum numeris nobis res fuerit. E. gr. Quæritur an $\sqrt[4]{368}$ sit divisibilis per aliquam potentiam quarti gradus. Resoluturus numerum 368 in suos divisores, reperiet tentando*

2	184
4	92
8	46
16	23

nempe divisionem per numeros minores & quotos majores a latere ponendo. Invenies hic 2 potentiam primi gradus, 4 potentiam secundi, 8 potentiam tertii & 16 potentiam quarti. Ergo 16 est divisor quæsitus, consequenter $\sqrt[4]{368} = 2\sqrt[4]{23}$.

PROBLEMA XII.

67. *Quantitates irrationales addere, aut unam ex altera subtrahere.*

RESOLUTIO.

Si quantitates irrationales fuerint communicantes, adeoque reductæ (§. 61) fuerint commensurabiles (§. 63); quantitates rationales extra vinculum adduntur & a se invicem subtrahuntur; ibique summa, hic differentia denuo præfigitur signo radicali. Reliqua omnia sunt ut in additione & subtractione rationalium.

Ita reperietur $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ (§. 61) $= 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$ (§. 65) & $\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3.8} + \sqrt[3]{3.27} = 2\sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 5\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{375}$.

Similiter $\sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ & $\sqrt[3]{375} - \sqrt[3]{81} = 5\sqrt[3]{3} - 3\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{24}$.

Contra $\sqrt{7}$ & $\sqrt{5}$ cum sint incommensurabiles (§. 62); summa erit $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ (§. 27), & differentia $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ (§. 30).

Hinc & intelliguntur exempla in compositis tum in additione:

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 7\sqrt{7} + 8\sqrt{5} \\ \sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{7} - 4\sqrt{5} \\ \hline 5\sqrt{3} + 4\sqrt{2} + 10\sqrt{7} + 4\sqrt{5} \text{ summa;} \end{array}$$

hoc est $\sqrt{3.25} + \sqrt{2.16} + \sqrt{7.100} + \sqrt{5.16}$
seu $\sqrt{75} + \sqrt{32} + \sqrt{700} + \sqrt{80}$

tum in subtractione

$$\begin{array}{l} 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 8\sqrt{10} \\ 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 9\sqrt{10} \\ \hline 2\sqrt{2} - 12\sqrt{3} + 17\sqrt{10} \text{ different.} \end{array}$$

hoc est $\sqrt{2.4} - \sqrt{3.144} + \sqrt{10.289}$
seu $\sqrt{8} - \sqrt{432} + \sqrt{28900}$

DEMONSTRATIO.

Omnia manifesta sunt ex demonstratione Probl. 1 & 2 (§. 27, 30).

PROBLEMA XIII.

68. *Quantitates irrationales per irrationales multiplicare ac dividere.*

RESO-

Resolutio.

Multiplicentur aut dividantur quantitates ſub ſigno radicali; ibi facto, hic quoto præfigatur ſignum idem radicale cum ſuo exponente. Quodſi radicales quantitates fuerint diverſæ denominationis ante omnia reducantur ad eandem (§. 59).

Ex. gr. in multiplicatione $\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{15}$ & $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$. Item in compoſitis

$$\begin{array}{cc} \sqrt{3}+\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{6}-2 & +\sqrt{6}+3 \\ 3+\sqrt{6} & 2+\sqrt{6} \\ \hline 3-2=1 & 2\sqrt{6}+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7\sqrt{3}-5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{8}+3\sqrt{6} \\ \hline +21\sqrt{18}-15\sqrt{12} \\ 35\sqrt{24}-100 \\ \hline 35\sqrt{24}+21\sqrt{18}-15\sqrt{12}-100 \end{array}$$

hoc eſt $70\sqrt{6}+63\sqrt{2}-30\sqrt{3}-100$

$$\begin{array}{l} \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{32} \\ \hline +16+8+32 \\ +4+2+8 \\ 8+4+16 \\ \hline 98 \end{array}$$

Similiter in diviſione $\sqrt{8}:\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$ & $\sqrt{12}:\sqrt{6}=\sqrt{2}$. Item in compoſitis;

$$\begin{array}{l} \sqrt{3})\ \sqrt{15}-\sqrt{6}+\sqrt{12}\ (\sqrt{5}-\sqrt{2}+2 \\ \quad \sqrt{15} \\ \hline \quad -\sqrt{6}+\sqrt{12} \\ \quad -\sqrt{6} \\ \hline \quad +\sqrt{12}=2\sqrt{3} \\ \quad\quad 2\sqrt{3} \\ \hline \quad\quad 0 \end{array}$$

Scholion I.

69. *Interdum etiam diviſio locum habet, ſi diviſor compoſitus eſt. Sed cum rariſſimus ſit ejus uſus & ea diviſione ignorata maxime præclaros in Analyſi progreſſus facere detur, nec difficultate res careat; eam hic exponi ſuperfluum judicamus. Docet ipſam* Ozanamus *in* Novis Elementis Algebræ (*a*).

Scholion II.

70. *Cæterum ex tradito hactenus calculo liquet, ſi quantitatem duplici ſigno radicali affici contingat, ex.gr. ſi fuerit* $(3+\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}}$, *operationes omnes eodem modo peragi, modo notetur, quantitatem ſub primo vinculo eodem modo tractari debere, quo rationalem in antecedentibus tractavimus. Ex.gr.*

$$\sqrt{(8\sqrt{3})} = 2\sqrt{(2\sqrt{3})}\ (\S.\ 61)$$
$$\sqrt{(9\sqrt{12})} = \sqrt{(2.9\sqrt{3})} = 3\sqrt{(2\sqrt{3})}$$

$$\begin{array}{rl} \hline \sqrt{(8\sqrt{3})}+\sqrt{(9\sqrt{12})} & = 5\sqrt{(2\sqrt{3})} \\ & = \sqrt{(50\sqrt{3})} \\ & = \sqrt{\sqrt{7500}}. \end{array}$$

Similiter in multiplicatione

$$\begin{array}{ll} 3+\sqrt{2} & \sqrt{\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\sqrt{2}} & \sqrt{(5\sqrt{5})} \\ 3\sqrt{\sqrt{2}}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & 5+\sqrt{(5\sqrt{10})} \\ \text{hoc eſt } \sqrt{(9\sqrt{2})}+\sqrt{(2\sqrt{2})} & \text{ſeu } 5+\sqrt{\sqrt{250}} \\ \text{ſeu } \sqrt{\sqrt{162}}+\sqrt{\sqrt{8}} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{(3+\sqrt{2})} \\ \sqrt{(3+\sqrt{2})} & \sqrt{(3-\sqrt{2})} \\ \sqrt{(5-\sqrt{3})} & \overline{\quad -3\sqrt{2}-2} \\ \overline{\quad -3\sqrt{3}-\sqrt{6}} & 9+3\sqrt{2} \\ 15+5\sqrt{2} & \overline{\qquad\quad \sqrt{7}} \\ \overline{\sqrt{(15+5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{6})}} & \end{array}$$

Dicuntur iſtiuſmodi Radices, *qualis eſt* $\sqrt{(3+\sqrt{2})}$, univerſales.

(*a*) *Nouveaux Elémens* d'*Algebre*, Lib. I. Probl. 4. & ſeqq. p. 7. & ſeqq.

Scho-

SCHOLION III.

71. Radices *vero* imaginariæ *dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti* $\sqrt{-2}$, *cum quadratum* -2 *sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum* (§. 246 Arithm. & §. 37 Anal.). *Facile autem patet additionem & subtractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium.* Ita $\sqrt{-18}+\sqrt{-8}=3\sqrt{-2}+2\sqrt{-2}=5\sqrt{-2}=\sqrt{-50}$ & $\sqrt{-18}-\sqrt{-8}=\sqrt{-2}$. *Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ, in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum* $-$: *alias enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum. Quamobrem regula de signis tantummodo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.*

Ex. gr.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} \\ \sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline +4+2 \\ -8-4 \\ \hline -6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}.\sqrt{-2}=-2$, & $+1.-1=-1$. *Ergo* $-1.-2=+2$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -6\sqrt{-10}-4\sqrt{-6} \\ -45+6\sqrt{-15} \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

CAPUT III.

De usu Calculi litteralis in inveniendis Theorematis.

PROBLEMA XIV.

72. *INvenire, qualis numerus prodeat ex parium additione, subtractione, ac multiplicatione.*

Quoniam numerus par per 2 dividi potest (§. 72 *Arithm.*), dicatur $2a$. Similiter alius numerus par sit $=2c$. Erit

$$\begin{array}{r} 2a \\ 2c \\ \hline \text{Summa } 2a+2c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a \\ 2c \\ \hline \text{Diff. } 2a-2c \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a \\ 2c \\ \hline \text{Fact. } 4ac \end{array}$$

Theorema: Summa, item differentia, atque factum duorum numerorum parium est numerus par.

PROBLEMA XV.

73. *Invenire, qualis numerus prodeat, si parem impari addas, vel parem ab impari subtrahas, vel denique parem per imparem multiplices.*

Numerus par sit $2a$ (§. 72 *Arith.*), impar $2c+1$ (§. 73 *Arithm.*). Erit

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 2a+2c+1 \text{ Summa:} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 2c+1-2a \text{ Diff.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2c+1 \\ 2a \\ \hline 4ac+2a \text{ Factum.} \end{array}$$

Theorema. Si parem impari addas, aut unum ex altero subtrahas; ibi aggregatum, hic differentia est numerus impar. Si vero numerus par & impar se mutuo multiplicent, factum est numerus par.

PROBLEMA XVI.

74. *Invenire, qualis prodeat numerus, si impar impari addatur, aut unus ex altero subtrahatur, aut si impar imparem multiplicet.*

Sint numeri impares $2a+1$ & $2b+1$ (§. 73 *Arithm.*): erit

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a+2b+2 \end{array} \text{ Summa.} \qquad \begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline 2a-2b \end{array} \text{ Differ.}$$

$$\begin{array}{r} 2a+1 \\ 2b+1 \\ \hline +2a+1 \\ 4ab+2b \\ \hline 4ab+2a+2b+1 \end{array} \text{ Factum.}$$

Theorema: Si numerus impar impari additur, aut ab eo subtrahitur; ibi summa, hic differentia est numerus par. Si vero impar imparem multiplicet, factum est numerus impar.

PROBLEMA XVII.

75. *Invenire, qualis numerus prodeat, si meros numeros pares, aut meros impares multitudine pari, aut denique numeros impares multitudine impari addas.*

Sint numeri pares $2a$, $2b$, $2c$, $2d$, &c. erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. numerus par (§. 72 *Arithm.*).

Theorema: Summa numerorum parium quotcunque est numerus par.

Sint numeri impares $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$ &c. (§. 73 *Arithm.*) numerus eorundem par $2m$ (§. 72 *Arithm.*). Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m$, numerus par (§. 72 *Arithm.*). Tot scilicet sunt unitates, quot termini.

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, multitudine pari, est numerus par.

Sint numeri impares, ut ante, $2a+1$, $2b+1$, $2c+1$, $2d+1$, &c. numerus eorundem impar $2m+1$. Erit summa $2a+2b+2c+2d$ &c. $+2m+1$, numerus impar (§. 73 *Arithm.*).

Theorema. Summa numerorum imparium quotcunque, si numero impares fuerint, numerus est impar.

SCHOLION.

76. *Notetur in his Problematibus denominandi artificium, quod consistit in analytica expressione numeri paris & imparis, quæ eorum definitiones repræsentat.*

PROBLEMA XVIII.

77. *Invenire, qualis sit numerus per quem impar parem metitur.*

Quodsi numerus impar parem metitur, erit par factum ex impari per parem, (§. 74 *Arithm.* & 73 *Anal.*), adeoque $(2a+1)\,2b = 4ab+2b$. Est igitur $(4ab+2b) : (2a+1) = 2b$ (§. 210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens parem eum metitur per parem.

COROLLARIUM I.

78. Patet simul, numerum, qui metitur parem per imparem, esse parem.

COROLLARIUM II.

79. Et quoniam $(2ab+b) : (2a+1) = b$, liquet porro, si impar metiatur parem, illum quoque hujus dimidium metiri.

PRO-

PROBLEMA XIX.

80. *Invenire, qualis sit numerus, per quem impar imparem metitur.*

Quodsi impar imparem metitur, erit hic factum ex impari in imparem (§.74 *Arith.* & §.74 *Anal.*), adeoque $(2a+1)(2b+1)$ seu $4ab+2a+2b+1$. Est igitur $(4ab+2ab+2b+1):(2a+1)=2b+1$ numerus impar (§.210 *Arithm.*).

Theorema. Impar metiens imparem eum metitur per imparem.

PROBLEMA XX.

81. *Determinare differentiam quadratorum, quorum radices unitate differunt.*

Sit radix una $=n$, erit altera $n+1$:
quadratum majoris n^2+2n+1 (§.246
minoris n^2 *Arithm.*)

Differentia $2n+1$

Theorema. Differentia duorum quadratorum, quorum radices unitate differunt, est numerus impar duplo radicis minoris unitate aucto æqualis, seu summa radicum.

COROLLARIUM I.

82. Facillime ergo construuntur Tabulæ numerorum quadratorum, pro radicibus in serie naturali progredientibus. Summa nempe radicis antecedentis & consequentis continuo additur quadrato antecedenti, ut prodeat consequens.

COROLLARIUM II.

83. Si $n=1$, erit $2n+1=3$: si $n=2$, erit $2n+1=5$: si $n=3$, erit $2n+1=7$: si $n=4$, erit $2n+1=9$ &c. Differentiæ itaque numerorum quadratorum sunt numeri impares in continua serie progredientes: unde ex continua numerorum imparium additione nascuntur numeri quadrati.

Radic.	Num.impar.	Num.Quadr.
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	16
5	9	25
6	11	36
7	13	49
8	15	64
9	17	81
10	19	100

PROBLEMA XXI.

84. *Determinare differentiam duorum cuborum, quorum radices unitate differunt.*

Sint radices n & $n+1$: erit
Cubus major n^3+3n^2+3n+1 (§.248
minor n^3 *Arithm.*).

Differentia $3n^2+3n+1$,
hoc est, $n^2+2n+1+2n^2+n$. Sed $n^2+2n+1=(n+1)^2$. Ergo differentia inventa $(n+1)^2+2n^2+n$.

Theorema. Differentia duorum numerorum cubicorum, quorum radices unitate differunt, est aggregatum ex quadrato radicis majoris, duplo quadrato minoris & radice minore.

Sit jam radix tertia	$n+2$
erit cubus	$n^3+6n^2+12n+8$
præced.	n^3+3n^2+3n+1
Differ.	$3n^2+9n+7$
Differ. præc.	$3n^2+3n+1$
Differ. 2.	$6n+6$

 Theo-

Theorema 2. Differentia secunda trium cuborum in serie naturali est aggregatum ex sextuplo radicis primæ & senario, seu factum ex radice secunda in senarium.

Quod si jam $n=1$, erit $6n+6=6+6=12$; si $n=2$, erit $6n+6=12+6=18$: si $n=3$, $6n+6=18+6=24$: si $n=4$, $6n+6=24+6=30$, &c.

Theorema 3. Differentiæ secundæ cuborum in serie naturali progredientium est progressio arithmetica, cujus terminus primus 12, differentia terminorum 6.

COROLLARIUM.

85. Constructo itaque numerorum quadratorum Canone (§. 82), per solam additionem inde porro construitur Canon numerorum cubicorum, per Theorema primum; nondum constructo, per tertium, quemadmodum ex sequente Tabula liquet.

Rad.	Cubi	Diff. 1.	Diff. 2.
1	1		
2	8	7	12
3	27	19	18
4	64	37	24
5	125	61	30
6	216	91	36
7	343	127	42
8	512	169	48
9	729	217	54
10	1000	271	

PROBLEMA XXII.

86. *Determinare quantitatem rectanguli ex summa duarum quantitatum in majorem vel in minorem, itemque in differentiam earundem.*

Sit quantitas major Q, minor q: erit summa $Q+q$, differentia $Q-q$. Hinc (§. 375 *Geom.*)

$$\begin{array}{r} Q+q \\ Q \\ \hline Q^2+Qq \end{array} \qquad \begin{array}{r} Q+q \\ q \\ \hline Qq+q^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} Q+q \\ Q-q \\ \hline -Qq-q^2 \\ Q^2+Qq \\ \hline Q^2 \quad -q^2 \end{array}$$

Theorema. Rectangulum ex summa duarum quantitatum (ex. gr. linearum) in alterutram æquatur rectangulo partis unius in alteram atque quadrato partis alterutrius. Rectangulum vero ex summa in differentiam æquale est differentiæ quadratorum partium.

COROLLARIUM.

87. Quodsi rectangula Q^2+Qq & $Qq+q^2$ addantur; prodit $Q^2+2Qq+q^2$ quadratum ipsius $Q+q$ (§. 261 *Arithm.*). Quare rectangula ex toto in partem alterutram simul æquantur quadrato totius.

PROBLEMA XXIII.

88. *Si totum sit divisum in duas partes æquales & in duas inæquales, determinare rectangulum partium inæqualium.*

Sint partes æquales a & a, differentia inter partem æqualem & inæqualem b; erit inæqualium major $a+b$, minor $a-b$; consequenter $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Ergo si addatur b^2, habebitur a^2.

Theorema. Si totum sit divisum in duas partes æquales & inæquales; erit rectangulum partium inæqualium una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali, æquale quadrato partis æqualis.

COROL-

COROLLARIUM.

89. Quoniam $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (§.261 *Arith.*); erit summa $2a^2 + 2b^2$, hoc eſt, ſumma quadratorum partium inæqualium æqualis eſt duplo quadrato partis dimidiæ & duplo quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

PROBLEMA XXIV.

90. *Determinare alia rectangula ex partibus duabus, in quas totum aliquod diviſum.*

Sint partes Q & q: erit totum $Q+q$, hujus quadratum $Q^2 + 2Qq + q^2$. Quodſi Q^2 addas; prodibit $2Q^2 + 2Qq + q^2 = 2Q(Q+q) + q^2$.

Theorema. Quadratum totius, una cum quadrato partis unius, æquale eſt rectangulo ex duplo ejuſdem partis in totum atque quadrato partis alterius.

Quodſi $2Q+q$ in ſeipſum ducas; prodibit $4Q^2 + 4Qq + q^2$.

Theorema. Quadratum ex toto & parte una æquatur quadrato partis alterius, una cum quadruplo quadrato partis illius & quadruplo rectangulo partium in ſe invicem.

PROBLEMA XXV.

91. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in partes tres inæquales diviſo atque parte una.*

Sit totum $a+b+c$; erit $(a+b+c)c = ac + bc + c^2$.

Theorema. Rectangulum ex toto in tres partes inæquales diviſo in partem unam æquatur quadrato ejuſdem partis, atque rectangulo ex eadem in ſummam duarum reliquarum.

PROBLEMA XXVI.

92. *Determinare quantitatem rectanguli ex linea in partes quotcunque diviſa & inſecta altera.*

Sint partes lineæ ſectæ a, b, c, &c. erit linea ſecta $= a+b+c$, &c. Sit porro linea inſecta $= d$: erit $(a+b+c$, &c.$)$ $d = ad + bd + cd$, &c.

Theorema. Si linea recta fuerit in partes quotcunque diviſa & præterea alia inſecta, erit rectangulum ſub iis comprehenſum æquale rectangulis ſub inſecta & ſingulis ſectæ partibus contentis.

PROBLEMA XXVII.

93. *Determinare quantitatem rectangulorum ex toto in duas partes diviſo in partes ſingulas.*

Sit totum $= a + b$, erit $(a+b)a = a^2 + ab$ & $(a+b)b = ab + b^2$. Ergo ſumma $= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ (§. 261 *Arithm.*),

Theorema. Si recta ſecta ſit utcunque, erunt rectangula ſub tota & partibus comprehenſa quadrato totius æqualia.

PROBLEMA XXVIII.

94. *Determinare quantitatem rectanguli ex toto in duas partes æquales diviſo & adjecto in adjectum.*

Sit totum in duas partes æquales diviſum $= 2a$ & adjectum $= c$, erit compoſitum $= 2a+c$; conſequenter $(2a+c)c = 2ac + c^2$. Sed $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Ergo differentia $= a^2$.

Theorema. Rectangulum ſub toto & adjecto in adjectum, una cum quadrato partis dimidiæ, eſt æquale quadrato compoſiti ex dimidio & adjecto.

PROBLEMA XXIX.

95. *Invenire Theorema generale pro binomio ad dignitatem quamcunque evehendo.*

 Sit

Sit $a+b$ radix binomia. Ducatur ea in se ipsam, erit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$; $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, &c. (§. 250 *Arithm.*): ceu videre est ex Tabula, quam hic exhibemus.

$1a$	$1b$									
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$								
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$							
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$						
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$					
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$				
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$			
$1a^8$	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	$1b^8$		
$1a^9$	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$126a^5b^4$	$126a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	$1b^9$	
$1a^{10}$	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	$1b^{10}$

Ex Tabulæ hujus consideratione manifestum est, terminos potentiarum componi ex quibusdam factis litteralibus, & numeris præfixis, quos *Uncias* cum OUGHTREDO (*a*) vocant. Patet autem ulterius, facta reperiri, si fiant duæ progressiones geometricæ, quarum prima a potentia desiderata partis primæ radicis incipiat & in unitate desinat, altera vero ab unitate incipiat & in desiderata potentia partis secundæ radicis desinat, atque termini ejusdem ordinis in utraque serie in se invicem ducantur. Ex. gr. quærenda potentia sexta: scribe

$a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$. Series I.
$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6$. Series II.

erunt $a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6$ facta, ex quibus componitur potentia sexta ipsius $a+b$.

(*a*) *Clavis Mathematica*, c. 12. §. 6. p. m. 38.

Apparet denique, uncias reperiri, si exponentes potentiarum secundæ seriei seu ipsius b sub exponentibus potestatum primæ seriei seu ipsius a scribantur, & nota prima ex serie superiore sumatur pro numeratore, prima ex inferiore pro denominatore fractionis, quæ vicem subit unciæ termini secundi potestatis; similiter factum ex nota prima in secundam ex serie superiore sumatur pro numeratore, factum ex prima in secundam ex serie inferiori pro denominatore fractionis, quæ unciæ termini tertii potentiæ æqualis &c. Ex. gr. pro potentia sexta erit:

6. 5.

6. 5. 4. 3. 2. 1.
1. 2. 3. 4. 5. 6.

Hinc $\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſecundi potentiæ ſextæ; $\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini tertii; $\frac{6.5.4}{1.2.3}=\frac{120}{6}=20$, uncia termini quarti; $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}=\frac{6.5}{1.2}=\frac{30}{2}=15$, uncia termini quinti; $\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}=\frac{6}{1}=6$, uncia termini ſexti; $\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}=1$, uncia termini ultimi.

Habemus adeo methodum datam radicem binomiam ad quamcunque potentiam determinatam evehendi. Quodſi vero regulam pro potentia indeterminata deſideres, non alia re opus eſt, quam ut exponens dicatur m: ita habebimus

$$a^m,\ a^{m-1},\ a^{m-2},\ a^{m-3},\ a^{m-4},\ a^{m-5}$$
$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5, \text{\&c.}$$

adeoque $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4 + a^{m-5}b^5$, &c. quæ ſunt facta pro terminis potentiæ indeterminatæ in infinitum continuandæ. Similiter inveniuntur unciæ, ut ante. Cum enim exponentes ſint:

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.}{1.\ 2\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6} \quad \text{\&c.}$$

erit $\frac{m}{1}$, uncia termini ſecundi potentiæ;
$\frac{m.m-1}{1.2}$, uncia tertii;
$\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}$, uncia quarti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, uncia quinti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$, uncia ſexti;
$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}$, uncia ſeptimi &c.

Quare ſi has uncias in facta ipſis reſpondentia & paulo ante reperta ducas; prodibit formula binomii ad potentiam indeterminatam elevati;

$$a^m$$
$$+\frac{m}{1}a^{m-1}b$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b^4$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{m-5}b^5$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^6$$

&c. in infinitum

Quoniam vero $a^{m-1}=a^m:a$; $a^{m-2}=a^m:a^2$; $a^{m-3}=a^m:a^3$; $a^{m-4}=a^m:a^4$; $a^{m-5}=a^m:a^5$; &c. in infinit. (§. 54) his valoribus ſubſtitutis (§. 15 *Arithm.*) formula in ſequentem degenerat:

$$a^m$$
$$+\frac{m.a^m b}{1.a}$$
$$+\frac{m.m-1.a^m b^2}{1.\ 2.\ a^2}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.a^m b^3}{1.\ 2.\ 3.\ a^3}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.a^m b^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ a^4}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.a^m b^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ a^5}$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.a^m b^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ a^6}$$

&c. in infinitum.

Quodſi jam porro cum viro ſummo *Iſaaco* NEWTONO (*a*) ponamus $a=P$ & $b:a=Q$; erit $a^m=P^m$; $b^2:a^2=Q^2$; $b^3:a^3=Q^3$; $b^4:a^4=Q^4$; $b^5:a^5=Q^5$ &c.

(*a*) In Epiſtola A. 1676 ad LEIBNITIUM data, apud WALLISIUM, Operum Vol. III. f. 622.

&c. consequenter his valoribus substitutis formula:

$$P^m$$
$$+\frac{m}{1}P^m Q$$
$$+\frac{m.m-1}{1.\ \ 2.}P^m Q^2$$
$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 3}P^m Q^3$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}.\ P^m Q^4 \text{ \&c.}$$

Ponatur porro $P^m = A$; erit $\frac{m}{1}P^m Q = \frac{m}{1}AQ$.

Sit $\frac{m}{1}P^m Q = B$: erit $\frac{m.m-1}{1.\ \ 2}P^m Q^2 = \frac{m-1}{2}BQ$.

Sit $\frac{m-1}{2}BQ = C$; erit $\frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 3}P^m Q^3 = \frac{m-2}{3}CQ$.

Sit $\frac{m-2}{3}CQ = D$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ 3}\frac{m-3}{4}P^m Q^4 = \frac{m-3}{4}DQ$

Sit $\frac{m-3}{4}DQ = E$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ 3}\frac{m-3.m-4}{4.\ \ 5}P^m Q^5 = \frac{m-4}{5}EQ$

Sit $\frac{m-4}{5}EQ = F$; erit $\frac{m.m-1.m-2.}{1.\ \ 2.\ \ 3}\frac{m-3.m-4.m-5}{4.\ \ 5.\ \ 6}P^m Q^6 = \frac{m-5}{6}FQ$

&c. in infinitum.

Habetur ergo tandem

$$(a+b)^m = (P+PQ)^m = P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ + \frac{m-4}{5} + EQ\,\frac{m-5}{6}FQ \text{ \&c in infinit.}$$

SCHOLION I.

96. *Equidem hoc Theorema nonnisi per inductionem eruimus, quæ inter demonstrandi methodos locum minime habet: sed cum hæc inductio fundetur in observatione legis constantis atque necessariæ, in inveniendo tuto adhibetur; etsi consultum sit, reperta alio postea modo demonstrari.*

SCHOLION II.

97. *Ut vero Theorema facilius intelligatur, exemplo numerico id illustrare lubet. Ponamus ergo inveniri debere dignitatem quartam radicis* 18 *seu* 10 + 8: *erit* $m = 4$, $P = 10$, $Q = 8 : 10 = \frac{4}{5}$, *consequenter*

$$P^m = 10^4 = 10000 = A$$
$$mAQ = 4.\ 10000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{160000}{5} = 32000 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\ 32000.\tfrac{4}{5} = \tfrac{6}{5}.\ 32000 = 6.6400 = 38400 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\ 38400.\tfrac{4}{5} = \tfrac{8}{15}.\ 38400\ \ \tfrac{307200}{15} = 20480 = D$$
$$\frac{m-3}{4}DQ = \tfrac{1}{4}.\ 20480.\tfrac{4}{5} = \tfrac{1}{5}.\ 20480 = \tfrac{20480}{5} = 4096 = E$$
$$\frac{m-4}{5}EQ = 0.\ 4096.\tfrac{4}{5} = 0.$$

10000 = A	
32000 = B	
38400 = C	
20480 = D	
4096 = E	
104976	Dignitas quarta ipsius 18.

Eadem dignitas invenitur, si 18 *in duas quascunque partes alias, ex. gr. in* 6 *&* 12 *secetur: quo in casu erit* $P = 6$ *&* $Q = 12 : 6 = 2$, *consequenter*

$$P^m = 6^4 = 1296 = A$$
$$mAQ = 4.\ 1296.\ 2 = 8.\ 1296 = 10368 = B$$
$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{3}{2}.\ 10368.\ 2 = 3.\ 10368 = 31104 = C$$
$$\frac{m-2}{3}CQ = \tfrac{2}{3}.\ 31104.\ 2 = \tfrac{4}{3}.\ 31104 = \tfrac{124416}{3} = 41472 = D$$

m − 3

$\frac{m-3}{4}$ DQ $= \frac{1}{4}.41472.2 = \frac{2}{4}.41472 =$
$\frac{41472}{2} = 20736 = E$

$\frac{m-4}{5}$ EQ $= 0.20736.2 = 0.$

1296 = A
10368 = B
31104 = C
41472 = D
20736 = E

104976 Dignitas quarta ipsius 18.

Patet adeo seriem terminari, si m *explicetur per numerum determinatum.*

COROLLARIUM I.

98. Si *m* explicetur per numerum fractum, series $P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ$ &c. exprimet radicem indeterminatam ipsius $P + PQ$ (§. 57), adeoque idem Theorema extractioni radicis inservit. Ex. gr. Sit ex $aa - xx$ extrahenda radix quadrata; erit $m = \frac{1}{2}$ (§. *cit.*), $P = x^2$ & $Q = -x^2 : a^2$. Unde

$$P^m = a^{2:2} = a = A$$

$$\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{2}a. -x^2 : a^2 = -\frac{x^2}{2a} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}. -\frac{x^2}{2a}. -\frac{x^2}{a^2}$$

$$= \frac{1-2}{4}. \frac{x^4}{2a^3} = -\frac{x^4}{8a^3} = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{\frac{1}{2}-2}{3}. -\frac{x^4}{8a^3}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-4}{6}. \frac{x^6}{8a^5} = -\frac{3}{6}. \frac{x^6}{8a^5} = -\frac{x^6}{16a^5} = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{\frac{1}{2}-3}{4}. -\frac{x^6}{16a^5}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-6}{8}. \frac{x^8}{16a^7} = -\frac{5x^8}{128a^7} = E$$

$$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{\frac{1}{2}-4}{5}. -\frac{5x^8}{128a^7}. -\frac{x^2}{a^2} =$$

$$\frac{1-8}{10}. \frac{5x^{10}}{128a^9} = -\frac{7x^{10}}{256a^9}, \text{ \&c. in inf.}$$

Est adeo $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$, &c. in infin.

SCHOLION III.

99. *Si cui molestus evadit fractionum calculus, is cum* NEWTONO *in formula generali substituat pro* m *exponentem fractum* m : n, *formulam sequentem obtenturus:*

$$(P + PQ)^{m:n} = P^{m:n} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \frac{m-4n}{5n} EQ$$

&c. *Hac vero formula ubi utetur, quantitates ad potentiam evecturus, pro* n *assumet* 1.

SCHOLION IV.

100. *Ex numerorum determinatorum potentiis radicem extracturus adhibeat formulam* $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b$ *&c. quam in dato casu determinet, numero pro* m *substituto. Ex. gr. Sit ex* 104976 *extrahenda radix quartana; erit* m = 4: *unde habetur* $a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$, *& juxta hoc Theorema extractio radicis quartanæ eodem modo peragitur, quo quadratam & cubicam* (§. 269, 282 Arithm.). *inquisivimus. Nimirum, cum præter* a^4 *seu quadratoquadratum partis primæ radicis, quatuor auferri debeant facta; resecentur versus dexteram notæ quatuor & potentia quarta proxime accedens ad* 10 *nempe* 1, *erit* a^4. *En calculi typum:*

```
        10|4976(18
         1|
  ------------------
         ~~9~~|~~4976~~
4a³  =   |4 . . .
4a³b =  3|2 . . .
6a²b² = 3|84 . .
4ab³ =  2|048 .
b⁴ =     |4096
  ------------------
          ~~94976~~
          --------
              0
```

$4a^3 = 4$
$b = 8$

$4a^3b = 32$

$b^2 = 64$
$a^2 = 1$

$a^2b^2 = 64$
6

$6a^2b^2 = 384$

$b^3 = 512$
$4a = 4$

$4ab^3 = 2048$

Si radix plures quam tres notas habuerit; operatio altera repetenda, ut in extractione radicum quadratarum ac cubicarum (§. cit. Arithm.). *Quodsi numerus, ex quo radix extrahenda, non sit dignitas perfecta; dignitas proxime minor sit* = P, *& residuum post extractionem more vulgari institutam per eandem divisum* = Q, m = 1, *&* n *exponens dignitatis, cujus radix desideratur. Ita ope Theorematis in Schol. prac. obtinetur series infinita certa progressionis lege residuam partem radicis exhibens.*

Ex. gr. Quaratur $\sqrt{2}$. *Quoniam quadratum proxime minus* = 1, *& residuum hoc ex* 2 *subducto* = 1; *erit* P = 1, Q = 1. *Praterea* m = 1, *&* n = 2. Hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4} = +\frac{1.3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \cdot \frac{1.3}{2.4.6} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1.3.5}{2.4.6.8} = +\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.10} \text{ \&c.}$$

Est ergo $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} -$ &c. $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \frac{7}{256}$ &c. in infinitum.

Ubi series fractionum denotat partem radicis unitate minorem. Ceterum cum $\sqrt{2}$ *sit diagonalis quadrati, posito ejus latere* = 1 (§. 420 Geom.); *habetur jam valor diagonalis in terminis rationalibus, unde rationes prope vera ad praxin quantumlibet sufficientes duci possunt. Ex. gr. si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2}$, *erit ratio* $1 + \frac{1}{2} : 1$ [$= 3 : 2$] *justo major quam diagonalis ad latus, sed excessus consistet infra* $\frac{1}{8}$. *Si pro diagonali sumatur* $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$ *seu* $\frac{11}{8}$; *erit ratio* $\frac{11}{8} : 1$ [$= 11 : 8$] *justo minor quam diagonalis ad latus, sed defectu infra* $\frac{1}{16}$ *existente: & ita porro.*

COROLLARIUM II.

101. Quoniam polynomium pro binomio haberi potest, sumtis pluribus partibus pro una; eadem formula polynomiis ad datam dignitatem evehendis inservis.

Ex. gr. Si trinomium $c + d + g$ ad dignitatem aliquam, ex. gr. quartam evehendum; ponatur in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b$ &c. $c = a$ & $d + g = b$: erit $(c + d + g)^4 = c^4 + 4c^3(d + g) + 6c^2(d + g)^2 + 4c(d + g)^3 + (d + g)^4$. Nempe $a^m = c^4$, $ma^{m-1}b = 4c^3(d + g)$, $\frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2}b^2 = 6c^2(d + g)^2$. $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3}b^3 = 4c(d + g)^3$,

m.

$\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ \ 3.\ \ 4} a^{m-4}b^4 = (d+g)^4.$

Est vero, vi ejusdem Theorematis $(d+g)^2 = d^2 + 2dg + g^2$; $(d+g)^3 = d^3 + 3d^2g + 3dg^2 + g^3$; $(d+g)^4 = d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$. Ergo $(c+d+g)^4 = c^4 + 4c^3d + 4c^3g + 6c^2d^2 + 12c^2dg + 6c^2g^2 + 4cd^3 + 12cd^2g + 12cdg^2 + 4cg^3 + d^4 + 4d^3g + 6d^2g^2 + 4dg^3 + g^4$.

Corollarium III.

102. Quare si infinitinomium fuerit $a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. & in formula pro a substituatur a, pro b autem $by + cy^2 + dy^3 + ey^4 + fy^5 + gy^6$ &c. in infinit. prodibit formula generalis pro infinitinomio ad datam potentiam evehendo aut ex eadem radicem extrahendo. Est enim

$$\begin{aligned}
b^2 &= b^2y^2 + 2bcy^3 + c^2y^4 + 2cdy^5 + d^2y^6 \text{ \&c.}\\
&\qquad + 2bdy^4 + 2bey^5 + 2cey^6 \text{ \&c.}\\
&\qquad\qquad + 2bfy^6 \text{ \&c.}\\
b^3 &= b^3y^3 + 3b^2cy^4 + 3bc^2y^5 + c^3y^6 \text{ \&c.}\\
&\qquad + 3b^2dy^5 + 6bcdy^6 \text{ \&c.}\\
&\qquad\qquad + 3b^2ey^6 \text{ \&c.}\\
b^4 &= + b^4y^4 + 4b^3cy^5 + 6b^2c^2y^6 \text{ \&c.}\\
&\qquad + 4b^3dy^6 \text{ \&c.}\\
b^5 &= + b^5y^5 + 5b^4cy^6 \text{ \&c.}\\
b^6 &= + b^6y^6 \text{ \&c.}
\end{aligned}$$

Hos ergo valores si in formula $a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ 2.\ \ 3}a^{m-3}b^3$ &c. substituas, & terminos homogeneos, in quibus nempe eadem potentia ipsius y occurrit, decenter coordines; prodibit formula pro infinitinomio:

$$\begin{aligned}
& a^m \\
& + a^{m-1}by \\
& + \left.\begin{matrix} \frac{m.m-1}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}c \end{matrix}\right\} y^2 \\
& + \left.\begin{matrix} \frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 3}a^{m-3}b^3 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ \ 1}a^{m-2}bc \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}d \end{matrix}\right\} y^3 \\
& + \left.\begin{matrix} \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4}a^{m-4}b^4 \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 1}a^{m-3}b^2c \\ + \frac{m.m-1}{1.\ \ 2}a^{m-2}c^2 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ \ 1}a^{m-2}bd \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}e \end{matrix}\right\} y^4 \\
& + \left.\begin{matrix} \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 4.\ \ 5}a^{m-5}b^5 \\ + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ \ 2.\ \ 3.\ \ 1}a^{m-4}b^3c \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 1}a^{m-3}b^2d \\ + \frac{m.m-1.m-2}{1.\ \ 2.\ \ 1}a^{m-3}bc^2 \\ + \frac{m.m-1}{1.\ \ 1}a^{m-2}cd \\ + \frac{m.m-1}{1.\ 1}a^{m-2}be \\ + \frac{m}{1}a^{m-1}f \end{matrix}\right\} y^5
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}a^{m-6}b^{6}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 1}a^{m-5}b^{4}c\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 1.\ 2}a^{m-4}b^{2}c^{2}\\
&+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3.\ 1}a^{m-4}b^{3}d\\
&+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}a^{m-3}c^{3}\\
&+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 1.\ 1}a^{m-3}bcd\\
&+\frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^{2}e\\
&+\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}a^{m-2}d^{2}\\
&+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}ce\\
&+\frac{m.\ m-1}{1.\ 1}a^{m-2}bf\\
&+\frac{m}{1}a^{m-1}g
\end{aligned}\right\} y^{6}$$

&c. &c. in infinit.

COROLLARIUM IV.

103. Eodem modo patet, si infinitinomium fuerit $ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 + fy^6$ &c. ad dignitatem m evehendum; in serie antecedente tantum omnes terminos multiplicandos esse per y^m, ita ut unciæ retineantur eædem iidemque coëfficientes, dignitates vero ipsius y sint $y^m + y^{m+1} + y^{m+2} + y^{m+3} + y^{m+4} + y^{m+5} + y^{m+6}$ &c.

SCHOLION V.

104. *Constat adeo idem Theorema, quod pro binomio dedimus, etiam infinitinomio ad dignitatem desideratam evehendo sufficere. Tyrones illud sub initium studii analytici prætermittant, donec inferius in Analysi infinitorrm eodem opus habuerint. Immo infinitinomium ad potestatem determinatam facile evehitur per formulas speciales superius allatas. Ex. gr. Sit* $hx + ix^2 + kx^3 + lx^4 + mx^5 +$ &c. *evehenda ad dignitatem secundam: cum* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, *erit*

$$\begin{aligned}
&h^2x^2 + 2hix^3 + i^2x^4\\
&\qquad + 2hkx^4 + 2ikx^5 + k^2x^6\ \&c.\\
&\qquad\qquad + 2hlx^5 + 2ilx^6\ \&c.\\
&\qquad\qquad\qquad + 2hmx^6\ \&c.
\end{aligned}$$

(§. 265 Arithm.). *Nimirum primo sumuntur duo tantummodo termini, veluti hic* $hx + ix^2$, *& quæritur ejus potentia desiderata, veluti hic secunda. Deinde* $hx + ix^2$, *habentur pro termino uno*, kx^3 *pro altero, atque sic denuo per formulam binomii determinatur potentia desiderata, veluti hic secunda. Porro* $hx + ix^2 + kx^3$ *sumuntur pro termino uno &* lx^4 *pro altero, & ita porro. Quæ eadem series invenitur, si in generali (§. 102) fiat* $m = 2$, $y = x$, $a = h$, $b = i$, $c = k$, $d = l$, $e = m$, &c. *Est enim:*

$$a^m y^m = h^2x^2$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,b\,y^{m+1} = 2hix^3$$

$$\frac{m.\ m-1}{1.\ 2}a^{m-2}\,b^2\,y^{m+2} = \tfrac{2}{2}h^0i^2x^4 = i^2x^4.$$

$$\frac{m}{1}a^{m-1}\,c\,y^{m+2} = 2hkx^4\ \&c.$$

SCHOLION VI.

105. *Ceterum notetur artificium, quo casus infiniti, immo infinities infiniti, ad regulam eandem reducuntur.*

PROBLEMA XXIX.

106. *Determinare summam termini primi & ultimi in progressione arithmetica.*

Sit

Sit terminus primus a, differentia terminorum five crefcentium, five decrefcentium, d; erit (§. 333 *Arithm.*).

$$\begin{array}{llllll} a, & a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d, & a\pm 5d, \\ & a\pm 4d & & a\pm 2d & & a \\ \hline & 2a\pm 5d, & & 2a\pm 5d, & & 2a\pm 5d, \end{array}$$

Item

$$\begin{array}{lllll} a, & a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d \\ & a\pm 3d & 2 & & a \\ \hline & 2a\pm 4d & 2a\pm 4d & & 2a\pm 4d \end{array}$$

Theorema. In progreffione arithmetica tam crefcente, quam decrefcente, fumma termini primi & ultimi æqualis eft fummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiftantium, aut medii duplo, fi numerus terminorum impar.

$$\begin{array}{lllllll} \text{Ex. gr. } 3, & 6, & 9, & 12, & 15, & 18, & 21 \\ & & & 12 & 9 & 6 & 3 \\ \hline & & & 24 = & 24 = & 24 = & 24 \end{array}$$

COROLLARIUM I.

107. Habetur ergo fumma progreffionis arithmeticæ, fi fumma termini primi & ultimi ducatur in dimidium terminorum numerum.

COROLLARIUM II.

108. Quodfi adeo fit terminus primus a, differentia d, numerus terminorum n, erit ultimus $a + (n-1)d$ (§. 333 *Arith.*), confequenter fumma progreffionis $\frac{1}{2}n\,(2a + (n-1)\,d)$ (§. 107) $= an + \frac{1}{2}(n^2 - n)\,d$. Ex datis itaque termino primo a, differentia d, & numero terminorum n, invenitur fumma progreffionis, fi facto ex termino primo in numerum terminorum addatur factum ex differentia eorundem in femidifferentiam numeri terminorum a quadrato ejufdem. Ex. gr. Sit $a = 3$, $n = 7$, $d = 3$, erit fumma $= 21 + \frac{49-7}{2}.\,3 = 21 + \frac{42}{2}.\,3 = 21 + 21.\,3 = 21 + 63 = 84$.

SCHOLION.

109. *Notent Tyrones regulas ex fymbolis eruturi, ab initio gradatim effe progrediendum, exprimendo nempe figillatim quodlibet fymbolum per rem denotatam & quamlibet operationem fignis repræfentatam per nomina convenientia. Ex. gr. in* an *eft* a *terminus primus &* n *numerus terminorum*, ex hypoth. *Sed* an *eft factum ex* a *in* n (§. 8). *Ergo pro* an *fubftituitur in regula factum ex termino primo in numerum terminorum. Porro* n^2 *eft quadratum ipfius* n (§. 254 Arithm.). *Sed* n *eft numerus terminorum: ergo* n^2 *quadratum numeri terminorum. Signum* — *indicat fubtractionem* (§. 8). *Quare* $n^2 - n$ *differentia numeri terminorum ab ejus quadrato &* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ *femidifferentia ifta. Porro* d *eft differentia terminorum*, ex hypoth. *adeoque* $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ d *factum ex illa femidifferentia in differentiam terminorum. Denique fignum* + *indicat facta hactenus explicata effe addenda. Hæc quidem fyllabizatione opus habent, qui fine mora fymbolicas expreffiones quantitatum fibi familiares reddere geftiunt.*

COROLLARIUM III.

110. Sit $a = 1$, $d = 2$, hoc eft, fit feries numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c. erit fumma $= n + n^2 - n$ (§. 108) $= n^2$ (§. 21).

§. 21). Patet adeo numeros quadratos prodire continua numerorum imparium additione; consequenter differentias numerorum quadratorum esse numeros impares: id quod supra alia ratione fuit demonstratum (§. 83).

Corollarium IV.

111. Sit $a = n = \frac{1}{2} d$, erit summa $= n^2 + n^3 - n^2$ (§. 108) $= n^3$ (§. 21). Quilibet adeo cubus resolvitur in progressionem arithmeticam, cujus terminus primus, semidifferentia & numerus terminorum sunt radici ejus æquales. Ita $8 = 2 + 6$, $27 = 3 + 9 + 15$, $64 = 4 + 12 + 20 + 28$.

Scholion.

112. *Patet modus ex formulis algebraïcis eruendi Theoremata specialia, qui continetur sub Problemate logico de specierum notionibus ex notione generis formandis* (§. 712 Log.).

Definitio IV.

113. *Denominator* rationis est quotus ex divisione termini majoris per minorem emergens.

Corollarium I.

114. Major ergo prodit, minore per denominatorem multiplicato (§. 212 *Arithm.*): minor vero habetur, majore per denominatorem diviso (§. 210 *Arithm.*). Unde si terminus minor a, denominator m, erit major ma; si terminus major a, minor erit $\frac{a}{m}$. Quare $a : ma$ exprimit rationem minoris inæqualitatis; $a : \frac{a}{m}$ vero rationem majoris (§. 133 *Arithm.*) Immo quoniam $\frac{a}{m} = a \cdot \frac{1}{m}$ (§. 43); si m explicetur per fractionem, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis, $a : ma$ rationem quacunque designat.

Corollarium II.

115. Quia in ratione majoris inæqualitatis antecedens major consequente (§. 133 *Arithm.*); ejus denominator idem est cum exponente (§. 136 *Arithm.*).

Corollarium III.

116. In ratione minoris inæqualitatis exponens rationis $\frac{a}{ma}$ (§. 136 *Arithm.* & §. 114 *Analys.*): hoc est, $\frac{1}{m}$ (§. 231 *Arithm.*). Æquatur ergo fractioni, cujus numerator unitas, denominator idem cum denominatore rationis.

Scholion.

117. *Exponens & denominator rationis Autoribus voces synonymæ sunt. Aliter vero Veteres, aliter Recentiores exponentem definiunt. Nos Veterum definitionem retinuimus in Arithmetica* (§. 136), *tum quod naturam rationum clare explicet, tum quod ad demonstrandum utilis. Etenim si rationis* 2 : 3 *exponens dicatur* $\frac{2}{3}$; *inde intelligitur antecedentem terminum esse æqualem duabus tertiis consequentis, adeoque pro mensura, qua utrumque metimur, assumi tertiam consequentis partem. Hinc vero clarius cognoscitur rationis hujus natura, quam si cum Recentioribus nonnullis dicas exponentem esse* $1\frac{1}{2}$: *quod innuit, antecedentem in consequente contineri* $1\frac{1}{2}$. *Recentiores vero exponentem rationis eodem modo definientes, quo denominatorem definimus, ideo eundem exponentem constituunt rationum majoris & minoris inæqualitatis* (§. 115), *quod nomen etiam in casu posteriori suggerat* (§. 147 Arithm.) *& demonstrationibus analyticis commodior videatur: quem in finem nos exponentis loco nunc denominatorem assumimus.*

Pro-

PROBLEMA XXX.

118. *Determinare factum ex termino primo in ultimum progressionis geometricæ.*

Sit terminus primus a, denominator m; erit progressio (§. 332 *Arithm.* & §. 114 *Analyſ.*).

$$\begin{array}{ccccccc} a, & ma, & m^2a, & m^3a, & m^4a, & m^5a, & m^6a \\ & m^5a & m^4a, & m^3a & & & a \\ \hline m^6a^2 & = & m^6a^2 & = m^6a^2 & = & & m^6a^2 \end{array}$$

Theorema. In progreſſione geometrica factum extremorum æquatur facto mediorum ab extremis æquidiſtantium, itemque medii quadrato, ſi numerus terminorum impar.

Ex. gr. $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96$

$$\begin{array}{ccc} 12 & 6 & 3 \\ \hline 288 = & 288 = & 288 \end{array}$$

PROBLEMA XXXI.

119. *Determinare quotum ex diviſione differentiæ terminorum primi ac ultimi per denominatorem unitate mulctatum emergentem.*

Sit terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n; erit terminus ultimus $m^{n-1}a$, differentia primi & ultimi, $m^{n-1}a - a$. Hæc ſi dividatur per $m - 1$, erit quotus $m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a + m^{n-7}a$ &c.

$$\begin{array}{l} m-1)\ m^{n-1}a - a\ (m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a + m^{n-5}a + m^{n-6}a, \ \&c. \\ \quad m^{n-1}a - 1m^{n-2}a \\ \hline \qquad + m^{n-2}a - a \\ \qquad + m^{n-2}a - m^{n-3}a \\ \hline \qquad\quad + m^{n-3}a - a \\ \qquad\quad + m^{n-3}a - m^{n-4}a \\ \hline \qquad\qquad + m^{n-4}a - a \\ \qquad\qquad + m^{n-4}a - m^{n-5}a \\ \hline \qquad\qquad\quad + m^{n-5}a - a \\ \qquad\qquad\quad + m^{n-5}a - m^{n-6}a \\ \hline \qquad\qquad\qquad + m^{n-6}a - a, \ \&c. \end{array}$$

Quodſi n determinetur, ex.gr. per 7, erit $n - 7 = 0$; conſequenter $m^{n-7}a = m^0 a = a$, adeoque diviſio terminatur. Unde patet

Theorema 1. Si differentia termini primi & ultimi progreſſionis geometricæ dividatur per denominatorem unitate mulctatum, quotus eſt ſumma omnium terminorum excepto maximo.

Et cum ſit $m - 1 : 1 = m^{n-1}a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a$ &c. $+ a$ (§. 174, 169 *Arithm.*); patet porro

Theorema 2. In progreſſione geometrica eſt ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita differentia termini maximi & minimi ad ſummam omnium terminorum excepto maximo.

COROL-

COROLLARIUM I.

120. Quodsi ergo quoto ex divisione differentiæ termini maximi & minimi per denominatorem unitate mulctatum emergenti maximus addatur; summa totius progressionis habetur.

COROLLARIUM II.

121. Sit adeo terminus primus a, denominator m, numerus terminorum n, erit terminus ultimus seu maximus $m^{n-1}a$, adeoque summa $m^{n-1}a + (m^{n-1}a - a) : (m-1) = (m^n a - m^{n-1}a + m^{n-1}a - a) : (m-1)$ (§. 235 *Arithm.*) $= (m^n a - a) : (m-1)$ (§. 21); consequenter si eadem summa dicatur s, $m - 1 : m^n - 1 = a : s$, (§. 302 *Arithm.*). Est adeo terminus primus (seu minimus) progressionis ad ejus summam ut denominator unitate mulctatus ad ejus dignitatem, cujus exponens numero terminorum æqualis, unitate itidem mulctatam. Sit ex. gr. $m = 2$, $a = 1$, $n = 8$, erit summa $(256 - 1) : 1 = 255$.

COROLLARIUM III.

122. Quoniam si terminus primus a, denominator m; terminus ultimus $m^{n-1}a$, summa $(m^n a - a) : (m-1)$ (§. 121): erit differentia inter terminum ultimum & summam $(m^{n-1}a - a) : (m-1)$ & differentia inter primum & summam $\frac{m^n a - a}{m-1} - a = \frac{m^n a - a - ma + a}{m-1}$ (§. 235 *Arithm.*) $= \frac{m^n a - ma}{m-1}$. Est ergo differentia prior ad posteriorem ut $(m^{n-1}a - a) : (m-1)$ ad $(m^n a - ma) : (m-1)$, hoc est, ut $m^{n-1}a - a$ ad $m^n a - ma$ (§. 178 *Arithm.*), hoc est, ut 1 ad m (§. 181 *Arithm.*), seu ut unitas ad denominatorem.

COROLLARIUM IV.

123. Quare si differentia inter terminum primum & summam dividatur per differentiam inter summam & terminum ultimum; quotus est denominator (§. 69 *Arithm.*).

PROBLEMA XXXII.

124. *Investigare rationum symptomata.*

Non alia re opus est, quam ut termini analytice exprimantur (§. 114), & tentatis quotlibet mutationibus exploretur, utrum duarum rationum exponentes sint æquales, nec ne (§. 149 *Arithm.*). Sint itaque duæ quantitates a & ma; erit

I. $a : ma$
$\underline{c \quad\; c}$
$ac : mac = a : ma$

II. $a : ma$
$\underline{c \quad\; c}$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = a : ma$

III. $a : ma$
$\underline{b : mb}$
$a - b : ma - mb = a : ma = b : mb$

IV. $a : ma$
$\underline{b : mb}$
$a + b : ma + mb = a : ma = b : mb.$

Sit porro $a : ma = b : mb$
erit alternatim $a : b = ma : mb$
inverse $ma : a = mb : b$
conversim $a + ma : a = b + mb : b$
composite $a + ma : ma = b + mb : mb$
divisim $ma - a : a = mb - b : b$
$ma - a : ma = mb - b : mb$

Item : $a^n : m^n a^n = b^n : m^n b^n$
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ma} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{mb}$
$a : mac = b : mbc$
$a : \frac{ma}{c} = b : \frac{mb}{c}$
$ac : ma = bc : mb$
$\frac{a}{c} : ma = \frac{b}{c} : mb$
$ac : mac = b : mb$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb$
$ac : mac = bd : mbd$
$\frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d}$

$ac : mad$

$$ac : mad = bc : mbd$$

$$\frac{a}{c} : \frac{ma}{d} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{d}$$

Sit ordinate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = mb : mnb$

erit ex æquo $a : mna = b : mnb.$

Sit perturbate $a : ma = b : mb$

& $ma : mna = \frac{b}{n} : b$

erit ex æquo $a : mna = \frac{b}{n} : mb$

Ipsæ nimirum expressiones, si quoti reducantur per regulas fractionum, rationum similitudinem in omnibus loquuntur. E. gr. $ac : mac = 1 : m$ & $b : mb = 1 : m$. En utrobique exponentem eundem $1 : m$!

COROLLARIUM.

125. Cum sit in progressione geometrica $m - 1 : 1 = m^{n-1} a - a : m^{n-2}a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$ (*Th.* 2. §. 119); sit vero $m - 1 : 1 = ma - a : a$ (§. 124 *n.* 1); erit $ma - a : a = m^{n-1} a - a : m^{n-2} a + m^{n-3}a + m^{n-4}a$ &c. $+ a$, hoc est, excessus termini secundi supra primum est ad primum, ut excessus ultimi sive maximi supra primum ad summam omnium terminorum demto maximo.

PROBLEMA XXXIII.

126. *Investigare symptomata progressionum geometricarum ab unitate incipientium.*

Si terminus primus est unitas, secundus idem est cum denominatore rationis (§. 114). Est vero terminus secundus vel numerus primus, vel compositus; & in casu altero vel quadratus, vel potentia alia cujuscunque ordinis, vel nulla.

Cum numerus primus in se non possit dividi nisi per unitatem solam (§. 75 *Arithm.*), charactere primitivo m recte exprimitur. Unde emergit series in ratione geometrica progredientium:

$$1,\ m^1,\ m^2,\ m^3,\ m^4,\ m^5,\ m^6,\ \&c.$$

Quoniam termini omnes prodeunt continuata multiplicatione secundi in seipsum (§. 332 *Arith.*); per nullum quoque numerum primum dividi possunt exacte, nisi per secundum, seu nullus numerus primus terminos metitur præter secundum. In formula generali idem ad oculum patet: etenim m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, &c. non posse dividi nisi per m, patet (§ 54). Et cum terminus secundus in hoc casu sit potentia prima, termini sequentes sint potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem numeri (§ 254 *Arithm.*); terminus quilibet major dividi potest per quemlibet minorem, sed per nullum alium (§. 54). Habemus adeo

Theorema 1. Si numerorum ab unitate continue proportionalium proximus unitati primus est; maximum nullus alius metitur, præter eos qui sunt in serie; consequenter nec primus alius, nisi secundus, seu ab unitate proximus.

Et quoniam, in omni casu numerorm ab unitate continue proportionalium, termini ultra secundum sunt potentiæ continuo ordine progredientes ejusdem termini secundi, qui communis omnium radix est (§. 332, 250 *Arithm.*); igitur in genere patet

Theorema 2. In serie numerorum ab unitate continue proportionalium, minor quilibet quemlibet majorem metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

Cum terminus compositus exacte dividi possit per numerum alium præter unitatem (§. 76 *Arith.*); exprimetur idem per *mn*. Quare si in progressione geometrica ab unitate incipiente terminus secundus sit *mn*; erit series

$$1, mn, m^2n^2, m^3n^3, m^4n^4, m^5n^5, m^6n^6, \&c.$$

atque adeo patet numeros primos *m* & *n* qui metiuntur secundum terminum, metiri quoque ceteros omnes, nec præter eos alium quendam numerum primum ceterorum quemcunque metiri. Unde habemus

Theorema 3. Si ab unitate fuerint numeri quotcunque continue proportionales, primus numerus, qui metitur ultimum, metietur & unitati proximum ac omnes intermedios.

In utraque serie exponens termini secundi est 1, tertii 2, quarti 3, quinti 4 &c. consequenter exponens in loco impari est numerus par, in loco pari est impar, & quidem in loco quarto, seu a secundo tertio, exponens est ternarius, & duobus locis intermissis sequitur continuo numerus per ternarium divisibilis, seu quem ternarius metitur. Similiter in loco septimo, seu a secundo sexto, exponens senarius est, & quinque locis intermissis continuo sequitur exponens quem senarius metitur. Singula hinc intuitive patent, quod exponentes ex continua unitatis additione nascantur. Hisce vero notatis prodit

Theorema 4. Si numeri quotcunque fuerint ab unitate continue proportionales, secundus (unitate seclusa) quadratus erit, & uno intermisso omnes: tertius autem cubus est, & duobus intermissis omnes: sextus vero cubus simul & quadratus, & quinque intermissis omnes.

Si terminus primus fuerit unitas, secundus numerus quadratus, vel cubus, vel potentia cujuscunque gradus, erunt series

$$1, m^2, m^4, m^6, m^8, m^{10}, m^{12} \&c.$$
$$1, m^3, m^6, m^9, m^{12}, m^{15}, m^{18} \&c.$$
$$1, m^n, m^{2n}, m^{3n}, m^{4n}, m^{5n}, m^{6n} \&c.$$

Quoniam in qualibet serie termini continuo prodeunt multiplicatione per secundum, exponens secundi continuo additur exponenti termini cujuscunque dati, ut prodeat proxime sequens (§. 54); consequenter cum exponentes omnium terminorum, qui a secundo sequuntur, sint multipli exponentis termini secundi, per secundi quoque termini exponentem dividi possunt; consequenter omnes termini sunt dignitates ejus gradus, cujus dignitas est secundus (§. 56). Habemus itaque

Theorema 5. Si in serie continue proportionalium ab unitate numerorum, terminus secundus, seu ab unitate primus, est quadratus, reliqui omnes quadrati erunt; si idem fuerit cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt; si idem fuerit dignitas cujuscunque gradus, quarti, quinti, sexti &c. reliqui etiam omnes erunt dignitates ejusdem gradus, quarti, quinti, sexti &c.

SCHO-

SCHOLION.

127. *Patet adeo, per calculum literalem facillime symptomata rationum & progressionum geometricarum ab unitate incipientium, vel ignorata, vel oblivioni tradita reperiri.*

PROBLEMA XXXIV.

128. *Invenire rationem superficierum atque corporum in Geometria elementari explicatorum.*

Sit parallelogrammorum & triangulorum altitudo communis a, bases sint b & c: erunt illorum areæ ab & ac (§. 375, 387 *Geom*), horum $\frac{1}{2}ab$ & $\frac{1}{2}ac$ (§. 392 *Geom.*). Sunt ergo ut ab ad ac, hoc est, ut b ad c (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 1. Parallelogramma & triangula æque-alta basium rationem habent.

Eodem modo invenitur

Theorema 2. Parallelogramma & triangula æqualium basium sunt in ratione altitudinum.

Sit diameter circuli a, peripheria ma (§. 114): erit quadratum diametri a^2, area circuli $\frac{1}{4}ma^2$ (§. 429 *Geom.*). Est ergo illud ad hanc ut a^2 ad $\frac{1}{4}ma^2$, hoc est, ut a ad $\frac{1}{4}ma$ (§. 181 *Arithm.*).

Theorema 3. Quadratum diametri est ad aream circuli, ut diameter ad quartam peripheriæ partem.

Sint bases parallelogrammorum & triangulorum similium a & b, altitudines ma & mb (§. 114 *Anal.* & §. 396 *Geom.*): erunt areæ ut ma^2 ad mb^2 (§. 375, 387, 392 *Geom.*), hoc est, ut a^2 ad b^2 (§. 124).

Theorema 4. Parallelogramma & triangula similia sunt ut quadrata basium; seu (quia quodlibet latus pro basi assumi potest (§. 113 *Geom.*) ut quadrata laterum homologorum.

Sint bases parallelepipedorum, prismatum, cylindrorum, pyramidum, conorum, a & b, altitudo communis c: erunt corpora ista ut ac ad bc (§. 536, 539, 541, 548 *Geom.*), hoc est, ut a ad b (§. 181 *Arithm.*). Eodem modo c assumi potest pro basi communi, ita ut a & b sint altitudines.

Theorema 5. Parallelepipeda, prismata, cylindri, pyramides & coni ejusdem altitudinis basium rationem habent; eandem vero basin habentes sunt in ratione altitudinum.

Non absimili modo alia hujus generis Theoremata investigantur.

PROBLEMA XXXV.

129. *Invenire, quoties quantitates quotlibet permutari queant, hoc est, ordo earum variari possit.*

Sint quantitates duæ a & b. Cum aut scribi possit ab, aut ba; patet esse numerum variationum $2 = 2.1$.

Sint tres quantitates a, b, c. Ordines earum erunt

$c\ a\ b$
$a\ c\ b$
$a\ b\ c$

$c\ b\ a$
$b\ c\ a$
$b\ a\ c$

id quod patet, c primum cum ab, dein cum ba combinando. Unde numerus variationum $3.2.1 = 6$.

Quodsi quantitates fuerint quatuor, una quælibet quatuor modis combi-

nari poteſt cum quolibet ordine trium: unde numerus variationum emergit $6.\ 4 = 4.\ 3.\ 2.\ 1 = 24$.

Similiter ſi quantitates fuerint quinque, unaquælibet juncta cum quolibet ordine quatuor quantitatum pariet variationes 5. Unde numerus omnium variationum $24.\ 5 = 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1$.

Quare ſi numerus quantitatum fuerit n; erit numerus variationum $n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5$ &c.

Si eadem quantitas bis occurrat; reperietur variatio duorum *bb*; trium *bab*, *abb*, *bba*, quatuor *cbab*, *bcab*, *babc* &c. adeoque numerus variationum in caſu primo $1 = (2.1):(2.1)$, in ſecundo $3 = (3.2.1):(2.1)$, in tertio $12 = (4.\ 3.\ 2.\ 1):(2.1)$. Quodſi litera quinta accedat, in quolibet ordine quantitatum quatuor pariet variationes quinque: unde numerus omnium variationum $60 = (5.4.3.2.1):(2.1)$. Hinc intelligitur, ſi numerus quantitatum ſit n; fore omnium variationum numerum $(n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4$ &c$):(2.1)$.

Si eadem quantitas ter occurrat, erit in tribus nulla variatio; in quatuor variationes ſunt *baaa*, *abaa*, *aaba*, *aaab*, adeoque numerus variationum $4 = (4.3.2.1):(3.2.1)$. Quinta ſi accedat, in quolibet ordine quatuor quantitatum quinque variationes pariet: unde numerus omnium variationum $(5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Eodem modo, ſi ſexta aſſumatur, reperietur numerus variationum $(6.5.4.3.2.1):(3.2.1)$. Unde colligitur, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5$ &c.$):(3.2.1)$.

Si eadem quantitas quater occurrat, erit in quatuor variatio nulla. Quodſi vero quinta accedat, variationes ſunt *baaaa*, *abaaa*, *aabaa*, *aaaba*, *aaaab*. Quare numerus variationum eſt $5 = (5.4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Si ſexta aſſumatur, in quolibet ordine quantitatum quinque variationes ſex pariet; adeoque numerus variationum $30 = (6.\ 5.\ 4.3.2.1):(4.3.2.1)$. Unde conſtat, ſi numerus quantitatum ſit n, fore numerum omnium variationum $(n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5.$ &c.$):(4\ 3.2.1)$.

Ex his formulis ſpecialibus colligitur generalis. Nempe ſi n denuo ſit quantitatum numerus, m numerus qui indicat quoties eadem quantitas occurrit: erit $(n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5.\ n-6.\ n-7.\ n-8.\ n-9$ &c.$):(m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.\ m-4.\ m-5.\ m-6$ &c.). Nimirum ſeries continuanda, donec continua unitatis ſubtractio ex n & m relinquat 0.

Eodem modo ulterius progredi licet; tandemque reperietur, ſi numerus quantitatum fuerit n, numeri qui indicant quoties earum aliquæ repetuntur, ſint l, m, r &c. formula univerſaliſſima $(n.\ n-1.\ n-2.\ n-3.\ n-4.\ n-5.\ n-6$ &c.$):(l.\ l-1.\ l-2.\ l-3.\ l-4$ &c. $m.\ m-1.\ m-2.\ m-3.$ &c. $r.\ r-1.\ r-2.\ r-3.\ r-4.\ r-5$ &c.). Ex. gr. ſit $n=6$, $l=3$, $m=3$, $r=0$; erit numerus variationum $(6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1):(3.\ 2.\ 1.\ 3.\ 2.\ 1) = (6.\ 5.\ 4):(3.\ 2) = 5.\ 4 = 20$.

SCHO-

SCHOLION I.

130. *Ponamus mensæ assidere 13 personas. Quodsi quæratur, quoties loca permutare possint; reperietur numerus variationum* 13. 12. 11. 10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 6, 227, 020, 800.

SCHOLION II.

131. *Si vox aliqua ex literis non nimis multis componatur; eadem methodo, qua in resolutione problematis usi sumus, inveniri possunt sine meditatione omnia anagrammata in omnibus linguis possibilia. Ex. gr. inveniri debent anagrammata vocis* amor. *Erunt variationes possibiles.*

amor	mora	oram	ramo
amro	moar	orma	raom
aomr	mroa	oarm	rmao
aorm	mrao	oamr	rmoa
armo	maor	omra	roam
arom	maro	omar	roma

Sunt adeo anagrammata vocis amor *in lingua latina* Roma, mora, Maro, oram, ramo, armo.

SECTIO SECUNDA.

DE ALGEBRA.

CAPUT PRIMUM.

De Algebra ad Problemata arithmetica, eaque determinata, applicata.

DEFINITIO V.

132. *Algebra* est methodus resolvendi Problemata per æquationes.

DEFINITIO VI.

133. *Æquatio* est expressio ejusdem quantitatis per duos valores diversos, sed æquales; ex. gr. 2.3 = 2+4. STIFELIUS (*a*) definit eam per rationem æqualitatis inter duos terminos diversimode denominatos.

(*a*) In *Arithmet. integra* lib. 3. c. 1. p. 228. b.

DEFINITIO VII.

134. *Radix æquationis* est valor quantitatis incognitæ, quæ æquationem ingreditur. Ex. gr. si fuerit $a^2+b^2 = x^2$; radix erit $\sqrt{(a^2+b^2)}$.

DEFINITIO VIII.

135. Si valor ipsius x fuerit positivus; ex. gr. $x=3$; *Radix* dicitur *vera*.

DEFINITIO IX.

136. Si valor ipsius x fuerit negativus; ex. gr. $x=-5$; *Radix* dicitur *falsa*.

DEFINITIO X.

137. Si valor ipsius x fuerit radix quantitatis negativæ, ex. gr. $\sqrt{-5}$; *Radix imaginaria* appellatur (§. 71).

DEFINITIO XI.

138. *Æquatio* dicitur *simplex*, si quantitas incognita fuerit unius dimensionis; ex. gr. si $x=(a+b):2$.

DEFINITIO XII.

139. *Æquatio* dicitur *quadratica*, si quantitas incognita ad duas dimensiones assurgit, ut $x^2=a^2+b^2$: *cubica*, si ad tres, ut $x^3=a^3-b^3$ &c.

SCHOLION.

140. *In hac sectione tantum de æquatione simplici & quadratica agimus.*

PROBLEMA XXXVI.

141. *Problema datum algebraice resolvere.*

RESOLUTIO.

1. Quantitates datæ a quæsitis distinguantur; & datæ primis, quæsitæ ultimis alphabeti litteris denominentur (§. 3).
2. Quærantur tot æquationes, quot quantitates incognitæ occurrunt: quod si fieri nequeat, id indicio est, *Problema* non esse *determinatum*, sed unam vel plures quæsitarum pro arbitrio assumi posse. Inveniuntur autem æquationes, nisi in ipso Problemate contineantur, per Theoremata de æqualitate quantitatum agentia.
3. Quoniam in æquatione quantitates incognitæ cognitis sunt permixtæ; ea reducenda est, ita ut ex una parte tantum compareat quantitas incognita una, ex altera vero meræ cognitæ deprehendantur. Instituitur autem hæc reductio, si quantitates subductæ addantur, additæ subtrahantur, multiplicatæ dividantur, divisæ multiplicentur, e potentiis radices extrahantur, radices ad potentias evehantur, ut perpetua æqualitas conservetur (§. 88, 91, 93, 94, 255, 256 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Hæc sufficiunt pro æquationibus simplicibus reducendis; sed ad altiores aliis adhuc subsidiis opus est, quæ suo loco exponemus, nunc nonnisi extractionem radicis ex æquatione quadratica addituri.*

PROBLEMA XXXVII.

143. *Ex æquatione quadratica radicem extrahere.*

RESOLUTIO.

I. Si æquatio fuerit pura, ut $x^2=ab$; evidens est esse $x=\sqrt{ab}$.

II. Si æquatio fuerit affecta, ut $x \mp ax = \mp b^2$; tum x assumatur pro una parte radicis, erit a quantitas cognita secundi termini duplum partis alterius (§. 261 *Arithm.*), adeoque $\frac{1}{2}a$ pars altera. Complebitur adeo quadratum, si addatur $\frac{1}{4}aa$ (§. *cit.*): quo facto, radix extrahi potest, ut hic factum esse apparet:

Casus 1.

$$x^2+ax=b^2$$
$$\tfrac{1}{4}aa \quad \tfrac{1}{4}aa \text{ add.}$$
$$x^2+ax+\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2+b^2$$
$$x+\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+b^2)}$$
$$x=\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2+b^2)}-\tfrac{1}{2}a$$

Casus

Casus 2.

$$x^2 - ax = b^2$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$$

vel $x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)} > \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ valor ipsius x negativus, consequenter radix falsa (§.136), atque adeo solus valor $\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 + b^2)}$ est radix vera (§.135).

Casus 3.

$$x^2 - ax = -b^2$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 \quad \tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b^2$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{1}{2}a \\ \& \tfrac{1}{2}a - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

$$\& \; x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)}$$

Quoniam $\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2} = \tfrac{1}{2}a$, adeoque $\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - b^2)} < \tfrac{1}{2}a$, erit $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2 - b^2)}$ valor ipsius x positivus; consequenter radix vera (§.135). Habet adeo in præsente casu æquatio duas radices veras: cujus rei ratio paulo post ex exemplis patebit.

Ceterum ex multiplicatione patet esse $(\tfrac{1}{2}a - x)^2$ perinde ac $(x - \tfrac{1}{2}a)^2 = x^2 - ax + \tfrac{1}{4}a^2$.

PROBLEMA XXXVIII.

144. *Invenire numerum, cujus pars dimidia cum tertia & quarta, numerum integrum unitate superat.*

Sit numerus quæsitus x, erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = x + 1$$

hoc est $(12x + 8x + 6x) : 24 = x + 1$

seu $\tfrac{26}{24}x = x + 1$

$$\text{24 mult.}$$

$$26x = 24x + 24$$

$$24x \quad 24x \qquad \text{Subtr.}$$

$$2x = 24$$

$$\text{2 div.}$$

$$x = 12$$

Examen. $\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x = 6 + 4 + 3 = 13 = 12 + 1$

PROBLEMA XXXIX.

145. *Invenire numerum, cujus partes aliquota, qualescunque & quotcunque, simul sumta ipsum superant numero dato.*

Sit numerus datus f, quæsitus x, partes aliquotæ $\tfrac{a}{b}x$, $\tfrac{c}{d}x$, $\tfrac{e}{g}x$, &c. Erit per conditionem Problematis

$$\tfrac{a}{b}x + \tfrac{c}{d}x + \tfrac{e}{g}x \text{ \&c.} = f + x$$

h.e. $\dfrac{(adg + bgc + bde)x}{bdg} = f + x$ (§.235 *Arith.*)

$$(adg + bgc + bde)x = fdbg + bdgx$$

$$bdgx \qquad bdgx \text{ subt.}$$

$$(adg + bgc + bde - bdg)x = fbdg$$

$$x = fbdg : (adg + bgc + bde - bdg)$$

seu $adg + bgc + bde - bdg : bdg = f : x$.

Æquatio ultima hanc suppeditat

Regulam: 1. Fractiones datæ reducantur ad eandem denominationem. 2. A summa numeratorum subtrahatur denominator communis. 3. Per residuum dividatur factum ex eodem denominatore in numerum datum. Quotus est numerus quæsitus.

Ex.

Ex. gr. Sit $a:b = \frac{1}{2}; c:d = \frac{1}{3}, e:g = \frac{1}{4}$, $f = 1$; erit $x = 24 : (12 + 8 + 6 - 24) = 24 : 2 = 12$.

In analogia, in quam æquationem resolvimus, continetur hoc

Theorema. Si plures fractiones ad eandem denominationem reducuntur, erit numerus integer, cujus partes sunt fractiones istæ, ad harum supra illum excessum, ut communis denominator ad differentiam ejus a summa numeratorum.

PROBLEMA XL.

146. *Quantitates irrationales diversæ denominationis reducere ad candem.*

RESOLUTIO.

Sint quantitates irrationales reducendæ $\sqrt[m]{x^n}$ &, $\sqrt[r]{y^r}$, quemadmodum supra (§. 59). Fiat

$$\sqrt[m]{x^n} = t \qquad \sqrt[r]{y^r} = v$$
$$x^n = t^m \qquad y^r = v^r$$
$$x^{nr} = t^{mr} \qquad y^{rm} = v^{rm}$$
$$\sqrt[mr]{x^{nr}} = t \qquad \sqrt[mr]{y^{rm}} = v$$

Habemus adeo $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[mr]{x^{nr}}$ & $\sqrt[r]{y^r} = \sqrt[mr]{y^{rm}}$, ut supra (§. *cit.*); quo ipso patet, quod dubium videri poterat (§. 60), in exponentibus quantitatum irrationalium locum habere reductionem ad candem denominationem, si iidem fuerint fractiones diversæ denominationis.

SCHOLION.

147. *Hoc artificio reductionis uti possumus in aliis casibus similibus. Ita multiplicationem ac divisionem fractorum atque irrationalium eadem methodo investigare licet.*

PROBLEMA XLI.

148. *Datis summa duarum quantitatum, & earundem facto; invenire numeros.*

Sit summa $= a$ Semidiffer. $= x$
Fact. $= b$; erit quant. maj. $= \frac{1}{2}a + x$
min. $= \frac{1}{2}a - x$ (§. 6).

Ergo per conditionem Probl.

$$\frac{1}{4}aa - xx = b \qquad (§. 38).$$
$$xx \quad xx \quad \text{add.}$$
$$\frac{1}{4}aa = b + xx$$
$$b \quad b \text{ Subtr.}$$
$$\frac{1}{4}aa - b = xx$$
$$\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = x$$

Regula 1. A quadrato semisummæ duarum quantitatum subtrahatur factum earundem. 2. Ex residuo extrahatur radix, quæ erit semidifferentia earundem.

Sit ex. gr. $a = 14$, $b = 48$: erit $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - b)} = \sqrt{(49 - 48)} = 1$. Adeoque $\frac{1}{2}a + x = 7 + 1 = 8$; $\frac{1}{2}a - x = 7 - 1 = 6$. Sunt adeo numeri quæsiti 8 & 6. Nam $8.6 = 48$, & $8 + 6 = 14$.

COROLLARIUM.

149. Quoniam $\frac{1}{2}a$ est dimidium totius a, x differentia partis æqualis ab inæquali, b rectangulum partium inæqualium, æquatio secunda hoc continet

Theorema: Si totum dividatur in duas partes æquales & in duas inæquales; quadratum partis æqualis æquale est rectangulo inæqualium, una cum quadrato differentiæ partis æqualis ab inæquali.

SCHOLION.

150. *Patet adeo, quod sæpius casu in Theoremata incidamus, dum Problemata algebraice resolvimus; qualia subinde annotabimus. Regulas vero, quas quilibet proprio marte ex ultima æquatione eruere valet, in posterum prætermittemus.*

PROBLEMA XLII.

151. *Data summa dignitatum similium duarum quantitatum, & differentia earundem; invenire quantitatem utramque.*

Sit

Sit summa $= a$ Quantit. maj. $= y$
differentia $= b$ min. $= x$
erit per conditionem probl.

$$x^m + y^m = a \qquad y^m - x^m = b$$
$$\underline{x^m \quad x^m \text{ subt.}} \qquad \underline{x^m \quad x^m \text{ add.}}$$
$$y^m = a - x^m \qquad y^m = b + x^m$$

Quare (§.87 *Arithm.*)

$$a - x^m = b + x^m$$
$$\underline{+ x^m \quad + x^m \text{ add.}}$$
$$a = b + 2x^m$$
$$\underline{b \quad b \quad \text{subt.}}$$
$$a - b = 2x^m$$
$$\text{(2 div.}$$
$$(a - b) : 2 = x^m$$
$$\sqrt[m]{(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)} = x$$

Sit $m = 2$, $a = 97$, $b = 65$: erit $x = \sqrt{(48\tfrac{1}{2} - 32\tfrac{1}{2})} = \sqrt{16} = 4$, & hinc $y = \sqrt{(b + x^2)} = \sqrt{(65 + 16)} = \sqrt{81} = 9$.
Examen: $y^2 + x^2 = 81 + 16 = 97$ & $y^2 - x^2 = 81 - 16 = 65$.

Æquatio antepenultima resolvitur in hanc analogiam,

$a - b : x^m = 2 : 1$ (§.299 *Arithm.*).
quæ sequens suppeditat

Theorema. Excessus summæ duarum dignitatum similium supra differentiam earundem, est ad dignitatem minorem in ratione dupla.

PROBLEMA XLIII.

152. *Dato itinere diurno viatoris alicujus, una cum itinere diurno alterius ipsum dato tempore sequentis; invenire tempus, quo illum hic assequetur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
secundi $= b$
tempus datum $= c$
tempus quæs. $= x$,
erit iter intra tempus datum a primo confectum $= ac$; quod vero idem intra quæsitum emensus est $= ax$: iter posterioris intra tempus quæsitum reperietur $= bx$ (§.302 *Arithm.*). Quare, per conditionem Problematis,

$$ac + ax = bx$$
$$\underline{ax \quad ax} \text{ subtr. quia } bx > ax$$
$$ac = bx - ax$$
$$b - a \text{ div.}$$
$$ac : (b - a) = x$$

Sit $a = 6$, $b = 8$, $6 = 4$: erit $x = 24 : 2 = 12$.

Examen. Quoniam primus itineri impendit 16, alter vero 12 dies antequam conveniunt, & iter diurnum primi est 6, secundi 8; via primi est $6.16 = 96$, secundi $8.12 = 96$

Æquatio penultima in hanc analogiam resolvitur (§. 299 *Arithm.*).

$$b - a : a = c : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema: Si quidam viator alterum insequitur, tempore aliquo elapso, differentia viarum, quas eodem tempore uterque emetitur, est ad viam primi quem alter insequitur, ut tempus ab itinere primi usque ad initium itineris secundi elapsum ad tempus quo alter ipsum assequitur.

SCHOLION.

153. *Facile apparet, cum viatoris notio Problematis resolutionem non ingrediatur, Problema universalius de mobilibus quibuscunque concipi posse.*

PROBLEMA XLIV.

154. *Dato itinere diurno alicujus viatoris, una cum tempore ab initio itineris elapso; invenire iter diurnum ab alio viatore conficiendum, ut in dato tempore illum assequatur.*

Sit iter diurnum primi $= a$
tempus elapsum $= b$
tempus datum $= c$
iter diurnum alterius $= x$.

Erit, per conditionem Problematis, ut in Probl. præced.

$$ab + ac = cx$$
$$\text{———— } c \text{ div.}$$
$$(ab + ac) : c = x$$

Sit ex. gr. $a = 6$, $b = 4$, $c = 12$: erit $x = (24 + 72) : 12 = 96 : 12 = 8$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam (§. 299 *Arithm.*)

$$c : b + c = a : x$$

quæ sequens suppeditat

Theorema. Si quidam viator alterum insequitur tempore aliquo elapso, erit tempus, intra quod ipsum assequitur, ad tempus ab initio itineris hujus elapsum, ut iter diurnum primi ad iter diurnum secundi.

PROBLEMA XLV.

155. *Dato intervallo locorum, ex quibus eodem tempore duo viatores egrediuntur, una cum itinere diurno uniuscujuslibet; invenire tempus, quo sibi mutuo occurrent.*

Sit intervallum locorum $= a$
iter diurnum primi $= b$
secundi $= c$
tempus occursus $= x$,

erit via a primo intra tempus x confecta $= bx$, via quam alter eodem tempore emetitur $= cx$ (§. 302 *Arithm.*). Quare cum ambo junctim emensi sint totum intervallum locorum unde egrediebantur; habebimus

$$bx + cx = a$$
$$\text{———— } b + c \text{ div.}$$
$$x = a : (b + c)$$

Sit $a = 120$, $b = 6$, $c = 4$: erit $x = 120 : (6 + 4) = 120 : 10 = 12$. Duodecimo igitur die sibi mutuo occurrent.

SCHOLION.

156. *Problemata istiusmodi specialia sub initium difficiliora sunt solutu, quam abstracta; quoniam in his æquatio plerumque continetur, aut ex Theorematibus arithmeticis facile eruitur; in illis autem ex circumstantiis Problematis elicienda. Quodsi enim plures circumstantiæ occurrunt, Tyrones non statim eas pervident, quæ æquationem suppeditant. Discant igitur consultius esse ut Problematis abstractis solvendis primas studii Algebraici partes consecrent: insuperque notent velim, facilius Problemata specialia ad abstracta, seu generalia, quam vice versa abstracta ad specialia revocari; quia ista conditiones generales, unde solutio pendet, actu continent, in his vero circumstantiæ speciales, quæ ad solutionem nil conferunt, minime comparent. Ex. gr. Problema præsens in abstracto istiusmodi est.* Invenire numerum, qui in summam duorum datorum ductus producit numerum datum. *Similiter Problema* (§. 152) *in abstracto tale est:* Datis tribus quantitatibus, invenire quartam, ita ut factum ex quarta in secundam æquale sit facto ex prima in aggregatum ex tertia & quarta. *Hinc apparet ratio, cur Theorematum usus non statim in oculos occurrat. Nocent igitur, qui inveniri ac addisci prohibent ea quorum usus nondum constat, vel non statim primo intuitu in oculos occurrit.*

PROBLEMA XLVI.

157. *Data summa duarum quantitatum, & differentia quadratorum; invenire quantitates.*

Sit summa quantitatum $= a$
differentia quadratorum $= b$
Semidiff. quantitatum $= y$
erit quantitas major $= \frac{1}{2}a + y$
minor $= \frac{1}{2}a - y$ (§. 5).

Qua-

Quare

quadratum maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
min. $\frac{1}{4}a^2 — ay + y^2$

differ. (§. 30) $2ay = b$ per condit.
$2a$ div. — Probl.

$y = b : 2a$

Sit $b = 40$, $a = 10$: erit $y = 40 : 20 = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $49 — 9 = 40$.

PROBLEMA XLVII.

158. *Data summa duarum quantitatum, una cum summa quadratorum; invenire quantitatem utramque.*

Sit summa $= a$
Summa quadratorum $= b$
Semidiff. quantitatum $= y$
erit major $= \frac{1}{2}a + y$
minor $= \frac{1}{2}a — y$ } (§. 6.)

Quare

quadrat. maj. $\frac{1}{4}a^2 + ay + y^2$
minoris $\frac{1}{4}a^2 — ay + y^2$

summa $\frac{1}{2}a^2 + 2y^2 = b$
$\frac{1}{2}a^2$ $\frac{1}{2}a^2$ Subtr.

$2y^2 = b — \frac{1}{2}a^2$
— 2 div.
$y^2 = \frac{1}{2}b — \frac{1}{4}a^2$
— Ext. Rad.
$y = \sqrt{(\frac{1}{2}b — \frac{1}{4}a^2)}$

Sit $a = 10$, $b = 58$: erit $y = \sqrt{(29 - 25)} = \sqrt{4} = 2$. Hinc $\frac{1}{2}a + y = 5 + 2 = 7$ & $\frac{1}{2}a - y = 5 - 2 = 3$.

Examen: $7+3 = 10$, & $49+9 = 58$.

PROBLEMA XLVIII.

159. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum ex unoquoque in radicem quadratam alterius sit aequale numero dato.*

Sit factum unum $= a$
alterum $= b$
numerus unus $= x$
alter $= y$

erit, per conditionem Problematis,

$x\sqrt{y} = a$ — Quad. $y\sqrt{x} = b$ — Quad.
$x^2 y = a^2$ — y div. $y^2 x = b^2$ — y^2 div.
$x^2 = a^2 : y$ $x = b^2 : y^2$
— Quad.
$x^2 = b^4 : y^4$
$a^2 : y = b^4 : y^4$
— y^4 mult.
$a^2 y^3 = b^4$
— a^2 div.
$y^3 = b^4 : a^2$

$y = \sqrt[3]{(b^4 : a^2)}$

Sit $a = 18$, $b = 12$: erit $y = \sqrt[3]{(20736 : 324)} = \sqrt[3]{64} = 4$. Ergo $x = b^2 : y^2 = 144 : 16 = 9$.

Examen. $9\sqrt{4} = 2 \cdot 9 = 18$, & $4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$.

PROBLEMA XLIX.

160. *Invenire duos numeros, quorum factum aequale est numero dato, quadratum vero summae ad quadratum differentiae habet rationem datam.*

Sit factum $= a$ Summa $= 2x$
ratio $= b : c$ different. $= 2y$
erit major $= x + y$
minor $= x — y$

Ergo, per conditiones Problematis,

$xx — yy = a$
yy yy add.
$xx = a + yy$

$b : c = 4x^2 : 4y^2$ (§. 297 Arithm.)
$4cx^2 = 4by^2$
— ($4c$ div.
$x^2 = by^2 : c$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$a+y^2=by^2:c \quad c \text{ mult.}$$
$$ac+cy^2=by^2$$
$$cy^2 \quad cy^2 \text{ subtr.}$$
$$ac=by^2-cy^2 \quad b-c \text{ div.}$$
$$ac:(b-c)=y^2$$
$$\sqrt{ac}:\sqrt{(b-c)}=y$$

Sit $a=96, b:c=25:1$. Erit $y=\sqrt{96}:\sqrt{(25-1)}=\sqrt{4}=2$, & $x=\sqrt{(a+y^2)}=\sqrt{(96+4)}=\sqrt{100}=10$, consequenter numerus major $x+y=10+2=12$, & minor $x-y=10-2=8$.

Examen. $12.8=96$ & $100:4=25:1$.

PROBLEMA L.

161. *Dato pretio unius mensuræ vini; invenire quantitatem aquæ commiscendæ, ut una mensura dato alio pretio minore vendi queat.*

Sit pretium majus $=a$
minus $=b$
quantitas aquæ $=x$.

Cum aquæ pretium nullum sit; erit $1+x:1=a:b$; consequenter

$$b+bx=a \quad (\S.297\ \textit{Arithm.}).$$
$$b \text{ subt.}$$
$$bx=a-b \quad b \text{ div.}$$
$$x=(a-b):b=a:b-1$$

Sit $a=16$, $b=10$: erit $x=1\frac{6}{10}-1=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Theorema. Si vino pretiosiori aqua commiscenda, ut viliori pretio constet; quantitas aquæ commiscendæ est ad quantitatem vini, ut differentia pretiorum ad pretium minus.

Nempe vi æquationis penultimæ $x:1=a-b:b$.

Examen. Etenim si integra mensura veneat 10 grossis, tres ipsius quintæ veneunt 6 grossis (§. 302 *Arithm.*); quos si addas pretio unius mensuræ, quod est 10 grossorum, prodibunt 16 grossi pretium unius mensuræ vini generosioris.

PROBLEMA LI.

162. *Dato pretio vini generosi & pretio vilioris; determinare quantitatem vini vilioris generoso commiscendi, ut dato aliquo pretio medio venire queat.*

Sit pretium unius mensuræ vini
generosi $=a$
vilioris $=b$
medium $=c$
quantitas unius mensuræ $=1$
quantitas vilioris commiscendi $=x$
erit pretium ejus $=bx$
quantitas generosi commiscendi $=1-x$
erit ejus pretium $=a-ax$

Quare, per conditionem Probl.

$$a-ax+bx=c$$
$$ax \quad ax \text{ add. ob } ax>bx$$
$$a+bx=c+ax$$
$$bx \quad bx \text{ subt.}$$
$$a=c+ax-bx$$
$$c \quad c \quad \text{subt.}$$
$$a-c=ax-bx \quad a-b \text{ div.}$$
$$(a-c):(a-b)=x$$

Sit $a=16$, $b=10$, $c=12$; erit $x=(16-12):(16-10)=4:6=\frac{2}{3}$.

Examen. Pretium $\frac{2}{3}$ vilioris $=6\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ generosi $=5\frac{1}{3}$, adeoque mensuræ mixti $=6\frac{2}{3}+5\frac{1}{3}=12$.

PRO-

PROBLEMA LII.

163. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum, summa, & differentia quadratorum sint inter se æqualia.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$: erit per conditionem problematis

$$x^2 - y^2 = xy \qquad x + y = xy$$

$$\underline{\phantom{x + {}} y \phantom{{} = x} y} \text{ subt.}$$

$$x = xy - y$$

$$\underline{}\ x - 1 \text{ div.}$$

$$x : (x - 1) = y$$

Quodsi valor ipsius y jam inventus in æquatione sinisteriore substituatur, habebimus

$$x^2 - \frac{x^2}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x^2}{x - 1}$$

$$\underline{}\ x^2 - 2x + 1$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 = x^3 - x^2$$

$$x^4 - 2x^3 = x^3 - x^2$$

$$\underline{\phantom{x^4 - {}} x^3 \phantom{{} = {}} x^3} \text{ subtr.}$$

$$x^4 - 3x^3 = -x^2$$

$$\underline{}\ x^2 \text{ div.}$$

$$x^2 - 3x = -1$$

$$\underline{\tfrac{9}{4} \phantom{{} = -1} \tfrac{9}{4}} \quad (\text{§. } 143)$$

$$x^2 - 3x + \tfrac{9}{4} = \tfrac{9}{4} - 1 = \tfrac{5}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} x - \tfrac{3}{2} \\ \tfrac{3}{2} - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

Est vero $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ radix vera; sed $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ non est numerus minor y: quia, si numerus minor diceretur y, ad aliam æquationem deveniretur, quemadmodum apparet, si valore ipsius x per æquationem $xy - x = y$ reperto & in æquatione $x^2 - y^2 = xy$ substituto, reductio legitime instituatur. Tunc enim reperitur $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$, ubi $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ est radix falsa, quia $\frac{1}{2}\sqrt{5} > \frac{1}{2}$.

Examen. Est enim $x + y = 2 + \sqrt{5}$, $xy = 2 + \sqrt{5}$, & $x^2 - y^2 = 2 + \sqrt{5}$.

PROBLEMA LIII.

164. *Datis, in progressione arithmetica, termino primo & ultimo, atque differentia terminorum; invenire numerum terminorum & summam progressionis.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
differentia $= d$
numerus terminorum $= x$
summa $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*

$$b = a + dx - d \qquad y = \tfrac{1}{2}(b + a)x$$

$$\underline{d \phantom{{} = a + dx - {}} d} \text{ add.}$$

$$b + d = a + dx$$

$$\underline{\phantom{b + {}} a \phantom{{} = {}} a} \text{ subt.}$$

$$b + d - a = dx$$

$$\underline{}\ (d \text{ div.}$$

$$(b + d - a) : d = x$$

Quodsi hic valor in æquatione dextra substituatur, habebimus

$y = \frac{1}{2}(b + a)(b + d - a) : d = (b^2 + bd - ab + ab + ad - a^2) : 2d = (b^2 + bd + ad - a^2) : 2d = \frac{1}{2}(b + a) + (b^2 - a^2) : 2d.$

Sit $a = 2$, $b = 17$, $d = 3$: erit $x = (17 + 3 - 2) : 3 = 18 : 3 = 6$, & $y = \frac{1}{2}(17 + 2) + (289 - 4) : 6 = \frac{19}{2} + \frac{285}{6} = 9\frac{1}{2} + 47\frac{1}{2} = 57$.

PROBLEMA LIV.

165. *Datis termino primo, differentia terminorum & summa progressionis arithmeticæ; invenire numerum terminorum & terminum ultimum.*

Sit

Sit terminus primus $= a$
differentia $= d$
summa $= c$
ultimus $= y$
terminorum numerus $= x$
erit (§.333 *Arithm.* & §.107 *Anal.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a+y)=c \qquad a+dx-d=y$$

2 mult.

$$ax+xy=2c$$

$ax \quad ax$ Subtr.

$$xy=2c-ax$$

x div.

$$y=(2c-ax):x$$

Ergo (§. 87 *Arithm.*)

$$(2c-ax):x=a+dx-d$$

x mult.

$$2c-ax=ax+dx^2-dx$$

$ax \quad ax$ add.

$$2c=dx^2+2ax-dx$$

d div.

$$\frac{2c}{d}=x^2+\frac{2a-d}{d}x$$

hoc est, si fiat $(2a-d):d=m$

$$2c:d=x^2+mx$$

$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$ add.

$$\tfrac{1}{4}m^2+2c:d=x^2+mx+\tfrac{1}{4}m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2c:d)}=x+\tfrac{1}{2}m$$

$\tfrac{1}{2}m \quad \tfrac{1}{2}m$ subt.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2+2c:d)}-\tfrac{1}{2}m=x$$

Sit $a=2$, $d=3$, $c=57$: erit $m=(4-3):3=\tfrac{1}{3}$; consequenter $x=\sqrt{(\tfrac{1}{36}+\tfrac{114}{3})}-\tfrac{1}{6}=\sqrt{\tfrac{1369}{36}}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{37}{6}-\tfrac{1}{6}=\tfrac{36}{6}=6$, & $y=2+18-3=2+15=17$.

PROBLEMA LV.

166. *Datis termino primo & ultimo una cum summa progressionis arithmeticae; invenire numerum & differentiam terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
summa $= c$
differentia $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§.333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$$\tfrac{1}{2}x(a+b)=c \qquad a+xy-y=b$$

2

$$x(a+b)=2c \qquad xy-y=b-a$$

$$x=2c:(a+b) \qquad y=\frac{b-a}{x-1}$$

$$x-1=\frac{2c}{a+b}-1 \qquad =\frac{(b+a)(b-a)}{2c-a-b}$$

$$=\frac{2c-a-b}{a+b}$$

Sit $a=2$, $b=17$, $c=57$: erit $x=114:19=6$, & $y=(19.15):(114-19)=285:95=3$.

Theorema. In progressione arithmetica, est ut differentia summae ex termino primo & ultimo a duplo summae progressionis ad differentiam termini primi ab ultimo, ita summa termini primi & ultimi ad differentiam progressionalem.

PROBLEMA LVI.

167. *Datis differentia & numero terminorum, una cum summa progressionis arithmeticae; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit numerus terminorum $= n$
differentia $= d$
summa $= c$
term. primus $= x$
ultimus $= y$
erit (§.333 *Arithm.* & §.107 *Anal.*).

$$\tfrac{1}{2}nx+\tfrac{1}{2}ny=c \qquad x+nd-d=y$$

h. c. $nx+\tfrac{1}{2}n^2d-\tfrac{1}{2}nd=c$ $\tfrac{1}{2}n$ div.

$$2x+nd-d=2c:n$$

$nd-d$ subt.

$$2x=2c:n-nd+d$$

2 div.

$$x=c:n-\tfrac{1}{2}nd+\tfrac{1}{2}d$$

Sit

Sit $n=6, d=3, c=57$: erit $x=9\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}-9=2$, & $y=2+18-3=17$.

PROBLEMA LVII.

168. *Datis differentia terminorum, termino ultimo, & summa progressionis arithmeticæ; invenire terminum primum & numerum terminorum.*

Sit terminus ultimus $= b$
terminorum differ. $= d$
summa $= c$
terminus primus $= x$
numerus termin. $= y$

erit (§. 333 *Arithm.* & §. 107 *Anal.*)

$$\tfrac{1}{2}y(b+x)=c \qquad b=x+dy-d$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ 2$$

$$y(b+x)=2c \qquad b+d-x=dy$$

$$y=2c:(b+x) \qquad (b+d-x):d=y$$

Quamobrem (§. 87 *Arithm.*)

$$2c:(b+x)=(b+d-x):d$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ d \text{ mult.}$$

$$2cd:(b+x)=b+d-x$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ b+x \text{ mul.}$$

$$2cd=b^2+bd-bx+bx+dx-x^2$$

$$x^2-dx=b^2+bd-2cd$$

$$\tfrac{1}{4}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{4}d^2 \text{ (§. 143).}$$

$$x^2-dx+\tfrac{1}{4}d^2=\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd$$

$$\left.\begin{matrix} x-\tfrac{1}{2}d \\ \tfrac{1}{2}d-x \end{matrix}\right\}=\sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$$

$$x=\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}.$$

Quodsi $\frac{1}{2}d > x$, erit $\frac{1}{2}d-x$ quantitas positiva, adeoque $x=\frac{1}{2}d-\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$: si vero $\frac{1}{2}d < x$, quantitas $\frac{1}{2}d-x$ æquivalet privativo, sed $x-\frac{1}{2}d$ positivo: adeoque $x=\frac{1}{2}d+\sqrt{(\frac{1}{4}d^2+b^2+bd-2cd)}$.

Sit $b=17, d=3, c=57$: erit $x=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}+289+51-342)}=\frac{3}{2}+\sqrt{(2\frac{1}{4}-2)}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$, & $y=(17+3-2):3=\frac{18}{3}=6$.

PROBLEMA LVIII.

169. *Datis summa progressionis arithmeticæ, numero terminorum, & facto ex primo in ultimum; invenire terminos singulos.*

Sit factum $= a$
numerus terminorum $= n$
summa $= c$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit (§. 107 & per condit. Probl.)

$$\tfrac{1}{2}n(x+y)=c \qquad xy=a$$

$$\overline{\qquad\qquad}\ \tfrac{1}{2}n \qquad \overline{\qquad}\ x \text{ div.}$$

$$x+y=2c:n \qquad y=a:x$$

$$\text{h. e. } x+\frac{a}{x}=\frac{2c}{n}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\ x \text{ mult.}$$

$$x^2+a=2cx:n$$

$$x^2-2cx:n=-a$$

$$+c^2:n^2+c^2:n^2 \text{ add.}$$

$$x^2-2cx:n+c^2:n^2=c^2:n^2-a$$

$$\left.\begin{matrix} x-c:n \\ c:n-x \end{matrix}\right\}=\sqrt{(c^2:n^2-a)}$$

$$x=\frac{c}{n}\pm\sqrt{(c^2:n^2-a)}$$

Signum $+$ valet pro termino ultimo; signum autem $-$ pro primo.

Sit $c=57, n=6, a=34$: erit $x=\frac{57}{6}-\sqrt{(\frac{3249}{36}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{(90\frac{1}{4}-34)}=9\frac{1}{2}-\sqrt{56\frac{1}{4}}=9\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{225}{4}}=9\frac{1}{2}-\frac{15}{2}=2$, & $y=9\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}=17$.

PROBLEMA LIX.

170. *Invenire numerum terminorum in serie imparium summandorum, ut prodeat potentia data numeri dati.*

RESO-

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
erit dignitas ejus $= n^m$
terminus prim. progr. $= 1$
differenti term. $= 2$.
Sit num. term. $= x$
erit summa progress. $= x^2$ (§. 108).
Ergo, per conditionem Probl.

$$\frac{x^2 = n^m}{x = n^{m:2}} \text{ Ext. Rad.}$$

Patet adeo, Problema non esse possibile nisi in iis casibus, ubi exponens dignitatis m est numerus par, ut per 2 dividi possit.

Ex. gr. Sit $m = 2$, erit $x = n$, hoc est, numerus terminorum est idem cum radice quadrata, quemadmodum supra reperimus (§. 110). Sit $m = 4$; erit $x = n^2$, hoc est, numerus terminorum summandorum est radicis quadratus, si potentia quarti gradus desideretur, veluti si $n = 2$, erit $2^4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

PROBLEMA LX.

171. *Invenire numeros impares totidem numero, quos numerus datus habet unitates, & quorum additione prodit potentia data numeri hujus dati.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= n$
dignitas ejus $= n^m$
terminus primus $= x$

Quoniam in serie numerorum imparium differentia terminorum $= 2$, & numerus terminorum est n *per hypoth.* erit summa progressionis $= nx + n^2 - n$ (§. 108); consequenter, per conditionem Problematis,

$$\frac{nx + n^2 - n = n^m}{x + n - 1 = n^{m-1}} \; n \text{ div.}$$
$$\frac{n - 1 \qquad n - 1}{x = n^{m-1} - n + 1} \text{ subtr.}$$

Patet adeo Problema esse possibile in omni casu.

Sit ex. gr. $m = 2$, erit $x = n - n + 1 = 1$, ut supra (§. 110).

Sit $m = 3$, erit $x = n^2 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 4 - 1 = 3$, adeoque $2^3 = 3 + 5 = 8$. Sit $n = 3$; erit $x = 9 - 2 = 7$, adeoque $3^3 = 7 + 9 + 11 = 27$.

Patet adeo quomodo numeri cubici ex additione numerorum imparium procreentur.

Sit $m = 4$, erit $x = n^3 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 8 - 1 = 7$, adeoque $2^4 = 7 + 9 = 16$. Sit $n = 3$, erit $x = 27 - 2 = 25$, adeoque $3^4 = 25 + 27 + 29 = 81$.

Sit $m = 5$, erit $x = n^4 - n + 1$. Sit porro $n = 2$, erit $x = 16 - 1 = 15$, adeoque $2^5 = 15 + 17 = 32$. Sit $n = 3$, erit $x = 81 - 2 = 79$, adeoque $3^5 = 79 + 81 + 83 = 243$.

SCHOLION.

172. *Mira igitur facilitate ostendimus ad captum Tyronum, quomodo potentiæ cujuscunque gradus ex additione numerorum imparium procreentur, quod imperfectius multoque intricatius proponitur in* Miscellaneis Berolinensibus p. 327. & seqq.

PROBLEMA LXI.

173. *Invenire tres numeros continue proportionales; dato facto ex quadrato tertii in primum, una cum denominatore rationis.*

Sit factum $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$
tertius $= m^2x$ (§. 114).

Quare, per conditionem Problematis,

$$\frac{a = m^4x^3}{a : m^4 = x^3} \; m^4 \text{ div.}$$
$$\sqrt[3]{(a : m^4)} = x$$

Sit

Sit ex. gr. $a = 648$, $m = 3$: erit $x = \sqrt[4]{(648:81)} = \sqrt[4]{8} = 2$.

Æquatio 1ª resolvitur in hanc analogiam $1 : m^4 = x^3 : a$ (§.299. *Arithm.*)

Quare cum $1 : m^4$ sit ratio quadruplicata $1 : m$ (§.159 *Arithm.*); sequens enascitur

Theorema: Cubus termini primi in proportione geometrica continua est ad factum ex quadrato tertii in primum in ratione quadruplicata primi ad secundum.

PROBLEMA LXII.

174. *Numerum datum in tres partes continue proportionales dividere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= b$
pars prima $= x$
erit secunda $= bx$
tertia $= b^2x$ (§.114)

&, per conditionem Problematis,

$$b^2x + bx + x = a$$
$$\overline{} \; b^2 + b + 1 \text{ div.}$$
$$x = a : (b^2 + b + 1)$$

Sit $b = 4$, $a = 42$: erit $x = 42 : (16 + 4 + 1) = 42 : 21 = 2$.

PROBLEMA LXIII.

175. *Numerum datum in terminos quotcunque proportionales resolvere, dato denominatore rationis.*

Sit numerus datus $= a$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
erit secundus $= mx$
tertius $= m^2x$
quartus $= m^3x$ &c.

Ergo, per conditionem Problematis,

$$x + mx + m^2x + m^3x + m^4x \text{ \&c.} = a$$
$$x = a : (1 + m + m^2 + m^3 + m^4 \text{ \&c.})$$

Sit $a = 364$, $m = 3$ & termini sint numero sex: erit $x = 364 : (1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243) = 364 : 364 = 1$. Ergo 1, 3, 9, 27, 81, 243 est series proportionalium quæsita.

PROBLEMA LXIV.

176. *Inter duos numeros datos invenire quotcunque medios continue proportionales.*

RESOLUTIO.

Sit primus datorum $= a$
ultimus $= b$
mediorum primus $= x$
numerus mediorum $= m$

erit, per conditionem Problematis (§. 302 *Arithm.*)

$$a,\ x,\ \frac{x^2}{a},\ \frac{x^3}{a^2},\ \frac{x^4}{a^3},\ \text{\&c.}\ \frac{x^m}{a^{m-1}},\ b$$

consequenter (§. 118)

$$x^{m+1} : a^{m-1} = ab$$
$$\overline{} \; a^{m-1} \text{ m.}$$
$$x^{m+1} = a^m b$$
$$\overline{} \text{ Ext. Rad.}$$
$$x = \sqrt[m+1]{a^m b}$$

Sit $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$; erit $m + 1 = 5$, adeoque $x = \sqrt[5]{243} = 3$; consequenter termini intermedii sunt 3, 9, 27, 81.

SCHOLION.

177. *Ad manus esse debet Tabula dignitatum superiorum pro digitis singulis, qualis extat pro quadratis & cubis (§. 257 Arithm.).*

COROLLARIUM.

178. Quodsi numerus, qui exprimit terminum desideratum, fuerit n; erit medius proportionalis $= x^n : a^{n-1}$. Quare, si pro x substituatur valor modo inventus $\sqrt[m+1]{a^m b} = a^{m:(m+1)} b^{1:(m+1)}$; prodibit numerus quæsitus $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{n-1}$ $= a^{mn:(m+1)} b^{n:(m+1)} : a^{(mn-m+n-1):(m+1)}$ $= a^{(m-n+1):(m+1)} b^{n:(m+1)}$.

SCHOLION.

179. *Cadant, ex. gr. inter 1 & 243 quatuor medii proportionales continue, & quæratur eorum secundus: erit* $a = 1$, $b = 243$, $m = 4$, $n = 2$, *adeoque* $(m - n + 1) : (m + 1) = \frac{3}{5}$, $n : (m + 1) = \frac{2}{5}$, *consequenter numerus quæsitus* $\sqrt[5]{a^3 b^2} = \sqrt[5]{59049} = 9$.

PROBLEMA LXV.

180. *Data summa termini primi & ultimi, itemque summa secundi & tertii, in proportione sive continua, sive discreta, una cum denominatore rationis; invenire terminos singulos.*

Sit summa prima $= a$

secunda $= b$

denominator $= m$

terminus primus $= x$,

erit quartus $= a - x$

secundus $= mx$

tertius $= b - mx$

Quare, per conditionem Problematis,

$$x : mx = b - mx : a - x$$

$$\text{Hinc } ax - x^2 = mbx - m^2x^2$$

$$\text{------------ } x \text{ div.}$$

$$a - x = mb - m^2x$$

$$m^2x - x = mb - a$$

$$\text{------------ } m^2 - 1$$

$$x = \frac{mb - a}{m^2 - 1}$$

Sit $a = 13$, $b = 11$, $m = 2$: erit $x = (22 - 13) : (4 - 1) = 9 : 3 = 3$.

PROBLEMA LXVI.

* 180. *Invenire tres numeros continue proportionales ejus conditionis, ut differentia primi & secundi æquetur numero dato, & differentia secundi atque tertii æqualis sit iisdem numero dato.*

Sit differ. prima $= a$

differ. secunda $= b$

terminus I $= x$

erit II $= x + a$

III $= x + a + b$

Per conditionem Problematis,

$$x : x + a = x + a : x + a + b$$

$$x^2 + ax + bx = x^2 + 2ax + a^2$$

$$x^2 + ax \quad x^2 + ax \quad \text{subt.}$$

$$bx = ax + a^2$$

$$bx - ax = a^2$$

$$\text{------------ } (b-a) \text{ div.}$$

$$x = a^2 : (b - a)$$

Sit $a = 8$, $b = 24$: erit $x = 64 : (24 - 8) = 64 : 16 = 4$.

Analogia, in quam resolvitur æquatio antepenultima, $b - a : a = a : x$, sequens continet

Theorema: Si fuerint tres numeri continue proportionales, erit differentia primi & secundi numerus medius proportionalis inter differentiam differentiæ termini primi & secundi a differentia secundi ac tertii & terminum primum.

PROBLEMA LXVII.

181. *Datis in progressione geometrica termino primo & ultimo, atque terminorum numero; invenire denominatorem rationis.*

Sit

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
numerus terminorum $= n$
denominator $= x$
Erit (§. 121)
$b = x^{n-1} a$
——— a div.
$b : a = x^{n-1}$
$b^{1:(n-1)} : a^{1:(n-1)} = x.$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $n = 6$: erit $x = \sqrt[5]{(486 : 2)} = \sqrt[5]{243} = 3.$

PROBLEMA LXVIII.

182. *Datis denominatore rationis, terminorum numero, & summa progressionis geometricæ; invenire terminum primum.*

Sit denominator $= m$
numerus terminorum $= n$
summa progress. $= c$
terminus primus $= x$
erit ultimus $= m^{n-1} x$
consequenter (§. 121)
$c = (m^n x - x) : (m - 1)$
——— $m - 1$
$mc - c = m^n x - x$
——— $m^n - 1$
$(mc - c) : (m^n - 1) = x$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $c = 728$: erit $x = 2 . 728 : 728 = 2.$

Analogia, in quam æquatio penultima resolvitur, $c : x = m^n - 1 : m - 1$, suppeditat hoc

Theorema: Summa progressionis geometricæ est ad terminum primum, ut dignitas denominatoris rationis, cujus exponens numero terminorum æqualis est, unitate mulctata ad denominatorem ipsum unitate imminutum.

PROBLEMA LXIX.

183. *Datis, in progressione geometrica, termino primo & ultimo, una cum denominatore rationis; invenire numerum terminorum.*

Sit terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= m$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)

$m^{x-1} a = b$, hoc est, si logarithmus ipsius a ponatur la, logarithmus ipsius $m = lm$, & logarithmus ipsius $b = lb$,

$xlm - lm + la = lb$ (§. 341, 337 *Arith.*)
$xlm = lb - la + lm$
——— lm div.
$x = (lb - la) : lm + 1$

Sit $a = 2$, $b = 486$, $m = 3$, erit
$lb = 2. 6866363$
$la = 0. 3010300$
$lb - la = 2. 3856063$

$lb - la = 23856063$ (5
$lm = 4771213$ (1
$6 = x$

PROBLEMA LXX.

184. *Datis summa progressionis geometricæ, termino primo, atque ultimo; invenire numerum terminorum ac denominatorem rationis.*

Sit summa $= c$
terminus primus $= a$
ultimus $= b$
denominator rationis $= y$
numerus terminorum $= x$
erit (§. 121)
$c = (by - a) : (y - 1)$ $b = y^{x-1} a$
$cy - c = by - a$
$cy - by = c - a$
——— $c - b$
$y = (c - a) : (c - b)$

 Æqua-

Æquatio altera, adhibitis logarithmis, in sequentem degenerat (§. 341, 337 *Arithm.*).

$lb = xly - ly + la$

$lb + ly - la = xly$

ly div.

$(lb - la) : ly + 1 = x$

Quodsi substituatur valor ipsius ly paulo ante inventus, qui est, $l(c-a) - l(c-b)$; habebimus.

$$\frac{lb - la}{l(c-a) - l(c-b)} + 1 = x$$

Sit $c = 728$, $a = 2$, $b = 486$: erit

$lb = 2.6866363$	$c = 728$
$la = 0.3010300$	$b = 486$
$lb - la = 2.3856063$	$c - b = 242$
$l(c-a) = 2.8609366$	$c = 728$
$l(c-b) = 2.3838154$	$a = \quad 2$
Differ. $= 4771212$	$c - a = 726$

23856063 ⎛ 5
4771212 ⎝ 1

$6 = x$

PROBLEMA LXXI.

185. *Datis, in progressione geometrica, facto ex primo in ultimum, numero terminorum, & denominatore rationis; invenire terminum primum & ultimum.*

Sit factum $= f$
numerus termin. $= n$
denominator $= m$
terminus primus $= x$
ultimus $= y$

erit, per conditiones Problematis,

$xy = f$ $\qquad$ $m^{n-1} x = y$

x div.

$y = f : x$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$f : x = m^{n-1} x$

x mult.

$f = m^{n-1} x^2$

m^{n-1} div.

$f : m^{n-1} = x^2$

Ext. Rad.

$\sqrt{f} : \sqrt{m^{n-1}} = x$

Sit $m = 3$, $n = 6$, $f = 972$: erit $x = \sqrt{972} : \sqrt{243} = \sqrt{4} = 2$.

DEFINITIO XIII.

186. Tres vel quatuor *quantitates* dicuntur *Harmonice proportionales*, si, in priore casu, differentia primi & secundi fuerit ad differentiam secundi atque tertii, ut primus ad tertium; in casu posteriore, differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti ut primus ad quartum:

Ex. gr. 10, 16 & 40 sunt in proportione harmonica: est enim $6 : 24 = 10 : 40$.

Si termini proportionales in casu priore continuentur, oritur *Progressio Harmonica.*

PROBLEMA LXXII.

187. *Datis duabus quantitatibus, invenire tertiam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 186)

$b - a : x - b = a : x$

$ax - ab = bx - ax$ (§. 297 *Arith.*)

$2ax - bx = ab$

$(2a - b)$ div.

$x = ab : (2a - b)$

Ex. gr. Sit $a = 10$, $b = 16$: erit $x = 160 : (20 - 16) = 160 : 4 = 40$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam $2a - b : a = b : x$, unde sequens enascitur

Theo-

Theorema. Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit differentia secundi a duplo primi ad primum, ut secundus ad tertium.

COROLLARIUM I.

188. Si $2a = b$; erit $x = ab : 0$, consequenter $1 : 0 = x : ab$ (§. 174 *Arithm.*). Quare cum non sit $1 = 0$, nec erit $x = ab$, adeoque in hoc casu nullus numerus harmonice proportionalis ipsis a & b inveniri potest. Ex. gr. si $a = 12$, $b = 24$: juxta regulam $x = 12 . 24 : (24 - 24) = 12 . 24 : 0$. Sed non licet $12 . 24$ seu 288 pro termino tertio assumere: alias enim foret $12 : 264 = 12 : 288$ (§. 186): Quod absurdum. Multo minus inveniri poterit, si $b > 2a$.

COROLLARIUM II.

189. Quodsi ex tribus proportionalibus 6, 8, 12, terminus secundus sumatur pro a, tertius pro b, invenietur quartus continue proportionalis $= 8.12 : (16 - 12) = 8. 12 : 4 = 8. 3 = 24$.

COROLLARIUM III.

190. Cum eodem modo, si tertius pro a, quartus pro b sumatur, quintus inveniri queat, & ita porro in infinitum; datis duobus terminis progressio, si possibile (§. 188), continuatur per regulam inventam. Ex. gr. si $a = 10 . b = 12$, erit tertius $12.10 : (20 - 12) = 15$. Inde quartus $12. 15 : (24 - 15) = 20$; quintus $15. 20 : (30 - 20) = 30$; sextus $20. 30 : (40 - 30) = 60$. Sed ulterius continuari nequit ob $60 = 2. 30$ (§. 188).

PROBLEMA LXXIII.

191. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= x$
tertia $= b$

erit $x - a : b - x = a : b$ (§. 186)

$bx - ab = ab - ax$ (§. 297 *Arithm.*)

$ax + bx = 2ab$

$a + b$ div.

$x = 2ab : (a + b)$

Ex. gr. Sit $a = 10, b = 40$: erit $x = 800 : 50 = 16$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam, $a + b : 2a = b : x$, unde

Theorema: Si fuerint tres numeri harmonice proportionales, erit summa primi & ultimi ad primi duplum, ut ultimus ad medium.

PROBLEMA LXXIV.

192. *Datis tribus quantitatibus; invenire quartam harmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= c$
quarta $= x$
erit (§. 186)

$b - a : x - c = a : x$

$bx - ax = ax - ac$ (§ 297 *Arithm.*)

$ac = 2ax - bx$

$(2a - b)$ div.

$ac : (2a - b) = x$

Sit ex. gr. $a = 6, b = 8, c = 12$: erit $x = 72 : (12 - 8) = 72 : 4 = 18$.

Æquatio penultima in hanc resolvitur analogiam: $2a - b : a = c : x$.

Theorema. Si fuerint quatuor quantitates harmonice proportionales, erit ut differentia secundæ a duplo primæ ad primam, ita tertia ad quartam.

DEFINITIO XIV.

193. *Proportio Contraharmonica* est ea terminorum trium relatio, in qua differentia primi & secundi est ad diffe-

differentiam secundi & tertii ut tertius ad primum.

Ex. gr. 3, 5 & 6 sunt numeri contraharmonice proportionales: est enim $2 : 1 = 6 : 3$.

PROBLEMA LXXV.

194. *Datis duabus quantitatibus; invenire tertiam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$
secunda $= b$
tertia $= x$
erit (§. 193)

$$b - a : x - b = x : a$$

$$ab - aa = x^2 - bx \text{ (§. 297 Arithm.)}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 \quad \tfrac{1}{4}b^2 \text{ add. (§. 143)}$$

$$\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2 = x^2 - bx + \tfrac{1}{4}b^2$$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x - \tfrac{1}{2}b, \text{ ob } x > b$$

$$\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + ab - a^2)} = x$$

Ex. gr. Sit $a = 3$, $b = 5$: erit $x = \frac{5}{2} + \sqrt{(\frac{25}{4} + 15 - 9)} = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

PROBLEMA LXXVI.

195. *Datis duabus quantitatibus; invenire mediam contraharmonice proportionalem.*

Sit prima $= a$ media $= x$
tertia $= b$
erit (§. 193)

$$x - a : b - x = b : a$$

$$ax - a^2 = b^2 - bx \text{ (§. 297 Arithm.)}$$

$$ax + bx = a^2 + b^2$$

$a + b$ div.

$$x = (a^2 + b^2) : (a + b)$$

Ex. gr. sit $a = 3$, $b = 6$: erit $x = (9 + 36) : (3 + 6) = 45 : 9 = 5$.

Theorema. Si summa duorum quadratorum dividitur per summam radicum, quotus est inter radices medius contraharmonice proportionalis.

DEFINITIO XV.

196. *Numerus pronicus* est, qui aggregato ex radice & quadrato ejusdem æqualis.

COROLLARIUM I.

197. Si in progressione arithmetica terminus primus fuerit 2, differentia terminorum itidem 2, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= 2n + \frac{1}{2}(n^2 - n)2$ (§. 108), $= 2n + n^2 - n = n^2 + n$, adeoque numerus pronicus, cujus radix numero terminorum æqualis.

COROLLARIUM II.

198. Patet adeo numeros pronicos prodire per summationem progressionis numerorum parium. Sit enim
progressio 2, 4, 6, 8, 10, &c.
erunt pronici 2, 6, 12, 20, 30, &c.

PROBLEMA LXXVII.

199. *Ex dato numero radicem pronicam extrahere.*

RESOLUTIO.

Sit numerus datus $= a$, radix pronica $= x$
erit (§. 196)

$$x^2 + x = a$$

$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \text{ (§. 143)}$$

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = a + \tfrac{1}{4}$$

$$x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{(a + \tfrac{1}{4})} = \sqrt{\frac{4a + 1}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)}$$

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4a + 1)} - \tfrac{1}{2}$$

Theorema. Si quadruplo numeri pronici addatur unitas, & radix unitate mulctata bifariam dividatur, quotus est radix pronica.

Sit $a = 72$, erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(4 \cdot 72 + 1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{289} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2} - \frac{1}{2} = 8$.

Examen. Nam $64 + 8 = 72$.

PRO-

PROBLEMA LXXVIII.

200. *Invenire summam Quadratorum & Cuborum, quorum radices in serie numerorum naturali progrediuntur.*

Sit $0+1+1+1+1+1$ &c. $= \int n^0$
$0+1+2+3+4+5$ &c. $= \int n^1$
$0+1+4+9+16+25$ &c. $= \int n^2$
$0+1+8+27+64+125$ &c. $= \int n^3$
&c. &c.

$1+1+1+1+1+1$ &c. $= \int (n+1)^0$
$1+2+3+4+5+6$ &c. $= \int (n+1)^1$
$1+4+9+16+25+36$ &c. $= \int (n+1)^2$
$1+8+27+64+125+216$ &c $= \int (n+1)^3$
&c. &c.

Nimirum $\int n^0$ denotat summam quotlibet unitatum seriei a cyphra incipientis; $\int(n+1)^0$ summam quotlibet unitatum seriei ab unitate incipientis, quia 0 est exponens unitatis (§.55). Sed n repræsentat unamquamque unitatem in serie prima; $n+1$ in altera. Ergo, si numerus terminorum in utraque serie idem; erit $\int(n+1)^0 - \int n^0 = (n+1)^0 = 1$. Similiter $\int n^1$ denotat summam seriei numerorum naturalium a cyphra incipientis, & n quemlibet ejus terminum: $\int(n+1)^1$ summam seriei eorundem numerorum ab unitate incipientium & $n+1$ quemlibet ejus terminum 1, 2, 3 &c. quia 1 est exponens radicum, seu dignitatis primæ (§. *cit.*). Quare si in utraque serie fuerit idem terminorum numerus, erit $\int(n+1)^1 - \int n^1 = (n+1)^1$, ubi $n+1$ terminum ultimum seriei ab unitate incipientis denotat, quo scilicet ea differt a serie, quæ a cyphra inchoatur. Eodem modo patet, esse $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$, $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$, $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ &c. & in genere $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$.

Jam $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ (§.81)

$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1$$

hoc est, ob $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ per

$$(n+1)^2 - \int n^0 - 1 = 2\int n^1 \quad (\textit{dem.}$$

2 div.

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^0 \quad \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$, $\frac{1}{2}\int n^0 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1$ summa omnium radicum ab 0 usque ad $5 = 18 - 3 = 15$. Similiter, sit $n = 3$, erit $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$, $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$, adeoque $\int n^1 = 6$.

Est porro

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \text{ (§.84)}$$

$$\int(n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

h.e. ob $\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$ *per demonst.*

$$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

3 div.

$$\tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \tfrac{1}{3}\int n^0 - \tfrac{1}{3} = \int n^2$$

Ex. gr. Sit $n = 5$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$, adeoque $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Similiter sit $n = 3$, erit $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$, $\int n = 6$, $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$, adeoque $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Sit denique

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

$$\int(n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$$

$$\int(n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

h.e. ob $\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$ *per demonst.*

$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

4

$$\tfrac{1}{4}(n+1)^4 - \tfrac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \tfrac{1}{4}\int n^0 - \tfrac{1}{4} = \int n^3.$$

Sit ex. gr. $n = 5$, erit $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$, $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$, $\int n^1 = 15$, $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$, adeoque $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

SCHO-

SCHOLION I.

201. *Quod in summationibus, quibus in resolutione Problematis usi sumus, semper addenda sit unitas, exempla singularia palam loquuntur. Si enim in æquatione* $\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n + \int n^0 + 1$ *fuerit* $n = 4$ *erit:*

$$\int n^0 = 0+1+1+1+1$$
$$\int n^1 = 0+1+2+3+4$$
$$\int n^2 = 0+1+4+9+16$$
$$\int(n+1)^2 = 1+4+9+16+25$$

Unde cum differentia inter $\int(n+1)^2$ *&* $\int n^2$ *sit* 25, *&* $2\int n^1 + \int n^0$ *tantum* 24; *patet, ad conservandam æqualitatem, addendam esse unitatem.*

SCHOLION II.

202. *Eadem methodo, qua numerorum naturalium Quadrata & Cubos summare docuimus, altiores quoque dignitates summantur. Sed cum potentiæ in infinitum assurgant, ideo Problema generale pro casibus infinitis inveniendum.*

PROBLEMA LXXIX.

203. *Summare Potentias quascunque numerorum naturalium.*

Quoniam $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1}n^m + \frac{m+1.m}{1.2}n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}n^{m-3}$ &c. in infinit. (§. 95); erit

$$\int(n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1}\int n^m + \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} + \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3} \text{ \&c. in inf.} + 1.$$

Hinc $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. $-1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$.

Sed $\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (§. 200): Ergo $(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. in infin. $-1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$: consequenter $\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.2}\int n^{m-1} - \frac{m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3}$ &c. in infinit. $-\frac{1}{m+1}$.

Ex. gr. sit $m = 3$, erit $m+1 = 4$, $m-1 = 2$, $m-2 = 1$, $m-3 = 0$, adeoque $\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, ut ante (§. 200).

SCHOLION.

204. *Theorema generale terminis quidem constat infinitis; in casibus tamen specialibus numerus terminorum finitus evadit, quia reliqui evanescunt, quando numerus ab* m *subtrahendus sit ipsi* m *æqualis: quemadmodum ex allato exemplo speciali apparet. Ita vero summationem Potentiarum via vere analytica eruimus, eaque perfacili, ad captum Tyronum. Semper tamen utendum est termino ultimo* $\frac{1}{m+1}$: *cujus ratio ante allata* (§. 201).

COROLLARIUM.

205. Cum summatio Potentiarum superiorum a summatione omnium inferiorum pendeat; si in formulis altioribus pro $\int n^{m-2}$, $\int n^{m-3}$, $\int n^{m-1}$ &c. valores ex inferioribus substituantur, prodibunt formulæ per solum n summas Potentiarum determinantes, non præsuppositis summationibus anterioribus: Ex. gr.

$\int n^0 = n.$ (§.200)

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$ (§.200).

$= nn + 2n + 1$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= nn + n$

Hinc $\int n^1 = (nn+n):2.$

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§.200)

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$\quad - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

Hinc $\int n^2 = (n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n):3 = (2n^3 + 3n^2 + n):6.$

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§.200)

$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$

$\quad - 2n^3 - 3n^2 - n$

$\quad - 2n^2 - 2n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

Hinc $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2):4.$

$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$

$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$

$\quad - \frac{10}{4}n^4 - \frac{20}{4}n^3 - \frac{10}{4}n^2$

$\quad - \frac{20}{6}n^3 - \frac{30}{6}n^2 - \frac{10}{6}n$

$\quad - \frac{5}{2}n^2 - \frac{5}{2}n$

$\quad - n$

$\quad - 1$

$= n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{10}{6}n^3 \quad - \frac{1}{6}n$

$= (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n):6$

Hinc $\int n^4 = (6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n):30$

&c. &c. &c.

DEFINITIO XVI.

206. *Numeri Polygoni* sunt summæ progressionum arithmeticarum ab unitate incipientium. Dicuntur in specie *Triangulares*, si differentia terminorum fuerit 1; *Quadrati*, si 2; *Pentagoni*, si 3; *Hexagoni*, si 4; *Heptagoni*, si 5; *Octogoni*, si 6 &c.

Progr. Arithm.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
Num. Triang.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36
Progr. Arithm.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15
Num. Quadr.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64
Progr. Arithm.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22
Num. Pentag.	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92
Progr. Arithm.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29
Num. Hexag.	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120

SCHOLION.

207. *Numeri Polygoni nomina sortiuntur a figuris geometricis, in quas puncta unitatibus respondentia disponi possunt. Ex. gr. Tria puncta numeri triangularis 3 unitatibus respondentia disponuntur in triangulum: & idem tenendum est de reliquis numeris triangularibus.*

DEFINITIO XVII.

208. *Latus numeri Polygoni* est numerus terminorum progressionis arithmeticæ, qui summantur. *Numerus* vero *angulorum* est, qui indicat, quot angulos figura habet, unde numerus Polygonus nomen suum sortitur.

COROLLARIUM.

209. Numerus adeo angulorum in triangularibus 3; in tetragonis 4; in pentagonis 5 &c. consequenter differentiam terminorum, qui sumantur, excedit duabus unitatibus (§.206).

PROBLEMA LXXX.

210. *Dato latere numeri Polygoni, & numero angulorum; invenire numerum Polygonum.*

Sit latus $= n$

numerus angulorum $= a$

terminus primus progressionis $= 1$ (§.206).

differentia terminorum $= a - 2$ (§.209).

terminus ultimus $1 + (a-2)(n-1)$

primus 1 (§.333 *Arith.*)

Summa primi & ult. $2 + (a-2)(n-1)$

hoc est $4 + na - 2n - a$

dimid. term. num. $\frac{1}{2}n$

Num. Polyg. $2n + \frac{1}{2}n^2a - n^2 - \frac{1}{2}an$ (§.206, 107)
$= (n^2a - 2n^2 - an + 4n) : 2$
$= (n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$

Theorema. Numerus Polygonus est semidifferentia factorum ex quadrato lateris in numerum angulorum duabus unitatibus mulctatum, & ex ipso latere in numerum angulorum quaternario mulctatum.

COROLLARIUM I.

211. Sit $n = 3$, erit triangularis, $= \frac{1n^2 + 1n}{2}$

Sit $a = 4$, erit quadratus $= \frac{2n^2 - 0n}{2} = n^2$

Sit $a = 5$, erit pentagonus $= \frac{3n^2 - 1n}{2}$

Sit $a = 6$, erit hexagonus $= \frac{4n^2 - 2n}{2} = n^2 - n$

Sit $a = 7$, erit heptagonus $= \frac{5n^2 - 3n}{2}$

Sit $a = 8$, erit octogon. $= \frac{6n^2 - 4n}{2} = 3n^2 - 2n$
&c. &c.

COROLLARIUM II.

212. Quoniam numerus Polygonus (§.210). $(n^2(a-2) - n(a-4)) : 2$, erit summa seriei cujuscunque numerorum polygonorum $((a-2)\int n^2 - (a-4)\int n^1) : 2$. Nempe quia $a-2$ & $a-4$ sunt numeri constantes, qui in casu speciali sunt determinati, non summantur. Sed $\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$ & $\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2}$ $= \frac{3n^2 + 3n}{2}$ (§.205). Ergo summa polygonorum $((a-2)(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-4)(3n^2 + 3n)) : 12 = (2an^3 + 3an^2 + an - 4n^3 - 6n^2 - 2n - 3an^2 - 3an + 12n^2 + 12n) : 12 = (an^3 - an - 2n^3 + 3n^2 + 5n) : 6 = ((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ unde porro Theoremata specialia eliciuntur, determinato numero angulorum a. Nempe summa triangularium $(n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$
pentagonorum $(n^3 + n^2) : 2$
hexagonorum $(4n^3 + 3n^2 - n) : 6$
heptagonorum $(5n^3 + 3n^2 - 2n) : 6$
octogonorum $(2n^3 + n^2 - n) : 2$ &c. &c.

Est enim pro triangularibus $a = 3$, pro pentagonis $a = 5$, pro hexagonis $a = 6$, pro heptagonis $a = 7$, pro octogonis $a = 8$, &c. (§.208).

PROBLEMA LXXXI.

213. *Dato numero Polygono, & numero angulorum; invenire latus.*

Sit numerus Polygonus $= p$, latus $= x$
numerus angulorum $= a$
erit differentia terminor. $= a - 2$ (§.209)
terminus primus $= 1$ (§.206)
adeoque ultimus $= 1 + (x-1)(a-2)$
hoc est $3 + ax - 2x - a$ (§.333 Arithm.)
terminus primus 1

summa pr. & ult. $4 + ax - 2x - a$
dimid. num. term. $\frac{1}{2}x$

numerus Polygon. $2x + \frac{1}{2}ax^2 - x^2 - \frac{1}{2}ax$ (§.107).

Quare $\frac{1}{2}ax^2 - x^2 + 2x - \frac{1}{2}ax = p$
$\qquad 2$

$ax^2 - 2x^2 + 4x - ax = 2p$
$\qquad a-2$

$$x^2 + \frac{4-a}{a-2}x = \frac{2p}{a-2}$$

hoc est, si fiat $(a-4) : (a-2) = m$

$$x^2 - mx = 2p : (a-2)$$
$$\tfrac{1}{4}m^2 \qquad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$x^2 - mx + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2)$$

$$\left.\begin{matrix} x - \frac{1}{2}m \\ m - \frac{1}{2}x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

$$x = \tfrac{1}{2}m + \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 + 2p : (a-2))}$$

hoc est, substituto valore ipsius m,

$$x = \frac{a-4}{2a-4} + \sqrt{\left(\frac{a^2 - 8a + 16}{4a^2 - 16a + 16} + \frac{4p}{2a-4}\right)}$$

$$\frac{a - 4 + \sqrt{(8ap - 16p + a^2 - 8a + 16)}}{2a - 4}$$

$$= \frac{a - 4 + \sqrt{(8(a-2)p + (a-4)^2)}}{2a - 4}$$

obti-

obtinet nimirum ſignum +, quia radix major eſt quam $a - 4$

Sit ex. gr. $a = 3$, erit latus numeri triangularis $\frac{-1 + \sqrt{(8p+1)}}{2}$

Sit $a = 5$, erit latus pentagoni $\frac{1 + \sqrt{(24p+1)}}{6}$

Sit $a = 6$, erit latus hexagoni $\frac{2 + \sqrt{(32p+4)}}{8}$

Sit $a = 7$, erit latus heptag. $\frac{3 + \sqrt{(40p+9)}}{10}$

&c. &c.

DEFINITIO XVIII.

214. Summæ numerorum Polygonorum eodem modo collectæ, quo ex progreſſionibus arithmeticis ipſi Polygoni eliciuntur, dicuntur *Pyramidales primi*: Summæ Pyramidalium primorum *Pyramidales ſecundi*: ſummæ Pyramidalium ſecundorum *Pyramidales tertii* &c. in infinitum. Speciatim *Pyramidales triangulares primi* vocantur, ſi ex triangularibus ortum ducant; *Pyramidales pentagoni primi*, ſi ex pentagonis oriuntur &c.

Ex. gr. Num. triang.	= 1, 3, 6, 10, 15, 21
Pyram. triang. pr.	= 1, 4, 10, 20, 35, 56
ſecundi	= 1, 5, 15, 35, 70, 126
tertii	= 1, 6, 21, 56, 126, 252
&c.	&c.

COROLLARIUM.

215. Cum igitur ſummare docuerimus numeros Polygonos (§. 212), evidens jam eſt, quomodo numeri pyramidales primi inveniantur. Nempe $((a-2)n^3 + 3n^2 - (a-5)n) : 6$ exprimit numeros pyramidales primos, *vi §. cit.*

PROBLEMA LXXXII.

216. *Invenire ſummam numerorum Pyramidalium ſuperioris ordinis cujuſcunque, ſeu dato quolibet inferiore proxime ſuperiorem.*

Non alia re opus eſt, quam ut juxta methodum ſuperius traditam (§. 200) numeri Pyramidales proxime inferioris ordinis ſummentur: ita enim habentur eorum ſummæ. Quare cum numerus Pyramidalis primi ordinis ſit $((a-2)\,n^3 + 3n^2 - (a-5)\,n) : 6$ (§. 215): erit ſumma Pyramidalium primi ordinis $((a-2)\int n^3 + 3\int n^2 - (a-5)\int n^1) : 6$. Sed $\int n^3 = (n^4 + 2n^3 + n^2) : 4$, $\int n^2 = (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$, $\int n^1 = (n^2 + n) : 2$, (§. 205). Ergo ſumma Pyramidalium primi ordinis, ſeu numerus Pyramidalis ſecundi ordinis $= ((a-2)\,(n^4 + 2n^3 + n^2) + 2\,(2n^3 + 3n^2 + n) - (a-5)\,(2n^2 + 2n)) : 24$ $= (an^4 + 2an^3 - an^2 - 2an - 2n^4 + 14n^2 + 12n) : 24 = ((a-2)\,n^4 + 2an^3 - (a+14)\,n^2) - (2a+12)\,n) : 24$.

Sit ex. gr. $a = 3$, hoc eſt quæratur ſumma Pyramidalium triangularium primi ordinis; erit ea $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$. Quoniam vero ſumma inventa generalis exprimit numerum quemcunque Pyramidalem ſecundi ordinis (§. 214); ſi ea porro eundem in modum ſummetur, prodibit ſumma Pyramidalium ſecundi ordinis, ſeu numerus Pyramidalis ordinis tertii (§. *cit.*). Et ita progredi licet, quouſque libet.

COROLLARIUM I.

217. Cum ſumma unitatum ſit n, ſumma laterum $\frac{n^2 + n}{2} = \frac{n \,.\, n+1}{1 \,.\, 2}$ (§. 205), ſumma triangularium $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6} = \frac{n \,.\, n+1 \,.\, n+2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ (§. 215), ſumma Pyramidalium primi

ordi-

ordinis $\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{24} = \frac{n.n+1}{1.2} \cdot \frac{n+2.n+3}{3.4}$ (§. 216) &c. evidens est lex, qua numeri Pyramidales ex triangularibus orti in infinitum summentur. Nimirum numerus fractionum in se invicem ducendarum excedit numerum ordinis tribus unitatibus, fractionum earundem numeratores progrediuntur in serie naturali numerorum, sed terminus primus progressionis est latus numeri figurati, denominatores sunt numerorum naturalium progressio ab unitate incipiens. Nempe dato latere n, erit numerus Pyramidalis triangularis indeterminatus $\frac{n+0.n+1.n+2.}{1.2.3.} \cdot \frac{n+3.n+4.n+5.\ \&c.}{4.5.6.\ \&c.}$ in infinit.

COROLLARIUM II.

218. Hinc apparet, quales numeri sint unciæ Potentiarum (§. 95).

PROBLEMA LXXXIII.

219. *Dato numero quantitatum, una cum numero indicante quot earum invicem combinari debeant; invenire numerum combinationum.*

Quantitas una nullam; duæ a & b nonnisi unam combinationem ab admittunt. Trium combinationes sunt tres, nempe ab, ac, bc; quatuor vero sex ab, ac, ad, bc, bd, cd; quinque decem ab, ac, ad, ae; bc, bd, be; cd, ce; de, & ita porro. Unde apparet, numeros combinationum progredi ut 1, 3, 6, 10, &c. hoc est, esse numeros triangulares (§. 206), quorum latus differt unitate a numero quantitatum datarum. Si nempe hic foret q, erit latus numeri combinationum $q-1$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-1.q+0.}{1.2}$ (§. 217).

Si quantitates tres invicem combinandæ & numero itidem tres fuerint, erit combinatio tantum unica abc. Si quarta accedat, combinationes reperies quatuor abc, abd, acd, bcd; si quinta, decem abc, abd, abe, acd, ace, ade, bce, bde, cde; si sexta, viginti, & ita porro. Numeri ergo combinationum progrediuntur, ut 1, 4, 10, 20 &c. hoc est, sunt numeri pyramidales triangulares primi (§. 214), quorum latus a numero quantitatum datarum differt duabus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Hinc si numerus quantitatum datarum fuerit q, erit latus $q-2$; adeoque numerus combinationum $\frac{q-2.q-1.q+0.}{1.2.3}$ (§. 217.)

Si quantitates quatuor invicem combinandæ, numeros combinationum progredi deprehendimus ut numeros pyramidales triangulares secundi ordinis 1, 5, 15, 35 &c. (§. 214), quorum latus a numero quantitatum differt tribus unitatibus, seu exponente unitate mulctato. Quare si numerus quantitatum fuerit q, erit latus $q-3$, adeoque numerus combinationum $\frac{q-3.q-2.q-1.q+0}{1.2.3.4}$ (§. 217.)

Hinc facile abstrahitur regula generalis determinandi numerum combinationum in casu quocunque. Sit nempe numerus quantitatum combinandarum q, exponens combinationis n, erit numerus combinationum $\frac{q-n+1.q-n+2.q-n+3.q-n+4.q-n+5.}{1.2.3.4.5.}$ &c. donec numerus addendus sit ipsi n æqualis.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit numerus quantitatum combinandatum $= 6$, exponens combinationis 4; erit numerus combinationum $\frac{6-4+1.}{1.} \frac{6-4+2.}{2.} \frac{6-4+3.}{3.} \frac{6-4+4.}{4.} = \frac{6-3.\ 6-2.\ 6-1.\ 6+0}{1\ .\ 2\ .\ 3.\ 4.} = \frac{3.\ 4.\ 5.\ 6}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 15.$

C O R O L L A R I U M.

220. Quodsi quantitatum datarum omnes combinationes possibiles scire desideres, incipiendo nempe a combinationibus singularum binarum; addi oportet $\frac{q-1.\ q+0,}{1\ .\ 2}$ $\frac{q-2.\ q-1.\ q+0}{1\ .\ 2\ .\ 3}$, $\frac{q-3.\ q-2.\ q-1.\ q+0}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}$ &c. Unde numerus omnium combinationum possibilium erit $\frac{q.\ q-1.}{1.\ 2} + \frac{q.\ q-1.\ q-2}{1.\ 2.\ 3} + \frac{q.\ q-1.\ q-2.\ q-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} + \frac{q.\ q-1.\ q-2.\ q-3.\ q-4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$ &c. Quæ est summa unciarum binomii ad dignitatem q evecti, mulctata exponente dignitatis unitate aucto $q+1$ (§. 95). Quare cum hæ unciæ prodeant $1+1$ ad dignitatem q evehendo *per Probl.* 29. (§. *cit.*) sit vero $1+1=2$; erit $2^q - q - 1$ numerus omnium combinationum possibilium. Ex. gr. Si numerus quantitatum 5, erit numerus combinationum possibilium $2^5 - 6 = 32 - 6 = 26$.

S C H O L I O N.

221. *Uncias prodire debere, pro binomio* $1+1$ *ad eam dignitatem elevando, ad quam elevatur binomium* a + b; *patet exinde, quod uncia partium* a *&* b *sit* 1, *atque adeo ut facta litteralia ex* a *&* b, *ita unciæ ex* 1 *&* 1 *in se invicem ductis prodire debeant. Vide calculum*:

$1+1$ *Unc. Rad.*
$1+1$
$+1+1$
$1+1$
$1+2+1$ *Unc. Quadr.*
$1+1$ *Unc. Rad.*
$+1+2+1$
$1+2+1$
$1+3+3+1$ *Unc. Cubi.*
&c. &c.

P R O B L E M A LXXXIV.

222. *Dato numero quantitatum; invenire numerum omnium variationum, quas quantitates omnibus modis possibilibus combinatæ ac permutatæ subire possunt.*

Sint quantitates duæ *a* & *b*, erunt variationes permutationum 2 (§. 129), consequenter cum earum quælibet etiam cum seipsa combinari possit, istis addendæ adhuc sunt variationes 2. Ergo numerus omnium est, $2+2=4$.

Quodsi tres fuerint & exponens variationis 2, combinationes erunt 3 & permutationes 3, nempe *ab*, *ac*, *bc*, & *ba*, *ca*, *cb* (§. 129): quibus si addas combinationes tres uniuscujusque quantitatis cum seipsa, *aa*, *bb*, *cc*; habebis numerum variationum $3+3+3=9$.

Eodem modo patet, si quantitates fuerint quatuor, & exponens 2, numerum combinationum fore 6, & numerum permutationum itidem 6, numerum combinationum cum seipsa 4, adeoque numerum variationum 16. Si manente exponente, quantitates fuerint quinque, numerum variationum fore 25, &c. & in genere si numerus quantitatum fuerit n, numerum variationum fore n^2.

Sint quantitates tres & exponens variationis 3; reperitur numerus variationum $27 = 3^3$, nempe *aaa*, *aab*, *aba*, *baa*, *aac*, *aca*, *caa*, *abb*, *bab*, *bba*, *abc*, *bac*, *bca*, *acb*, *cab*, *cba*, *acc*, *cac*, *cca*, *bbb*, *bbc*, *cbb*, *bcb*, *bcc*, *cbc*, *ccb*, *ccc*.

Nec absimili modo constabit, si quantitates fuerint quatuor & exponens 3; fore numerum variationum $64 = 4^3$: & in genere, si fuerit quantitatum numerus $= n$, exponens 3, fore numerum variationum n^3.

Quodsi ita progredi libuerit, reperietur tandem, si quantitatum numerus fuerit n, & exponens n, fore numerum variationum n^n.

Quare si antecedentes omnes addas, ubi exponens minor; reperietur numerus omnium variationum possibilium $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + n^{n-5} + n^{n-6}$ &c. donec numerus ex n subtractus relinquat 1, quia initium fit a quantitatibus singulis semel positis.

Cum adeo numerus omnium variationum possibilium sit progressio geometrica, cujus terminus primus seu minimus n^1, maximus n^n, denominator n (§. 332 *Arithm.* & 113 *Analys.*); erit is $= (n^{n+1} - n) : (n - 1)$, (§. 122).

Sit ex. gr. $n = 4$; erit numerus variationum possibilium $(4^5 - 4) : (4 - 1) = 1020 : 3 = 340$. Sit $n = 24$, erit numerus omnium variationum possibilium $(24^{25} - 24) : (24 - 1) = 3200965864440681898677795534825060 0 : 23 = 139172428888725299942512849340220 0$. Tot ergo modis 24 literæ inter se componi possunt.

CAPUT II.

De Algebra ad Problemata Arithmetica indeterminata applicata.

Problema LXXXV.

223. *Invenire duos numeros, quorum summa, una cum facto eorundem, æquatur numero dato.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis

$$xy + x + y = a$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; y \text{ sub.}$$
$$xy + x = a - y$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; y + 1 \text{ div.}$$
$$x = (a - y) : (y + 1)$$

Sit $a = 30$, $y = 2$; erit $x = (30 - 2) : (2 + 1) = 28 : 3 = 9\frac{1}{3}$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = (20 - 2) : (2 + 1) = 18 : 3 = 6$. Sit $a = 19$, $y = 4$: erit $x = (19 - 4) : (4 + 1) = 15 : 5 = 3$.

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum unus $= x + y$, alter $= x - y$ (§. 6), erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 - y^2 + 2x = a$$
$$\underline{\qquad\qquad} \; y^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + 2x = y^2 + a$$
$$1 \qquad 1 \quad (\text{§. } 143)$$
$$x^2 + 2x + 1 = y^2 + a + 1$$
$$\underline{\qquad\qquad} \text{ Ext. Rad.}$$
$$x + 1 = \sqrt{(y^2 + a + 1)}$$
$$\underline{\qquad\qquad} \text{ sub.}$$
$$x = \sqrt{(y^2 + a + 1)} - 1$$

Unde apparet, ut ex $y^2 + a + 1$ radix extrahi possit, $a + 1$ esse debere differentiam duorum quadratorum, quorum unum est y^2.

Ex. gr.

Ex. gr. Sit $a = 19$, $y = \frac{1}{2}$; erit $x = \sqrt{(\frac{1}{4}+19+1)} - 1 = \sqrt{\frac{81}{4}} - 1 = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$. Ergo $x+y = 3\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 4$, & $x-y = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$. Sit $a = 20$, $y = 2$; erit $x = \sqrt{(4 + 20 + 1)} - 1 = \sqrt{25} - 1 = 5 - 1 = 4$. Ergo $x+y = 4+2 = 6$, & $x-y = 4-2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVI.

224. *Invenire quatuor numeros ejus conditionis, ut summa primi & secundi aequetur tertio, differentia vero primi & secundi quarto.*

Sit numerus primus $=x$, secundus $=y$, tertius $=z$, quartus $=t$; erit, per conditiones Problematis,

$$y + x = z \qquad x - y = t$$

y sub. $\qquad$ y add.

$$x = z - y \qquad x = t + y$$

Quare (§. 87 *Arithm.*)

$$t + y = z - y$$

y add.

$$t + 2y = z$$

t sub.

$$2y = z - t$$

2 div.

$$y = (z-t) : 2$$

Ergo $x = (z-t) : 2 + t = (z+t) : 2$.

Unde apparet, si numeri integri desiderentur, pro z & t assumi debere vel numeros pares, vel impares: nequaquam alterum parem, alterum imparem (§. 72, 74).

Sit $z = 8$, $t = 2$: erit $y = (8-2) : 2 = 6 : 2 = 3$, & $x = (8+2) : 2 = 4 + 1 = 5$. Similiter sit $z = 5$, $t = 1$: erit $x = (5+1) : 2 = 3$, & $y = (5-1) : 2 = 2$.

PROBLEMA LXXXVII.

225. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unusquisque cum partibus suis aliquotis efficiat unam summam.*

Sit unus $= mx$, alter $= ny$; erit, per conditionem Problematis,

$$1 + m + mx + x = 1 + n + ny + y$$

$$mx + x = 1 + n + (n+1)y - (1+m)$$

$$x = (1+n+(n+1)y - 1 - m) : (m+1)$$

Apparet ergo, $1+n$ denotare summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius y, & $1+m$ summam partium aliquotarum denominatoris multipli ipsius x: posse autem non modo y, sed & utrumque denominatorem pro arbitrio assumi, sed ut y sit numerus impar, isque primus.

Sit ex. gr. $m = 1$, $n = 2$, $y = 3$. Erunt partes aliquotae ipsius n, 1 & 2, ipsius m autem 1: consequenter $x = 2+1+(2+1)y - 1 = 2 + 3y = 2 + 9 = 11$. Sit $m = 4$, $n = 8$, $y = 13$: erit $1 + n = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, & $1 + m = 1 + 2 + 4 = 7$; consequenter $x = (15 + 15y - 7) : 7 = (210 - 7) : 7 = 203 : 7 = 29$.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire duos numeros, quorum summa aequetur quadrato minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$; erit, per conditionem Problematis,

$$x + y = y^2$$

y sub.

$$x = y^2 - y = (y-1)y$$

Unde apparet, numerum majorem esse factum ex minore in eundem minorem unitate mulctatum.

Sit $y = 3$; erit $x = 2.\ 3 = 6$. Sit $y = 5$; erit $x = 4.\ 5 = 20$. Sit $y = 9$; erit $x = 8.\ 9 = 72$.

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut summa quadratorum aequetur cubo minoris.*

Sit numerus major $=x$, minor $=y$: erit, per conditionem Problematis,

$x^2 +$

$x^2 + y^2 = y^3$

y^2 fubt.

$x^2 = y^3 - y^2 = y^2(y-1)$

$x = y\sqrt{(y-1)}$

Apparet adeo, pro y assumendum esse numerum, qui unitate quadratum excedit, hoc est, quadratum quodlibet unitate auctum.

Ex. gr. Sit $y=5$, erit $x=5\sqrt{(5-1)}=5\sqrt{4}=5.2=10$. Sit $y=17$, erit $x=17\sqrt{(17-1)}=17\sqrt{16}=17.4=68$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut factum aequale sit cubo, cujus radix facto ex numero primo in quadratum secundi aequatur.*

Sit numerus primus $=x$, secundus $=y$, radix cubica $=v$; erit, per conditiones Problematis,

$v = xy^2$ — y^2 div. — $v : y^2 = x$

$xy = v^3$ — y div. — $x = v^3 : y$

$v : y^2 = v^3 : y$

y^2 mult.

$v = yv^3$

v div.

$1 = yv^2$

v^2 div.

$1 : v^2 = y$

Ergo $x = v^3 : (1 : v^2) = v^5$

Sit $v=2$; erit $x=32$, $y=\frac{1}{4}$. Sit $v=3$; erit $x=243$, $y=\frac{1}{9}$.

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire duos numeros quorum quadrata differunt quadrato.*

Sit numerus unus $=x+y$, alter $=x-y$: erit, per conditionem Problematis.

$x^2 + 2xy + y^2$

$x^2 - 2xy + y^2$ fubt.

$4xy = v^2$

($4y$ div.

$x = v^2 : 4y$

Patet adeo, pro y assumendum esse numerum per cujus quadruplum dividi potest quadratum aliquod.

Sit ex. gr. $v^2=16$, $y=1$: erit $x=16:4=4$. Ergo $x+y=4+1=5$ & $x-y=4-1=3$. Sit $v^2=36$, $y=3$: erit $x=36:12=3$. Ergo $x+y=6$ & $x-y=0$. Sit $v^2=36$, $y=9$: erit $x=36:36=1$. Ergo $x+y=10$ & $x-y=8$.

PROBLEMA XCII.

230. *Summam duorum quadratorum in duo alia quadrata dividere.*

Sit latus quadrati majoris $=a$, minoris $=b$. Sit porro latus quadrati unius ex quaesitis minus quam a, adeoque $a-z$; erit quadrati alterius latus majus quam b. Poterat itaque dici $y-b$. Enimvero, ut in calculo irrationalitas evitetur, rectius id nuncupatur $yz-b$. Quare per conditionem Problematis.

$a^2 - 2az + z^2 + y^2z^2 - 2byz + b^2 = a^2 + b^2$

$a^2 + b^2$ fub.

$z^2 + y^2z^2 - 2az - 2byz = 0$

z div.

$z + y^2 z - 2a - 2by = 0$

$2a + 2by$ add.

$y^2z + z = 2a + 2by$

(y^2+1 div.

$z = (2a + 2by) : (y^2 + 1)$

Sit ex. gr. $a=3$, $b=2$, $y=2$: erit $z=(6+8):(4+1)=14:5=2\frac{4}{5}$. Ergo $a-z=3-2\frac{4}{5}=\frac{15}{5}-\frac{14}{5}=\frac{1}{5}$ & $yz-b=\frac{28}{5}-2=\frac{28}{5}-\frac{10}{5}=\frac{18}{5}=3\frac{3}{5}$.

SCHOLION.

231. *Dum quadratorum quaesitorum latera assumuntur, valores eorum quantitates* a *&* b *in-*

ingredi debent, ut in utroque æquationis membro sit $a^2 + b^2$. *Porro vero in valore lateris alterius,* y *multiplicari debet per* z, *ut sublato utrinque* $a^2 + b^2$ *residuum sit divisibile per* z. *Ita enim* z *reducitur ad unam dimensionem, sicque æquatio in terminis rationalibus est reducibilis.*

PROBLEMA XCIII.

232. *Invenire duos quadratos numeros, qui differunt numero dato.*

Sit latus quadrati minoris $= x$, majoris $= y + x$, differentia quadratorum $= d$: erit quadratum majus $= x^2 + 2xy + y^2$, minus $= x^2$, consequenter per conditionem Problematis.

$$2xy + y^2 = d \qquad y^2 \text{ sub.}$$
$$2xy = d - y^2 \qquad 2y \text{ div.}$$
$$x = (d - y^2) : 2y$$

Unde apparet, pro y assumi debere numerum, qui sit minor quam $\sqrt{d}$.

Sit ex. gr. $d = 10$, $y = 3$: erit $x = (10 - 9) : 6 = \frac{1}{6}$, & $x + y = 3 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6}$. Sit $d = 11$, $y = 1$: erit $x = (11 - 1) : 2 = 10 : 2 = 5$, & $x + y = 5 + 1 = 6$. Sit $d = 48$, $y = 4$: erit $x = (48 - 16) : 8 = 6 - 2 = 4$, & $x + y = 4 + 4 = 8$.

PROBLEMA XCIV.

233. *Numerum datum dividere, in duos alios, quorum factum est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= 2a$, differentia $= 2y$: erit major $a + y$, minor $a - y$ (§. 5), factum $= aa - yy$. Ut calculus ab irrationalitate liberetur, pro latere quadrati assumendus est valor, quem ingreditur y & qui diversis gaudet signis. Sit ergo $= xy - a$: erit, per conditionem Problematis,

$$aa - y^2 = aa - 2axy + x^2y^2 \qquad a^2 \text{ sub.}$$
$$-y^2 = -2axy + x^2y^2 \qquad y \text{ div.}$$
$$-y = -2ax + x^2 y \qquad y + 2ax \text{ add.}$$
$$2ax = x^2 y + y \qquad x^2 + 1 \text{ div.}$$
$$2ax : (x^2 + 1) = y$$

Sit ex. gr. $2a = 10$, $x = 2$: erit $y = 20 : (4 + 1) = 20 : 5 = 4$. Ergo $a + y = 5 + 4 = 9$; $a - y = 5 - 4 = 1$. Sit $2a = 10$, $x = 3$: erit $y = 30 : (9 + 1) = 30 : 10 = 3$. Ergo $a + y = 8$, $a - y = 2$.

PROBLEMA XCV.

234. *Datum numerum dividere in duos numeros, quorum differentia est numerus quadratus.*

Sit numerus datus $= a$, quæsitorum major $= x$, minor $= y$: erit, per conditiones Problematis,

$$x + y = a \qquad y \text{ sub.} \qquad\qquad x - y = v^2 \qquad y \text{ add.}$$
$$x = a - y \qquad\qquad x = v^2\ 1\ y$$
$$a - y = v^2 + y \qquad y \text{ add.}$$
$$a = v^2 + 2y \qquad v^2 \text{ subt.}$$
$$a - v^2 = 2y \qquad 2 \text{ div.}$$
$$(a - v^2) : 2 = y$$

Pro v^2 itaque assumendus est numerus quadratus, qui ex numero dato a subductus parem relinquit.

Sit ex. gr. $a = 40$, $v^2 = 16$: erit $y = (40 - 16) : 2 = 24 : 2 = 12$. Ergo $x = 40 - 12 = 28$. Sit $a = 40$, $v^2 = 4$: erit $y = (40 - 4) : 2 = 36 : 2 = 18$. Ergo $x = 40 - 18 = 22$. Sit $a = 35$, $v^2 = 9$: erit $y = (35 - 9) : 2 = 26 : 2 = 13$, & $x = 35 - 13 = 22$.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut unus additus quadrato alterius efficiat numerum quadratum, cujus radix æquatur summæ numerorum.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$: erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 + y = x^2 + 2xy + y^2 \qquad x^2 \text{ sub.}$$
$$y = 2xy + y^2 \qquad y \text{ div.}$$
$$1 = 2x + y \qquad y \text{ subt.}$$
$$1 - y = 2x \qquad 2 \text{ div.}$$
$$(1 - y) : 2 = x$$

Numeri adeo quæsiti unitate minores, consequenter fracti esse debent, & y numerus quilibet fractus esse potest.

Sit $y = \frac{1}{2}$; erit $x = (1 - \frac{1}{2}) : 2 = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$. Sit $y = \frac{1}{3}$; erit $x = (1 - \frac{1}{3}) : 2 = \frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$. Sit $y = \frac{1}{4}$; erit $x = (1 - \frac{1}{4}) : 2 = \frac{3}{4} : 2 = \frac{1}{8}$.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut differentia ipsorum habeat ad differentiam quadratorum rationem datam.*

Sit numerus major $= x$, minor $= y$, ratio data $= a : b$; erit, per conditionem Problematis,

$$x - y : x^2 - y^2 = a : b$$

hoc est $1 : x + y = a : b$ (§. 124).

$$ax + ay = b \qquad a \text{ div.}$$

$$x + y = b : a \qquad y \text{ sub.}$$

$$x = b : a - y$$

Sit $b : a = 9$, $y = 4$; erit $x = 5$. Vel sit $y = 3$; erit $x = 6$.

PROBLEMA XCVIII.

237. *Invenire numerum, qui, si multiplicetur per duos numeros datos, quadrata duo producat.*

Sit numerus datus unus $= a$; alter $= b$, quæsitus $= x$, erit, per conditiones Problematis,

$$ax = y^2 \quad a \text{ div.} \qquad bx = v^2 \quad b \text{ div.}$$

$$x = y^2 : a \qquad x = v^2 : b$$

$$y^2 : a = v^2 : b \qquad a \text{ mult.}$$

$$y^2 = av^2 : b \qquad \text{ext. Rad.}$$

$$y = v\sqrt{(a : b)}$$

Quodsi ergo numerus rationalis desideretur, $a : b$ quadratum esse debet.

Sit $a = 32$, $b = 8$; erit $\sqrt{(a : b)} = 2$. Sit porro $v = 5$, erit $y = 10$, consequenter $x = \frac{25}{8}$.

PROBLEMA XCIX.

238. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus quadrato alterius addatur, summa sit latus quadrati aggregato numerorum æquale.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$; erit

$$x^2 + y = \sqrt{(x + y)} \qquad \text{quadr.}$$

$$x^4 + 2yx^2 + y^2 = x + y \qquad x^4 + y \text{ subt.}$$

$$2x^2y - y + y^2 = x - x^4$$

h. e. $yy + (2x^2 - 1)y = x - x^4$

$$(x^2 - \tfrac{1}{2})^2 \qquad x^4 - x^2 + \tfrac{1}{4} \text{ ad.}$$

$$y^2 + (2x^2 - 1)y + (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 = x - x^2 + \tfrac{1}{4} \qquad \text{ext. Rad.}$$

$$y + x^2 - \tfrac{1}{2} = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} \qquad x^2 - \tfrac{1}{2} \text{ subt.}$$

$$y = \sqrt{(x + \tfrac{1}{4} - x^2)} + \tfrac{1}{2} - x^2$$

Quodsi numerus rationalis desideratur; $\frac{1}{4} + x - x^2$ numerus quadratus esse debet. Sit itaque hujus latus, ob rationes in Schol. Probl. 92 (§. 231) allatas, $= zx - \frac{1}{2}$: erit

$$z^2x^2 - zx + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} + x - x^2 \qquad \tfrac{1}{4} \text{ sub.}$$

$$z^2x^2 - zx = x - x^2 \qquad x \text{ div.}$$

$$z^2x - z = 1 - x \qquad x + z \text{ add.}$$

$$z^2x + x = 1 + z \qquad z^2 + 1 \text{ div.}$$

$$x = (1 + z) : (z^2 + 1)$$

Sit $z = 2$, erit $x = (1 + 2) : (4 + 1) = \frac{3}{5}$, consequenter $y = \frac{1}{2} - \frac{9}{25} + \sqrt{(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{9}{25})} = \frac{25 - 18}{50} + \sqrt{\frac{(60 + 25 - 36)}{100}} = \frac{7}{50} + \sqrt{(49 : 100)} = \frac{7}{50} + \frac{7}{10} = \frac{7 + 35}{50} = \frac{42}{50} = \frac{21}{25}$.

PRO-

PROBLEMA C.

239. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut, si unus addatur facto eorundem, aggregatum utrumque sit numerus quadratus.*

Sit numerus quadratus unus $= x^2$, alter $= y^2$, erit factum $= x^2 y^2$. Quare $x^2 y^2 + x^2$ & $x^2 y^2 + y^2$ sunt numeri quadrati; consequenter & $y^2 + 1$ & $x^2 + 1$ sunt numeri quadrati: numerus enim quadratus efficit quadratum, si in quadratum ducitur. Sit latus quadrati primi $z - y$; secundi $t - x$: erit

$$y^2 + 1 = z^2 - 2zy + y^2 \qquad y^2 \text{ subt.}$$
$$1 = z^2 - 2zy \qquad 2zy - 1 \text{ add.}$$
$$2zy = z^2 - 1 \qquad 2z \text{ div.}$$
$$y = (z^2 - 1) : 2z$$

$$x^2 + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \qquad x^2 \text{ subt.}$$
$$1 = t^2 - 2tx \qquad 2tx - 1 \text{ add.}$$
$$2tx = t^2 - 1 \qquad 2t \text{ div.}$$
$$x = (t^2 - 1) : 2t$$

Sit $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (4 - 1) : 4 = \frac{3}{4}$ & $x = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$. Sit $z = 3$, $t = 4$; erit $y = (9 - 1) : 6 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ & $x = (16 - 1) : 8 = \frac{15}{8}$.

PROBLEMA CI.

240. *Invenire duos numeros quadratos ejus conditionis, ut summa addita facto efficiat quadratum.*

Sit quadratus numerus unus $= x^2$, alter $= y^2$: erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2$ numerus quadratus. Quoniam vero $x^2 y^2 + x^2 = x^2 (y^2 + 1)$: fiat primum $y^2 + 1$ æquale quadrato, cujus latus $t - y$, ut ablato ex utroque æquationis membro y^2 perveniatur ad unam ipsius y dimensionem, cum valor rationalis desideretur, nempe

$$t^2 - 2ty + y^2 = y^2 + 1 \qquad y^2 \text{ sub.}$$
$$t^2 - 2ty = 1 \qquad 2ty - 1 \text{ add.}$$
$$t^2 - 1 = 2ty \qquad 2t \text{ div.}$$
$$(t^2 - 1) : 2t = y$$

Ponatur porro $\sqrt{(y^2 + 1)} = t - y = t - (t^2 - 1) : 2t = (t^2 + 1) : 2t = v$; erit $x^2 y^2 + x^2 + y^2 = v^2 x^2 + y^2$. Atque adeo Problema præsens reductum est ad casum similem præcedentis. Sit ergo quadrati, cui $v^2 x^2 + y^2$ æquale esse debet, latus $= z - vx$, erit

$$v^2 x^2 + y^2 = z^2 - 2zvx + v^2 x^2 \qquad v^2 x^2 \text{ s.}$$
$$y^2 = z^2 - 2zvx \qquad 2zvx - y^2 \text{ add.}$$
$$2zvx = z^2 - y^2 \qquad 2zv \text{ div.}$$
$$x = (z^2 - y^2) : 2zv$$

Hic valores z & t pro lubitu determinari possunt.

Sit ex. gr. $z = 2$, $t = 3$; erit $y = (9 - 1) : 6 = 8 : 6 = \frac{4}{3}$, & hinc $v = t - y = 3 - \frac{4}{3} = \frac{9 - 4}{3} = \frac{5}{3}$, consequenter $x = (4 - \frac{16}{9}) : \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{36 - 16}{9} : \frac{20}{3} = \frac{20}{9} : \frac{20}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

PROBLEMA CII.

241. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum addatur aggregato quadratorum, numerus quadratus prodeat.*

Sit summa numerorum quæsitorum $= 2x$, differentia $= 2y$, erit major $x + y$, minor $x - y$ (§. 6). Sit latus quadrati ipsi $3x^2 + y^2$ æqualis $= t + y$:

erit,

erit, per conditionem Problematis,

$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 \quad - y^2$$
$$3x^2 + y^2 = t^2 + 2ty + y^2 \quad y^2 \text{ sub.}$$
$$3x^2 = t^2 + 2ty \quad t^2 \text{ sub.}$$
$$3x^2 - t^2 = 2ty \quad 2t \text{ div.}$$
$$(3x^2 - t^2) : 2t = y$$

Sit $x = 4$, $t = 6$, erit $y = (48 - 36) : 12 = 12 : 12 = 1$, consequenter $x + y = 4 + 1 = 5$, $x - y = 4 - 1 = 3$.

PROBLEMA CIII.

242. *Invenire duos numeros quadratos, quorum summa est numerus quadratus.*

Sint numeri quadrati quaesiti x^2 & y^2; latus quadrati, cui isti junctim sumti aequantur, $vx - y$: erit

$$x^2 + y^2 = v^2x^2 - 2vxy + y^2 \quad y^2 \text{ sub.}$$
$$x^2 = v^2x^2 - 2vxy \quad x \text{ div.}$$
$$x = v^2x - 2vy \quad 2vy - x \text{ add.}$$
$$2vy = v^2x - x \quad v^2 - 1 \text{ div.}$$
$$2vy : (v^2 - 1) = x$$

Sit $v = 2$, $y = 3$; erit $x = 12 : (4 - 1) = 12 : 3 = 4$.

PROBLEMA CIV.

243. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si unus ducatur in cubum alterius, productum sit numerus quadratus.*

Sint duo numeri x & y: erit, per conditionem Problematis; xy^3, consequenter etiam xy numerus quadratus. Habemus ergo

$$xy = z^2 \quad y \text{ div.}$$
$$x = z^2 : y$$

Pro z itaque assumendum est quadratum per y divisibile, si numeri integri desiderentur.

Sit ex. gr. $z = 6$, $y = 3$: erit $x = 36 : 3 = 12$.

PROBLEMA CV.

244. *Invenire duos numeros ejus conditionis, ut, si factum quadratorum addatur facto ex cubo unius in alterum, summa sit numerus quadratus.*

Sit numerus unus $= x$, alter $= y$, erit $xy^3 + x^2y^2$, consequenter & $xy + x^2$ numerus quadratus. Ponatur latus hujus quadrati $= yv - x$: erit

$$xy + x^2 = y^2v^2 - 2xyv + x^2 \quad x^2 \text{ sub.}$$
$$xy = y^2v^2 - 2xyv \quad y \text{ div.}$$
$$x = yv^2 - 2xv \quad 2xv \text{ add.}$$
$$2xv + x = yv^2 \quad 2v + 1 \text{ div.}$$
$$x = yv^2 : (2v + 1)$$

Sit ex. gr. $y = 6$, $v = 1$: erit $x = 6 : 3 = 2$.

Sit $y = 15$, $v = 2$: erit $x = 15.4 : (4 + 1) = 15.4 : 5 = 3.4 = 12$.

PROBLEMA CVI.

245. *Invenire duos numeros, quorum unus subductus ex facto eorundem relinquat cubum.*

Sit numerus unus x, alter y: erit, per conditionem Problematis,

$$xy - y = v^3 \quad x - 1 \text{ div.}$$
$$y = v^3 : (x - 1)$$

Assumendus ergo est cubus, qui sit per $x - 1$ divisibilis.

Ex. gr. Sit $x = 6$, $v = 10$; erit $y = 1000 : 5 = 200$. Sit $x = 3$, $v = 6$; erit $y = 216 : 2 = 108$.

PROBLEMA CVII.

246. *Invenire duos numeros, quorum unus in quadratum alterius ductus cubum efficit.*

Sit numerus unus y, alter x; erit, per conditionem Problematis,

$$yx^2 = z^3x^3 : v^3 \quad x^2 \text{ div.}$$
$$y = z^3x : v^3 \quad v^3 \text{ mult.}$$
$$yv^3 = z^3x \quad z^3 \text{ div.}$$
$$yv^3 : z^3 = x$$

Si

Si adeo numeri integri desiderantur, assumendus est valor ipsius y per cubum aliquem z^3 divisibilis, seu cubi multiplus.

Sit ex. gr. $y = 16$, $v = 3$, $z = 2$; erit $x = 16.\,27 : 8 = 2.\,27 = 54$.

PROBLEMA CVIII.

247. *Numerum datum in duas partes dividere, ita ut earundem factum aequale sit cubo radice sua mulctato.*

Sit numerus datus $= a$, pars una $= x$; erit altera $= a - x$. Sit latus cubi, cui factum partium $ax - x^2$ aequatur, $yx - 1$: erit cubus $= y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 3yx - 1$, unde si subtrahatur $yx - 1$, relinquitur

$$y^3 x^3 - 3y^2x^2 + 2yx = ax - x^2$$
$$\overline{}\ x \text{ div.}$$
$$y^3 x^2 - 3y^2 x + 2y = a - x$$
$$\overline{}\ x - 2y \text{ add.}$$
$$y^3 x^2 - 3y^2 x + x = a - 2y.$$

Facile jam apparet, si valor ipsius x rationalis desideretur, fieri debere $2y = a$: quo facto erit

$$\frac{a^3 x^2}{8} - \frac{3a^2 x}{4} + x = 0$$
$$\overline{}\ 8 \text{ mult.}$$
$$a^3x^2 - 6a^2 x + 8x = 0$$
$$\overline{}\ x \text{ div.}$$
$$a^3 x - 6a^2 + 8 = 0$$
$$\overline{}\ 6a^2 - 8 \text{ add.}$$
$$a^3 x = 6a^2 - 8$$
$$\overline{}\ a \text{ div.}$$
$$x = (6a^2 - 8) : a^3$$

Apparet adeo, si numeri rationales desiderentur, Problema ex indeterminato fieri determinatum.

Sit $a = 6$, erit $x = (216 - 8) : 216 = 208 : 216 = \frac{26}{27}$, & $a - x = 6 - \frac{26}{27} = \frac{162 - 26}{27} = \frac{136}{27}$.

PROBLEMA CIX.

248. *Invenire numerum perfectum, hoc est, omnibus suis partibus aliquotis aequalem.*

Sit numerus quaesitus $y^n x$, ut nempe in partes aliquotas seu factores resolvi possit: erunt partes aliquotae $1, y, y^2, y^3$ &c. donec exponens evadat $= n$, & $x, yx, y^2 x, y^3 x$, &c. donec exponens fiat $= n - 1$. Quamobrem ex natura numeri perfecti

$$1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c} + x + yx + y^2 x + y^3 x \text{ \&c.} = y^n x$$
$$\overline{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.} = y^n x - x - yx - y^2 x - y^3 x \text{ \&c.}}$$
$$\overline{}$$
$$\frac{1 + y + y^2 + y^3 \text{ \&c.}}{y^n - 1 - y - y^2 - y^3 \text{ \&c.}} = x$$

Jam ut x sit numerus integer, nec in casu speciali, si y per numerum explicetur, numerus partium aliquotarum diversus sit a numero earundem in formula generali; necesse est ut $y^n - 1 - y - y^2 - y^3$ &c. $= 1$: quod cum non alio in casu contingat, nisi cum $y = 2$ (§. 121); erit $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. $= 1 + 2 + 4 + 8$ &c. & numerus perfectus $2^n x$. Quoniam vero x est numerus primus, necesse est ut $1 + 2 + 2^2 + 2^3$ &c. in omni casu sit numerus primus; consequenter series terminetur prope terminum, qui unitate mulctatus est numerus primus (§. *cit.*), & n notat numerum terminorum, qui istiusmodi terminum praecedunt. Quare Problema, quod speciem indeterminati mentiebatur, determinatum est.

Patet autem simul

Theorema 1. Si numerorum series in ratione dupla ab unitate continue proportionalium continuetur, donec eorum summa sit numerus primus; summa in maximum multiplicata faciet numerum perfectum.

Theorema 2. Si in numerorum serie in ratione dupla ab unitate continue proportionalium occurrat terminus, qui unitate mulctatus est numerus primus; numerus iste primus in proxime præcedentem ductus efficit numerum perfectum.

In serie numerorum ab unitate in ratione dupla continue proportionalium

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.

$4 - 1 = 3$, $8 - 1 = 7$, $32 - 1 = 31$, $128 - 1 = 127$, $2048 - 1 = 2047$ &c. sunt numeri primi. Ergo $2. 3 = 6$; $4. 7 = 28$; $31. 16 = 496$; $127. 64 = 8128$; $2047. 1024 = 2096128$; &c. &c. sunt numeri perfecti.

Scholion.

249. *Problemata indeterminata, qualia plurima solvit* Diophantus, *difficiliora sunt determinatis, nisi simplicia fuerint. Unde Tyrones sub initium ea prætermittere possunt, quæ difficultatem creant, ad sequentia pedem promoventes. Non tamen prorsus negligenda sunt, cum maximus eorum sæpe sit usus in Problematibus Geometriæ sublimioris solvendis. Ceterum Ars resolvendi Problemata indeterminata numerica* Analysis Diophantea *appellari solet.*

CAPUT III.

De Algebra ad Geometriam elementarem applicata.

Problema CX.

250. *Problema geometricum algebraice resolvere:*

Resolutio.

1. Observentur ea omnia, quæ in Probl. 36 (§. 141) fieri præcepimus.
2. Cum vero rarissime ad æquationem eodem modo in Problematis geometricis perveniatur, quo in numericis usi sumus; hic ulterius quædam peculiaria notanda sunt. Nempe

α) Concipiatur jam factum, quod ad faciendum proponitur.

β) Omnium linearum in schemate depictarum relationes, nullo habito discrimine inter cognitas & incognitas, excutiantur; ut appareat, quomodo aliæ ab aliis dependeant, seu quibus datis, aliæ una dentur, sive per triangula similia (§. 175 *Geom.*), sive per rectangula (§. 417 *Geom.*), sive per alia (quod tamen raro fieri solet) Theoremata.

γ) Ut igitur triangula similia & rectangula obtineas, sæpius producendæ sunt lineæ, donec vel directe vel indirecte datis fiant æquales, vel alias secent; sæpius lineæ parallelæ atque perpendiculares ducendæ; sæpius puncta quædam connectenda; sæpius anguli

anguli datis æquales construendi; quæ fieri posse, ex Geometria elementari manifestum est. Eum in finem probe tenenda sunt Theoremata de æqualitate angulorum & similitudine triangulorum (§. 156, 183, 201, 207, 233, 267, 268, 269, 329 *Geom.*)

2) Quodsi in æquationem non satis concinnam incideris; alio adhuc modo excutiendæ sunt linearum relationes; ac interdum sufficit, non directe quærere eam, quæ quæritur, sed aliam, qua data ipsa quoque innotescit.

3. Reductione æquationis facta, ex ultima, quæ prodit, elicienda est constructio geometrica variis quidem modis pro diversitate æquationum.

SCHOLION.

251. *Quoniam nunc tantum simplicissimos regulæ Algebræ casus exemplis geometricis illustramus; suffecerit nobis ostendisse, quomodo æquationes simplices & quadraticæ construantur.*

PROBLEMA CXI.

252. *Æquationem simplicem construere.*

RESOLUTIO.

Omne artificium in eo consistit, ut fractiones, quibus quantitas incognita æqualis, in terminos proportionales resolvantur: id quod exemplis rectius ostenditur, quam multis regulis docetur.

1. Sit nempe $x = \frac{ab}{c}$; erit $c : a = b : x$ (§. 302 *Arithm.*). Reperietur adeo x (§. 271 *Geom.*).

2. Sit $x = \frac{abc}{de}$, fiat $d : a = b : \frac{ab}{d}$. Hæc quarta proportionalis inventa (§. 271 *Geom.*) dicatur g; erit $x = \frac{gc}{e}$: quæ adeo ut in casu primo invenitur.

3. Sit $x = \frac{aa-bb}{c}$. Quoniam $aa - bb = (a+b)(a-b)$, (§. 86); erit $c : a + b = a - b : x$ (§. 302 *Arithm.*).

4. Sit $x = \frac{a^2b - bcc}{ad}$. Invenitur *per casum* 1. $g = \frac{ab}{d} = \frac{a^2b}{ad}$ & $h = \frac{bc}{d}$, ut sit $\frac{bcc}{ad} = \frac{hc}{a}$; denique, *per casum* 1, $i = \frac{hc}{a}$: erit $x = g - i$, differentia nempe linearum g & i. *Brevius.* Fiat $a : a + c = a - c : g$, *per casum* 3, & $d : g = b : \frac{bg}{d}$, *per cas.* 1, quæ erit x.

5. Sit $x = \frac{ab}{c} + \frac{adc}{be}$. Inveniatur, ut in casu præcedente, $g = \frac{ab}{c}$ & $f = \frac{adc}{be}$: erit $x = g + f$, summa linearum g & f.

6. Sit $x = \frac{a^2b + bad}{af + cg} = \frac{ab + bd}{f + cg:a} = \frac{(a+d)b}{f + cg:a}$. Quæratur $\frac{cg}{a}$ & fiat $\frac{cg}{a} = h$; erit $f + h : a + d = b : x$; consequenter $x = \frac{(a+d)b}{f+h}$. Reductus adeo est casus præsens ad primum.

7. Sit $x = \frac{a^2b - bad}{af + bc}$. Quæratur $\frac{af}{b}$ & fiat $\frac{af}{b} = h$, erit $x = \frac{a(a-d)}{h+c}$; consequenter $h + c : a - d = a : x$.

8. Sit $x = (a^2 + b^2) : c$. Construatur triangulum ABC, cujus crus $AB = a$, $BC = b$, (§. 180 *Geom.*); erit $AC = \surd(a^2 + b^2)$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur $AC = m$, erit $a^2 + b^2 = m^2$, adeoque $x = \frac{m^2}{c}$, consequenter $c : m = m : x$. Tab. I. Fig. 3.

9. Sit $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Super $AB = a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = b$. Cum triangulum ACB sit rectangulum (§. 317 *Geom.*); erit $CB = \surd(a^2$ Tab. I. Fig. 4.

$\surd(a^2 - b^2)$, (§. 417 *Geom.*). Dicatur CB $= m$: erit $x = m^2 : c$, consequenter $c : m = m : x$.

Tab.I. *Fig.*5. 10. Sit $x = \frac{a_2 b + bcd}{af + bc} = \frac{a^2 + cd}{c + af : b}$. Inferatur $b : a = f : \frac{fa}{b}$ & fiat $\frac{fa}{b} = b$: erit $x = \frac{a^2 + cd}{b + c}$. Quæratur inter AC $= c$ & CB $= d$ media proportionalis CD $= \surd cd$, (§. 327 *Geom.*). Fiat CE$=a$; erit DE $= \surd(a^2 + cd)$. Dicatur hæc m: erit $x = \frac{m^2}{b+c}$; consequenter $b + c : m = m : x$.

PROBLEMA CXII.

253. *Æquationem quadraticam geometrice construere.*

RESOLUTIO.

Cum æquationes quadraticæ ad simplices reduci possint (§. 143); ipsas quoque, *per Probl. præced.* (§.252) construere licet.

Tab.I. *Fig.*5. Sit enim æquatio pura $x^2 = ab$; erit $a : x = x : b$, (§. 299 *Arithm.*). Invenitur adeo $x = \surd ab$, si inter AC $= a$ & CB $= b$ quæratur media proportionalis DC (§. 327 *Geom.*). Si æquatio affecta $x^2 . ax = . b^2$; erit $x = . \frac{1}{2}a . \surd(\frac{1}{4}a^2 . b^2)$, hoc est, vel $x = \frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{2}a^2 + b^2)$, vel $x = \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2) - \frac{1}{2}a$, vel $x = \frac{1}{2}a + \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, vel $x = \frac{1}{2}a - \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$. Omne igitur artificium construendi has æquationes huc redit, ut inveniatur valor ipsius $\surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$, itemque ipsius $\surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$.

Tab.I. *Fig.*3. Utrumque vero jam docuimus in Problemate præcedente. Nimirum si in triangulo rectangulo fiat AB $= \frac{1}{2}a$ & BC $= b$; erit AC $= \surd(\frac{1}{4}a^2 + b^2)$ (§. 417 *Geom.*). Sed *Fig.*4. si super AB $= \frac{1}{2}a$, describatur semicirculus & in eo applicetur AC $= b$; erit CB $= \surd(\frac{1}{4}a^2 - b^2)$, ut in Problemate præcedente demonstratum.

SCHOLION.

254. *Quamvis omnes æquationes simplices & quadraticæ eum in modum construi possint, quo eas construere docuimus: minime tamen consultum est, ut iis stricte inhæreamus. Hac enim ratione in constructiones parum commodas sæpe incideremus, cum singulares Problematis specialis circumstantiæ multo concinniorem meditanti insinuent. Immo in genere notandum est, ex calculo analytico difficillime erui constructiones concinnas; cum tamen in iis unice ingenium spectetur, solutione arithmetica ad praxin sufficiente. Ratio hæc est, quod in algebraica solutione Problema tanquam unicum in rerum possibilium regione consideretur, independens ab omnibus reliquis; cum tamen ex Veterum methodo appareat & ipsa ratio suadeat, solutionem unius a solutione alterius pendere.*

PROBLEMA CXIII.

255. *Data perimetro* AB + BC + CA, Tab.I. *Fig.* 3.
& area trianguli rectanguli; invenire hypothenusam.

Sit AB + BC + CA $= a$, AC $= x$, area $= b^2$, erit BC + BA $= a - x$.

Jam cum sit AC^2 = AB^2 + BC^2 (§. 417 *Geom.*) & AB^2 + BC^2 = (AB + BC)^2 — 2AB . BC (§. 261 *Arithm.*): erit AC^2 = (AB+BC)^2 — 2AB . BC (§. 87 *Arithm.*). Est vero AC^2 $= x^2$ & (AB + BC)^2 $= a^2 - 2ax + x^2$, 2AB . BC $= 4b^2$ (§. 392 *Geom.*). Quare

$$x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$$

$$2ax = a^2 - 4b^2$$

$$x = \frac{1}{2}a - 2b^2 : a$$

Quodsi triangulum construi debet, dicatur altitudo BD, hoc est perpendiculum in hypothenusam AC demissum (§. 227 *Geom.*), y; erit (§. 392 *Geom.*).

$$\frac{1}{2}xy = b^2$$

$$y = b^2 : \frac{1}{2}x$$

Constructio. Erigatur ad BD $= a$ perpendicularis AB $= 2b$, fiatque BC $= b$ & quæratur Tab. XII. *Fig.* 113.

Tab. XII. *Fig.* 113. ratur (§.271 *Geom.*) quarta proportionalis BH $= 2b^2 : a$. Fiat CB $= \frac{1}{2}a$, & CI $=$ BH; erit BI $= \frac{1}{2}a - 2b^2 : a = x$. Dividatur BI bifariam in O, quæraturque ad BO $= \frac{1}{2}x$, & BE $=$ BG $= b$ tertia proportionalis BK, quæ erit altitudo trianguli quæsita $= b^2 : \frac{1}{2}x$. Quare, si super BI describatur semicirculus, & ex K agatur eidem parallela KL secans semicirculum in L; ductis rectis BL & LI erit BLI triangulum quæsitum.

Æquatio secunda in hanc resolvitur analogiam:

$$2a : a + 2b = a - 2b : x$$

seu $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}a - b : x$ (§.185 *Arith.*). habetur adeo

Theorema. In omni triangulo rectangulo est ut dimidia perimeter ad compositam ex dimidia perimetro & quadrati latere, quod triangulo æquale, ita differentia hujus lateris a perimetro dimidia ad hypothenusam.

SCHOLION.

256. *Cum areas figurarum in Geometria metiamur investigando earum rationem ad quadratum aliquod datum* (§.118 Geom.); *ideo quoque tum in Geometria, tum in Algebra dantur per latus quadrati ipsis æquale.*

PROBLEMA CXIV.

Tab.I. *Fig.*3. 257. *Data area trianguli rectanguli, cujus latera* AC, AB, & BC *in proportione continua; invenire latera.*

Sit area $= a^2$ BC $= x$

AB $= y$

erit AC $= y^2 : x$

Ergo

(§.417 *Geom.*)   (§.392 *Geom.*)

$y^4 : x^2 = y^2 + x^2$ $\frac{1}{2}xy = a^2$

x^2

$y^4 = x^4 + x^2y^2$ $xy = 2a^2$ Tab.I. *Fig.*3.

$y^4 = \dfrac{16a^8}{y^4} + 4a^4$ $x = 2a^2 : y$

y^4

$y^8 = 16a^8 + 4a^4y^4$ $x^2 = 4a^4 : y^2$

$x^4 = 16a^8 : y^4$

$x^2y^2 = 4a^4$

$y^8 - 4a^4y^4 = 16a^8$

$+4a^8 \quad + \quad 4a^8$

$$y^8 - 4a^4y^4 + 4a^8 = 20a^8$$

$$\left.\begin{matrix} y^4 - 2a^4 \\ 2a^4 - y^4 \end{matrix}\right\} = 2a^4\sqrt{5}$$

$$y^4 = 2a^4 + 2a^4\sqrt{5} = a^4(2 + 2\sqrt{5})$$

$$y = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$$

Nempe quia $2a^4 < 2a^4\sqrt{5}$, radix $2a^4 - y^4$ est falsa.

Similiter reperitur valor ipsius x. Est enim, vi æquationis $xy = 2a^2$, $y = 2a^2 : x$, adeoque $y^4 = 16a^8 : x^4$, & hinc ob $y^4 = x^2y^2 + x^4$ porro

$$16a^8 : x^4 = 4a^4 + x^4$$

$$16a^8 = 4a^4x^4 + x^8$$

$$20a^8 = 4a^8 + 4a^4x^4 + x^8$$

$$2a^4\sqrt{5} = 2a^4 + x^4$$

$$x^4 = 2a^4\sqrt{5} - 2a^4$$

$$x = a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$$

Constructio. Jungantur AB $= a$ & AC $= 2a$ ad angulos rectos, erit BC $= a\sqrt{5}$. Tab. XII. Fiat BD $=$ AB, erit DC $= a\sqrt{5} - a$. Fiat *Fig.* porro CE $=$ CD, & ducta per C recta NL 114. ad AK perpendiculari describatur super AE semicirculus; erit CN $= \sqrt{(2a^2\sqrt{5} - 2a)}$ $= a\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}$. Factis CH $= a$ & CG $=$ CN, descriptoque semicirculo super HG; erit CI $= \sqrt{(a^2\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)})} = a\sqrt{\sqrt{(2\sqrt{5} - 2)}}$ $= a\sqrt[4]{(2\sqrt{5} - 2)}$.

Tab. XII. Fig. 114. Similiter fiat $CK = CB + CH = a + a\sqrt{5}$; erit, descripto super AK semicirculo, $CL = \sqrt{(2a^2 + 2a^2\sqrt{5})} = a\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}$. Fiat porro $CO = CL$; erit descripto super HO semicirculo $CM = \sqrt{(a^2\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})})} = a\sqrt[4]{(2 + 2\sqrt{5})}$.

Quodsi itaque tandem fiat CF = CI; ducta FM erit CMF triangulum quæsitum.

Quodsi exponens rationis $= y$, $BC = x$, erit $AB = xy$, $AC = xy^2$, adeoque (§.417 *Geom.*):

$$x^2y^4 = x^2y^2 + x^2 \quad x^2 \text{ div.}$$
$$y^4 = y^2 + 1 \quad y^2 \text{ subt.}$$
$$y^4 - y^2 = 1$$
$$\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \text{add.}$$
$$y^4 - y^2 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} y^2 - \tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2} - y^2 \end{array}\right\} = \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y^2 = \tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{5}{4}}$$
$$y = \sqrt{(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})}$$

Patet adeo rationem laterum esse constantem.

PROBLEMA CXV.

Tab. I. Fig. 6. 258. *Datam rectam* AB *media & extrema ratione secare in* C, *hoc est, ut sit* AB : AC = AC : CB.

Sit $AB = a$, $AC = x$; erit $CB = a - x$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$a : x = x : a - x$$
$$x^2 = a^2 - ax \ (\text{§.297 } \textit{Arithm.}).$$
$$ax \text{ add.}$$
$$x^2 + ax = a^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 \text{ add.}$$
$$x^2 + ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{5}{4}a^2$$
$$\text{Ext. Rad.}$$
$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$$

Constructio. 1°. Jungantur $AB = a$ & $BD = \tfrac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit $AD = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Tab. I. Fig. 6. 2°. Fiat $DF = \tfrac{1}{2}a$ & $AF = AC$; erit $AC = x$.

Tab. I. Fig. 7. Alia ex æquatione tertia elicitur constructio. Nimirum radio $AC = \tfrac{1}{2}a$ describatur circulus, & in A erigatur perpendicularis $= a$. Si enim porro ducatur BD per centrum C; erit $ED = a$ & $BE = x$. Quare si fiat BF = BE; recta AB erit in F media & extrema ratione secta. Etenim $BD = a + x$, adeoque $BE.\,BD = ax + x^2$; consequenter $ax + x^2 = a^2$ (§.379 *Geom.*).

PROBLEMA CXVI.

259. *Rectam datam* AC, *utcunque divisam in* B, *iterum secare in* D, *ita ut sit* AD : DC = DC : BD. Tab. I. Fig. 8.

Sit $AB = a$, $BD = x$,
$BC = b$, erit $DC = b - x$,
$AD = a + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$$a + x : b - x = b - x : x$$
$$ax + x^2 = b^2 - 2bx + x^2$$
$$x^2 - 2bx \text{ subtr.}$$
$$ax + 2bx = b^2$$
$$a + 2b, \text{ div.}$$
$$x = bb : (a + 2b)$$

Invenitur adeo x ob analogiam

$$a + 2b : b = b : x \ (\text{§.272 } \textit{Geom.}).$$

Aliter.

Analogia prima, ex qua æquatio elicitur, etiam per leges rationum ad eam reduci potest, a qua constructio pendet. Quoniam enim

$$a + x : b - x = b - x : x$$

erit

$$a + b : b - x = b : x \ (\text{§.190 } \textit{Arithm.})$$
$$a + b : b = b - x : x \ (\text{§.173 } \textit{Arithm.})$$
$$a + 2b : b = b : x \ (\text{§.190 } \textit{Arith.}).$$

PRO-

PROBLEMA CXVII.

Tab. I. Fig. 8. 260. *Datam rectam* AC *divisam in* B *denuo secare in* D, *ita ut sit* CB : DB = DA : BA.

Sit $CB = a$, $DB = x$,
$BA = b$, erit $DA = b + x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$a : x = b + x : b$

$ab = bx + x^2$

$\frac{1}{4}b^2$ $\frac{1}{4}b^2$ add. (§. 143).

$\frac{1}{4}b^2 + ab = \frac{1}{4}b^2 + bx + x^2$

Ext. Rad.

$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} = \frac{1}{2}b + x$

$\frac{1}{2}b$ subt.

$\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} - \frac{1}{2}b = x$

Tab. I. Fig. 9. *Constructio.* Inter $EG = b$ & $GE = a$ quæratur media proportionulis HG, quæ erit $= \sqrt{ab}$. Fiat $GI = \frac{1}{2}b$, & ducatur HI; erit $HI = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)}$. Fiat denique $KI = GI$: erit $KH = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + ab)} - \frac{1}{2}b$. Invenitur etiam $\sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, si inter $\frac{1}{4}b + a$ & b quæratur media proportionalis (§. 327, 330 *Geom.*).

Tab. I. Fig. 4. Item, quia $\frac{1}{4}bb + ab$ est differentia quadratorum $\frac{1}{4}bb + ab + a^2$ & a^2; super AB $= \frac{1}{2}b + a$ describatur semicirculus & in eo applicetur $AC = a$; erit $CB = \sqrt{(\frac{1}{4}bb + ab)}$, (§. 317, 417 *Geom.*).

DEFINITIO XIX.

261. Si quatuor fuerint *lineæ* proportionales, extremæ mediis, mediæ extremis *reciprocæ* dicuntur.

PROBLEMA CXVIII.

Tab. I. Fig. 10. 262. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut partes* AC *&* CB *sint duabus datis* DE *&* FG *reciprocæ*.

Sit $AB = a$, $AC = x$,
$DE = b$, $CB = a - x$.
$FG = c$,

Ergo (§. 261).

$x : b = c : a - x$

$ax - x^2 = cb$

mut. sig.

$-cb = x^2 - ax$

$\frac{1}{4}aa$ $\frac{1}{4}aa$ add. (§. 143).

$\frac{1}{4}aa - cb = \frac{1}{4}a^2 - ax + x^2$

Ext. Rad.

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - cb)} \left(\begin{array}{l} = \tfrac{1}{2}a - x \\ = x - \tfrac{1}{2}a \end{array} \right.$$

$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)}$

Constructio. Quæratur inter $HI = b$ & Tab. I.
$IK = c$ media proportionalis $MI = \sqrt{cb}$ Fig. 11.
(§. 327 *Geom.*). Radio $IL = \frac{1}{2}a$ describatur arcus, & ducatur PM ipsi IK parallela (§. 258 *Geom.*); erit $NM = x$ & $MP = a - x$. Nam demisso ex centro L perpendiculo LO, erit $NO = OP$ (§. 291 *Geom.*) & $OL = MI = \sqrt{cb}$ (§. 226 *Geom.*). Sed $NL = LI$ (§. 40 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$. Ergo $NO = \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)}$ (§. 417 *Geom.*); consequenter, ob $MO = IL$ (§. 238 *Geom.*) $= \frac{1}{2}a$, $MN = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = x$, & $PM = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - cb)} = a - x$.

COROLLARIUM.

263. Construere ergo æquationem quadraticam affectam $ax - x^2 = cb$, idem est, ac datis duabus rectis c & b, vel si $c = b$, eidem rectæ b reciprocas x & $a - x$ invenire.

PROBLEMA CXIX.

264. *Datis duabus rectis* DE *&* FG Tab. I.
reciprocas invenire, quarum differentia Fig. 10.
sit data recta AC *aqualis*.

Sit $DE = a$, reciproca minor
$FG = b$, $= x$,
$AC = c$, erit major $= c + x$.

Ergo (§. 261)

$x : a = b : c + x$

$ab = cx + x^2$

$\frac{1}{4}cc \qquad \frac{1}{4}cc$

$\frac{1}{4}cc + ab = \frac{1}{4}cc + cx + x^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)} = \frac{1}{2}c + x$

$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)} - \frac{1}{2}c = x$

Tab.I. Fig. 5. *Constructio.* Quæratur inter AC = b & CB = a media proportionalis DC. Fiat CE = $\frac{1}{2}c$; erit DE = $\sqrt{(\frac{1}{4}cc + ab)}$. Unde si subtrahitur $\frac{1}{2}c$ = EF, relinquitur DF = x.

Tab.I. Fig.12. Alia magis ingeniosa ex æquatione $ab = cx + x^2$ eruitur. Describatur nimirum ex centro C, radio arbitrario, majori tamen quam $\frac{1}{2}c$ & $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, circulus. In eo applicentur chordæ IQ = c & IP = $a - b$. Prolongetur PI in O, donec PO = b. Tandem per O describatur circulus priori concentricus: erit HI = x. Demissa enim ex centro C perpendiculari CL; erit LI = LQ & LH = LM (§. 291 *Geom.*), adeoque QM = IH (§.91 *Arithm.*). Eodem modo ostenditur, esse NI = PO = b. Ergo NI. IO = ab; consequenter ab = HI. IM = HI. (c + HI) (§. 381 *Geom.*). Est vero etiam $ab = x(c + x)$. Ergo HI = x.

Sint omnia ut ante, & pars major $= x$, erit minor $x - c$; consequenter (§. 261)

$x : a = b : x - c$

$x^2 - cx = ab.$

Constructio. Eadem est, quæ precedens. Sed hic MI = x, ita enim HI = QM = $x - c$, consequenter NI. NO = ab & HI. IM = $x^2 - cx$.

COROLLARIUM.

265. Construere ergo æquationes quadraticas $x^2 + cx = ab$ & $x^2 - cx = ab$, idem est ac datis duabus rectis a & b, vel, si $a = b$, eidem rectæ b reciprocas ibi x & $x + c$, hic x & $x - c$ reperire.

PROBLEMA CXX.

266. *Datam rectam* AB *ita secare in* C, *ut rectangulum sub tota* AB *& segmento minore* AC *æquale sit rectangulo sub majore* CB *& differentia utriusque* CB — AC. Tab.I. Fig.10.

Sit AB = a, AC = x,
erit CB = $a - x$,
CB — AC = $a - 2x$.

Quare, per conditionem Problematis,

$ax = a^2 - 3ax + 2x^2$

$-a^2 = -4ax + 2x^2$

$-\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax$

$+a^2 \qquad +a^2$

$\frac{1}{2}a^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$\sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a - x$

$x + \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = a$

$x = a - \sqrt{\frac{1}{2}a^2}$

Constructio. Quæratur inter $\frac{1}{2}a$ & a media proportionalis, quæ erit pars major $a - x$, adeoque subducta ex a relinquit minorem x.

Aliter.

Quoniam, per conditionem Problematis,

$ax = (a - x)(a - 2x)$

erit $a : a - 2x = a - x : x$ (§. 299 *Arithm.*)

$2a - 2x : a = a : a - x$

$a - x : \frac{1}{2}a = a : a - x$

$\frac{1}{2}a : a - x = a - x : a$

SCHOLION.

267. *His resolutionibus per analogias, & reductionibus æquationum quadraticarum ad lineas reciprocas opus est, si geometricas more Veterum mediteris demonstrationes.*

PRO-

PROBLEMA CXXI.

Tab.I. Fig.13. n. 1. 268. *Dato radio circuli* ED; *invenire latus Trigoni regularis ipsi inscribendi* AB.

Ducatur latus Hexagoni EB, & sit BD = BE (§. 356 *Geom.*) = a, AB = x; erit BF = $\frac{1}{2}x$ (§. 291 *Geom.*). Et quoniam anguli ad F recti (*per* §. *cit.*) BE = BD, *per demonstr.* BF = BF: erit EF = FD (§. 235 *Geom.*) = $\frac{1}{2}a$. Quare (§. 417 *Geom.*) $ED^2 - DF^2 = FB^2$, hoc est

$$\frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$3aa = x^2$$

$$\sqrt{3aa} = x$$

Est ergo x media proportionalis inter $3a$ & a. Et si fiat $a = 1$, erit $= x\sqrt{3}$.

Tab.I. Fig.13. n. 2. *Constructio*. Concinnior hæc est: Super diametro AB construatur triangulum æquilaterum AFB, & centrum C cum puncto F connectatur recta CF; erit CF latus trigoni. Cum enim FCB sit triangulum rectangulum (§. 184 *Geom.*) & FB = $2a$, CB = a; erit FC = $\sqrt{3aa}$ (§. 417 *Geom.*) = x.

Theorema. Quadratum lateris Trigoni est ad quadratum radii ut 3 ad 1.

Aliter.

$$\frac{3}{4}aa = \frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}a : \frac{1}{4}x = x : a$$

$$3a : x = x : a$$

COROLLARIUM I.

269. Si, dato latere Trigoni regularis b, inveniri debet radius circuli circumscribendi y; erit $3y^2 = b^2$, consequenter $y = \sqrt{\frac{1}{3}b^2}$, quæ est media proportionalis inter $\frac{1}{3}b$ & b.

COROLLARIUM II.

270. Quoniam dimidium latus Trigoni regularis est sinus 60° (§. 2 *Trigon.*), per Problema præsens invenitur sinus 60°.

SCHOLION.

271. *Hujus Problematis solutio usum potius respicit arithmeticum, quam geometricum. Geometrica enim constructio ex Elementis facilior & elegantior deducitur, quamvis eadem ex calculo etiam pateat. Est enim diameter* $AB = 2a$. *Quare si fiat* $AD = a$, *ducaturque* DB, *cum angulus ad D rectus sit* (§. 317 Geom.), *adeoque* $AB^2 - AD^2 =$ n. 2. Tab.I. Fig.13. DB^2 (§. 417 Geom.) *erit* $DB = \sqrt{3a^2}$.

PROBLEMA CXXII.

272. *Dato radio circuli* AE; *invenire latus Octogoni regularis circulo inscribendi*. Tab.I. Fig.17.

Sit AE = r, AF = y; erit latus quadrati AB = $\sqrt{2r^2}$ (§. 21 *Trig.*) & AG = $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$ (§. 291 *Geom.*). Porro cum AEF = 45° (§. 342 *Geom.*), & angulus ad G rectus (§. 291 *Geom.*); erit quoque EAG = 45° (§. 241 *Geom.*); consequenter EG = AG (§. 253 *Geom.*) = $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Hinc FG = $r - \sqrt{\frac{1}{2}r^2}$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$yy = \frac{1}{2}r^2 + 1\frac{1}{2}r^2 - r\sqrt{2r^2}$$

hoc est $yy = 2r^2 - r\sqrt{2r^2}$

$$y = \sqrt{(2r^2 - r\sqrt{2r^2})}$$

Quod si fiat $r = 1$; erit $y = \sqrt{(2 - \sqrt{2})}$.

COROLLARIUM.

273. Cum dimidium latus Octogoni sit sinus 22° 30′ (§. 2 *Trigon.*); per hoc ipsum Problema invenitur sinus 22° 30′.

PROBLEMA CXXIII.

274. *Dato latere Octogoni* AF; *invenire radium circuli circumscribendi* AE. Tab.I. Fig.17.

Tab.I. *Fig.*17. Sit AF $= b$, AE $= y$, erit (§. 272)

$$b^2 = 2y^2 - \sqrt{2y^4}$$

$$\sqrt{2y^4} = 2y^2 - b^2$$

$$2y^4 = 4y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = 2y^4 - 4b^2y^2 + b^4$$

$$0 = y^4 - 2b^2y^2 + \tfrac{1}{2}b^4$$

$$\tfrac{1}{2}b^4 \qquad \tfrac{1}{2}b^4 \text{ (§. 261 } Arith.)$$

$$\tfrac{1}{2}b^4 = y^4 - 2b^2y^2 + b^4$$

$$b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2 - b^2$$

$$b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = y^2$$

$$\sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})} = y$$

Est igitur $b : y = y : b + \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$
consеq. $\tfrac{1}{2}b : y = y : 2b + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$.

Hinc elicitur sequens geometrica

Constructio. Super latere Octogoni AB $= b$
Tab. describatur semicirculus, & ex centro C eri-
XII. gatur perpendicularis indefinita CF, erit
Fig. recta DB $= \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$ (§. 417 *Geom*). Fiat AE
115. $= 2b + 2b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2}$, descriptoque semicirculo AFE; erit AF $= \sqrt{(b^2 + b\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2})}$, (§. 330 *Geom.*); consequenter radius circuli Octogono circumscribendi: quod adeo super recta AB construetur, si radio AF describatur circulus transiens per A & B.

PROBLEMA CXXIV.

Tab.I. *Fig.*14. 275. *Dato radio circuli* AC; *inveni-re latus Decagoni regularis inscribendi* AB.

Quoniam AB est $\tfrac{1}{10}$ totius peripheriæ, angulus ACB $= 36°$ (§. 57, 59 *Geom.*); consequenter, ob AC $=$ BC (§. 40 *Geom.*), ABC $=$ CAB $= 72°$ (§. 248 *Geom.*); adeoque DAC $= 108$ (§. 149 *Geom.*). Fiat AD $=$ AC, erit ADC $=$ ACD $= 36°$ (§. 248 *Geom.*); consequenter DCB $= 72°$. Sunt ergo triangula ABC & BDC æquiangula & hinc BD : BC $=$ BC : AB (§. 267 *Geom.*). Tab.I. *Fig.*14.

Sit jam AC $=$ BC $= a$, AB $= x$; erit BD $= a + x$; consequenter *per demonstrata*,

$$a + x : a = a : x$$

$$ax + x^2 = a^2$$

Est ergo a media & extrema ratione secanda, cujus pars major x (§. 258). Vel radio a quærendæ sunt reciprocæ $a + x$ & x (§. 265).

Theorema. Latus Decagoni regularis circulo inscripti est pars major radii media & extrema ratione secti. Tab.I. *Fig.*15.

Constructio. Quoniam $x = \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$ (§. 258); radio a describatur circulus & in centro E erigatur perpendicularis IE $= a$. Fiat EF $= \tfrac{1}{2}a$: erit FI $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$. Quare si ex F, radio IF, describatur arcus KI, erit KE $= \sqrt{\tfrac{5}{4}a^2} - \tfrac{1}{2}a$.

SCHOLION.

276. *Hanc ipsam constructionem tradit* PTOLEMÆUS *in suo* Almagesto.

COROLLARIUM.

277. Invenitur ergo per Problema præsens sinus 18° (§. 2. *Trigon.*).

PROBLEMA CXXV.

278. *Dato latere Decagoni regularis circulo inscribendi* AB; *invenire radium* AC. Tab.I. *Fig.*14.

Sit AB $= a$, AC $= x$; erit BD $= a + x$, & *per demonstrata in Probl. præc.*

$a +$

$$a+x:x=x:a$$
$$ax+a^2=x^2$$
$$a^2=x^2-ax$$
$$\tfrac{5}{4}a^2=x^2-ax+\tfrac{1}{4}a^2$$
$$\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}=x-\tfrac{1}{2}a, \text{ ob } x>\tfrac{1}{2}a \text{ (§. 275).}$$
$$\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}=x.$$

Tab.I. Fig.16. *Constructio.* Construatur triangulum rectangulum MLN, in quo $ML=a$ & $MN=\frac{1}{2}a$: erit $LN=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ (§.417 *Geom.*). Producatur MN in O, donec $NO=LN$; erit $MO=x$. Ex centro itaque O per M circulus describi potest.

Aliter.

$$a+x:x=x:a$$
$$a:x=x-a:a$$

Quærendæ adeo sunt ipsi a reciprocæ x & $x-a$.

PROBLEMA CXXVI.

Tab.I. Fig.17. 279. *Dato radio circuli* AE *&* *latere Decagoni* AF; *invenire latus Pentagoni* AB.

Sit $AE=a$, $AB=x$,
$AF=b$, $AG=\frac{1}{2}x$, (§.291 *Geom.*)
$GE=\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$
$FG=a-\sqrt{(a^2-\frac{1}{4}x^2)}$
Quare (§.417 *Geom.*)

$$b^2=\tfrac{1}{4}x^2+a^2-2a\sqrt{(a^2-\tfrac{1}{4}x^2)}+a^2-\tfrac{1}{4}x^2$$
$$b^2=2a^2-2a\sqrt{(a^2-\tfrac{1}{4}x^2)}$$
$$2a\sqrt{(a^2-\tfrac{1}{4}x^2)}=2a^2-b^2$$
$$4a^4-a^2x^2=4a^4-4a^2b^2+b^4$$
$$-a^2x^2=-4a^2b^2+b^4$$
$$4a^2b^2-b^4=a^2x^2$$
$$4b^2-b^4:a^2=x^2$$

Est vero $b=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}-\frac{1}{2}a$ (§. 275)
$$b^2=\tfrac{6}{4}a^2-a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$b^4=\tfrac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$

Ergo
$$x^2=\tfrac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-(\tfrac{14}{4}a^4-3a^3\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}):a^2$$
$$=\tfrac{24}{4}a^2-4a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}-\tfrac{14}{4}a^2+3a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$=\tfrac{10}{4}a^2-a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}=a^2+\tfrac{6}{4}a^2-a\sqrt{\tfrac{5}{4}a^2}$$
$$=a^2+b^2.$$

Constructio: Quæratur latus Decagoni EK (§. 275); erit KI latus Pentagoni. Tab.I. Fig.15.

Theorema. Latus Pentagoni regularis potest latera Hexagoni & Decagoni eidem circulo inscriptorum simul.

SCHOLION.

280. *Eandem prorsus constructionem dedit* PTOLEMÆUS.

COROLLARIUM.

281. Per præsens adeo Problema inveniri potest sinus 36° (§. 2 *Trigon.*).

PROBLEMA CXXVII.

282. *Datis summa crurum Trianguli rectanguli* AB+BC, *una cum perpendiculo* BD *ex angulo recto* B *in hypothenusam* AC *demisso; invenire latera.* Tab.I. Fig.3.

Sit $AB+BC=a$, $BD=b$, $AB-BC=y$, $AC=x$; erit $AB=\frac{1}{2}(a+y)$, $BC=\frac{1}{2}(a-y)$; consequenter

(§.417 *Geom.*)
$$x^2=\tfrac{1}{2}(aa+yy)$$
$$2x^2=aa+yy$$
$$2x^2-a^2=y^2$$

(§. 330 *Geom.*)
$$BA:BD=AC:BC$$
$$\tfrac{1}{2}(a+y):b=x:\tfrac{1}{2}(a-y)$$
$$\tfrac{1}{4}(a^2-y^2)=bx$$
$$a^2-y^2=4bx$$
$$a^2-4bx=y^2$$

Quare

Quare (§. 87 *Arithm.*).

$$2x^2 - a^2 = a^2 - 4bx$$

$$2x^2 + 4bx = 2a^2$$

$$x^2 + 2bx = a^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \surd(a^2 + b^2) - b$$

Constructio nihil difficultatis habet. Quodsi enim triangulum construi debet, ad AB $= a$ excitetur in A perpendicularis AC $= b$ (§. 249 *Geom.*), erit BC $= \surd(a^2 + b^2)$. Quare si fiat CD $=$ AC, erit DB $= \surd(a^2 + b^2) - b$. Fiat jam porro BE $=$ BD, &, descripto super EB semicirculo ex C, ducatur CH ipsi AB parallela (§. 258 *Geom.*) secans semicirculum in F. Ductis enim rectis EF & FB, erit EFB triangulum quaesitum. Tab. XII. *Fig.* 116.

PROBLEMA CXXVIII.

Tab. I. *Fig.* 18. 283. *Datis, pro triangulo rectangulo* BAC, *hypothenusa* BC *& differentia crurum* DC; *invenire crura.*

Sit BC $= c$, DC $= f$, $\frac{1}{2}$(AB + AC) $= x$; erit AC $= x + \frac{1}{2}f$, AB $= x - \frac{1}{2}f$ (§. 6); consequenter (§. 417 *Geom.*).

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}f^2 = c^2$$

$$2x^2 = c^2 - \tfrac{1}{2}f^2$$

$$x^2 = \tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2$$

$$x = \surd(\tfrac{1}{2}c^2 - \tfrac{1}{4}f^2)$$

Constructio. Construatur rectangulum triangulum AFE, in quo AF $=$ FE $= \frac{1}{2}c$, erit AE $= \surd\frac{1}{2}cc$. Super AE describatur semicirculus, ob AF $=$ FE, transiturus per F, & in eo applicetur EG $= \frac{1}{2}f$; erit AG $= x$; consequenter si fiat GD $=$ GC $=$ GE, crus majus AC, minus AB $=$ AD.

PROBLEMA CXXIX.

Tab. I. *Fig.* 19. 284. *In dato circulo aptare rectam datam* KL, *quae producta transeat per datum punctum* H *tangentis* HI.

Sit LK $= m$, HI $= n$, LH $= y$; erit (§. 379 *Geom.*). Tab. I. *Fig.* 19.

$$y^2 + my = n^2$$

$$\tfrac{1}{4}m^2 \quad \tfrac{1}{4}m^2$$

$$y^2 + my + \tfrac{1}{4}m^2 = \tfrac{1}{4}m^2 + n^2$$

$$y + \tfrac{1}{2}m = \surd(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2)$$

$$y = \surd(\tfrac{1}{4}m^2 + n^2) - \tfrac{1}{2}m$$

Constructio. In puncto tangentis I erigatur perpendicularis MI $= \frac{1}{2}m$; erit HM $= \surd(\frac{1}{4}m^2 + n^2)$. Fiat NM $=$ MI $= \frac{1}{2}m$; erit HN $= y$. Quare si ex centro H, radio HN, describatur arcus LN; erit L punctum, per quod recta HK ducenda, ut LK sit chorda in circulo aptanda.

PROBLEMA CXXX.

285. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum summa aequatur quadrato dato.*

Sint quadrata data bb, cc, dd, quaesita yy & $dd - yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : bb = cc : dd - yy$$

$$ddy^2 - y^4 = bbcc$$

$$y^4 - ddy^2 + \tfrac{1}{4}d^4 = \tfrac{1}{4}d^4 - bbcc$$

$$\tfrac{1}{2}dd - y^2 = \surd(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)$$

$$y^2 = \tfrac{1}{2}dd - \surd(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc)$$

$$y = \surd(\tfrac{1}{2}dd - \surd(\tfrac{1}{4}d^4 - bbcc))$$

Constructio. Quaeratur ad AB $= d$, AC $= b$, & BD $= c$ quarta proportionalis CE $= bc : d$. Describatur semicirculus super CF $= \frac{1}{2}d$, & in eo applicetur CG $=$ CE; erit FG $= \surd(\frac{1}{4}d^4 - bbcc) : d$. Fiat HC $= d$ & CI $= \frac{1}{2}d - \surd(\frac{1}{4}d^4 - bbcc) : d$; erit media proportionalis CK $= y$. Denique super CH $= d$ describatur semicirculus, & in eo applicetur CL $=$ CK, erit LH $= \surd(d^2 - y^2)$ latus alterius quadrati quaesiti. Tab. I. *Fig.* 20.

PRO-

PROBLEMA CXXXI.

286. *Datis duobus quadratis; invenire duo alia reciproca, quorum differentia æquatur quadrato dato.*

Sint quadrata data ff, gg, hh, quæsita yy & $hh+yy$. Erit, per conditionem Problematis,

$$yy : ff = gg : hh + yy$$

$$y^4 + hhyy = ffgg$$

$$\tfrac{1}{4}h^4 \qquad \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^4 + hhyy + \tfrac{1}{4}h^4 = ffgg + \tfrac{1}{4}h^4$$

$$y^2 + \tfrac{1}{2}hh = \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y^2 = -\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)}$$

$$y = \sqrt{(-\tfrac{1}{2}hh + \sqrt{(ffgg + \tfrac{1}{4}h^4)})}$$

Constructio. Eadem fere, quæ Problematis præcedentis.

PROBLEMA CXXXII.

Tab. II. Fig. 21. n. 1. 287. *Datis tribus lateribus trianguli cujuscunque* HL, LI *&* IH; *invenire altitudinem* ML.

Sit $HL = c$, $LI = d$, $HI = g$, $HM = z$, erit $MI = g - z$. Quare (§. 417 *Geom.*) bis invento valore ipsius MI^2

$$cc - zz = dd - gg + 2gz - zz$$

$$cc = dd - gg + 2gz$$

$$cc - dd = 2gz - gg$$

$$cc + gg - dd = 2gz$$

$$\frac{cc + gg - dd}{2g} = z$$

Geometrica constructio non desideratur, utpote ex Elementis manifesta; sed tantum regula arithmetica.

COROLLARIUM.

288. Vi æquationis tertiæ $dd - cc = gg - 2gz$. Sed $gg - 2gz$ est differentia inter zz & $gg - 2gz + zz$. Ergo in omni triangulo differentia quadratorum crurum HL & LI æquatur differentiæ quadratorum segmentorum basis HM & MI. Tab. II. Fig. 21. n. 1.

PROBLEMA CXXXIII.

289. *Triangulo dato* HLI *æquale & alteri dato* NOP *simile construere.* Tab. II. Fig. 21. n. 1. & 2.

Sit $HI = f$, $LM = e$, $NP = m$, $QO = n$, basis trianguli quæsiti $= y$, altitudo $= z$: erit

(§. 396 *Geom.*) (§. 392 *Geom.*)

$$m : n = y : z \qquad fe = zy$$

$$mz = ny \qquad fe : y = z$$

$$mfe : y = mz$$

$$ny = mfe : y$$

$$ny^2 = mfe$$

$$y^2 = mfe : n$$

$$y = \sqrt{(mfe : n)}$$

Constructio. Producatur altitudo OQ trianguli NOP in M, donec altitudini alterius LM æqualis fiat. Producantur itidem crura trianguli in R & S, & per M agatur ipsi NP parallela: erit $RS = me : n$. Quæratur inter RS & $SI = f$ media proportionalis $TS = \sqrt{(mfe : n)}$, super qua, ob angulos N & P datos, triangulum TSV construi potest (§. 264 *Geom.*).

Aliter.

$n : m = z : y \qquad fe = zy$

Fiat $n : m = e : r \qquad f : z = y : e$ (§ 299 *Arithm.*)

erit $z : y = e : r$ (§. 167 *Arithm.*)

Ergo $f : y = y : r$ (§. 194 *Arithm.*).

Est ergo y media proportionalis inter f & r, seu inter f & $em : n$, ut ante.

PROBLEMA CXXXIV.

Tab.II. Fig.22. 290. *Ex angulo* C *rhombi dati* ABDC *ducere rectam* CG *lateri* AB *continuato occurrentem in* G, *ita ut* EG *sit æqualis lineæ datæ.*

Ducatur diagonalis CB & in E constituatur angulus CEF = CBG (§. 208 *Geom.*), cujus latus EF producatur, donec diagonali continuatæ in F occurrat.

Sit $AB = b$, $CB = c$, $EG = d$, $BG = z$, $CF = y$: erit $BF = y - c$. $BG : GE = AB : EC$ (§. 268 *Geom.*). Unde reperitur $EC = bd : z$. Quoniam angulus CEF = CBG *per construct.* erit ob angulum communem C (§. 267 *Geom.*) $CB : BG = CE : EF$. Unde reperitur $EF = zbd : cz = bd : c$. Porro $o = x$ (§. 156 *Geom.*) & $x = u$ (§. 99, 204 *Geom.*). Ergo $o = u$ (§. 87 *Arithm.*); consequenter CBG = EBF (§. 88 *Arithm.*) = CEF (§. 87 *Arithm.*). Ergo, ob angulum communem F (§. 267 *Geom.*),

$$CF : FE = FE : BF$$

$$y : \frac{bd}{c} = \frac{bd}{c} : y - c$$

$$cy : bd = bd : cy - cc$$

$$ccy^2 - c^3 y = bbdd$$

$$y^2 - cy = bbdd : cc$$

$$y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc = \tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc$$

$$y - \tfrac{1}{2}c = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c + \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$$

Ex æquatione prima statim liquet, inveniendas esse ipsi $bd : c$ reciprocas y & $y - c$. Ex ultima autem hæc elicitur

Constructio. Fiat $BM = EG = d$, & ducatur LM ipsi AC parallela; erit $LM = bd : c$ (§. 268 *Geom.*). Dividatur BC bifariam in N & in C erigatur perpendicularis CO = LM; erit $ON = \sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + bbdd : cc)}$ (§. 417 *Geom.*). Translata ergo ON ex N in F; erit $CF = y$. Denique cum $EF = bd : c = LM$; ex puncto F, intervallo EF, determinetur punctum E. Quodsi jam ex C ducatur recta per E occurrens ipsi AB continuatæ in G, erit EG æqualis lineæ datæ. Tab.II. Fig.22.

PROBLEMA CXXXV.

291. *A dato puncto* E *ducere rectam, quæ circulum datum tangat.* Tab.I. Fig.23.

Quia punctum E positione, circulus GDFG & positione & magnitudine datur; dantur etiam EG & GC. Sit itaque $EG = a$, $GC = b$, $ED = x$; erit $EF = a + 2b$ & (§. 379 *Geom.*)

$$aa + 2ab = x^2$$

$$\sqrt{(aa + 2ab)} = x$$

Constructio. Connectantur centrum circuli C & punctum datum E recta EC. Super ea describatur semicirculus CDE, ducanturque chordæ CD & DE; erit D rectus (§. 317 *Geom.*). Est vero $CE^2 = aa + 2ab + bb$, $CD^2 = bb$: ergo $DE = \sqrt{(2ab + aa)} = x$ (§. 417 *Geom.*).

PROBLEMA CXXXVI.

292. *Examinare regulam* Renaldinianam, *Polygonum regulare quodcunque circulo inscribendi.* Tab.II. Fig.24.

Regula *Caroli* RENALDINI (a) hæc est. Dividatur diameter AB in tot partes æquales, in quot peripheria dividi debet. Super AB construatur triangulum æquilaterum AFB. Ex F per secundum divisionis punctum D ducatur recta FG. Erit ex ipsius mente BG latus Polygoni.

Fal-

(a) De Resolutione & Compositione Mathematica lib. 2. f. 367.

Tab.II. *Fig.* 24. Falſitatem Regulæ una inſtantia oſtendiſſe ſufficit.

Sit BG latus Octogoni, & fiat BH $=$ BG; erit HG latus Quadrati. Sit porro CB $= 1$, EG $= x$; erit CD $= \frac{1}{2}$, per Regulam RENALDINI, FC $= \sqrt{3}$ (§. 417 *Geom.*). Quoniam angulus ad C rectus (§. 184 *Geom.*) & is ad E itidem rectus (§. 291 *Geom.*), præterea verticales ad D æquales (§. 156 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*) FC : CD $=$ EG : DE, hoc eſt, $\sqrt{3} : \frac{1}{2} = x : \frac{\frac{1}{2}x}{\sqrt{3}}$. Hinc CE $= \frac{\sqrt{3}+x}{2\sqrt{3}}$. Unde tandem ob CE^2 + EG^2 $=$ CG^2 (§. 417 *Geom.*) reperitur

$$\frac{3 + 2x\sqrt{3} + x^2}{12} + x^2 = 1$$

$$3 + 2x\sqrt{3} + 13x^2 = 12$$

$$2x\sqrt{3} + 13x^2 = 9$$

$$\tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13}$$

$$\tfrac{3}{13.13} \qquad\qquad \tfrac{3}{13.13} \quad \text{add.}$$

$$\tfrac{3}{13.13} + \tfrac{2}{13}x\sqrt{3} + x^2 = \tfrac{9}{13} + \tfrac{3}{13.13} = \tfrac{120}{13.13}$$

$$\tfrac{1}{13}\sqrt{3} + x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120}.$$

$$x = \tfrac{1}{13}\sqrt{120} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

$$= \tfrac{2}{13}\sqrt{30} - \tfrac{1}{13}\sqrt{3}$$

Foret adeo ſemilatus Quadrati, ſi vera eſſet Regula RENALDINI, $(2\sqrt{30} - \sqrt{3}) : 13$. Sed idem ex veris principiis elicitur $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (§. 21 *Trigon.*) $= \sqrt{\frac{1}{2}}$: quod diverſum a *Renaldiniano* eſſe extractio radicis probat. Fallit ergo regula RENALDINI in Octogono, adeoque non univerſalis.

SCHOLION.

293. *Eodem prorſus modo oſtenditur, quod etiam fallat in aliis Polygonis.*

PROBLEMA CXXXVII.

294. *Data diagonali Pentagoni regularis* AD; *invenire latus Pentagoni* AE.

Sit AE $= x$, AD $= a$. Quoniam anguli AEC menſura eſt arcus AB (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFA ſemiſumma arcuum AE & CD (§. 316 *Geom.*), hoc eſt, arcus AE (§. 342 *Geom.*), eſt vero AB $=$ AE (§. *cit. Geom.*); erit AEF $=$ AFE (§. 142 *Geom.*), conſequenter AF $=$ AE (§. 253 *Geom.*) $= x$, adeoque FD $= a - x$. Porro anguli AED menſura eſt AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 314 *Geom.*) & ipſius EFD menſura itidem AB $+ \frac{1}{2}$ BC (§. 316 *Geom.*) & angulus ADE utrique triangulo AED & EFD communis. Quare (§. 267 *Geom.*) Tab.II. *Fig.* 25.

$$AD : ED = ED : FD$$

$$a : x = x : a - x$$

$$a^2 - ax = x^2$$

$$a^2 = x^2 + ax$$

Eſt adeo x pars major ipſius a media & extrema ratione ſectæ (§. 258).

COROLLARIUM.

295. Quod ſi AD $= x$, ED $= a$, reperietur $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$. Unde patet, quomodo ex dato latere diagonalis inveniatur.

PROBLEMA CXXXVIII.

296. *Invenire circulum ſuperficiei Cylindri æqualem.*

Sit ratio radii ad peripheriam $r : p$; peripheria Cylindri $= p$; altitudo a; erit ſuperficies $= ap$ (§. 516 *Geom.*). Sit

Sit radius circuli $= x$; erit $r : p = x : \frac{px}{r}$, quæ est ejusdem peripheria (§. 425 *Geom.*). Unde habemus (§. 429 *Geom.*)

$$px^2 : 2r = ap \quad 2r \text{ mult.}$$
$$px^2 = 2rap \quad p \text{ div.}$$
$$x^2 = 2ar$$
$$x = \sqrt{2ar}$$

Theorema. Superficies Cylindri æquatur circulo, cujus radius est medius proportionalis inter diametrum & altitudinem Cylindri.

PROBLEMA CXXXIX.

297. *Invenire Cylindrum, cujus superficies sit circulo dato æqualis.*

Sit circuli radius $= r$, peripheria $= p$, altitudo Cylindri $= x$, radius basis $= y$; erit peripheria ejus $py : r$ (§ 425 *Geom.*), consequenter (§. 516 *Geom.*).

$$pyx : r = \tfrac{1}{2}pr \quad r$$
$$pyx = \tfrac{1}{2}pr^2 \quad p$$
$$yx = \tfrac{1}{2}r^2 \quad y$$
$$x = r^2 : 2y$$

Est adeo Problema indeterminatum, ita ut radius pro arbitrio assumi possit vel, quod perinde est, altitudo.

PROBLEMA CXL.

298. *Data diametro Sphæra & altitudine Cylindri ipsi æqualis; invenire diametrum Cylindri.*

Sit diameter Sphæræ $= d$, altitudo Cylindri $= a$, diameter ejus $= x$, ratio diametri ad peripheriam $b : c$; erit soliditas Sphæræ $cd^3 : 6b$ (§. 556 *Geom.*), & soliditas Cylindri $= acx^2 : 4b$ (§ 541 *Geom*). Quare, per conditionem Problematis,

$$cd^3 : 6b = acx^2 : 4b$$
$$4d^3 = 6ax^2$$
$$2d^3 : 3a = x^2$$
$$\sqrt{(2d^3 : 3a)} = x.$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$3a : 2d = d^2 : x^2$$

resoluta sequens suppeditat

Theorema: Quadratum diametri Sphæræ est ad quadratum diametri Cylindri ipsi æqualis, ut tripla Cylindri altitudo ad diametrum Sphæræ duplam.

PROBLEMA CXLI.

299. *Data diametro Sphæræ* AB; *invenire latus Tetraedri ipsi inscribendi* AD. Tab.II. Fig.26.

Sit diameter Sphæræ AB $= a$, latus Tetraëdri AD $= x$, erit CD radius circuli, cui unum e triangulis Tetraëdri inscribi potest $= \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2}$ (§.269). Sit AC $= y$, erit CB $= a - y$; consequenter (§. 327 *Geom.*)

$$AC : CD = CD : CB$$

(§.417 *Geom.*) $\quad y : \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}x^2} : a - y$

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 \qquad ay - y^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$x^2 = y^2 + \tfrac{1}{3}x^2 \qquad ay - \tfrac{2}{3}x^2 = \tfrac{1}{3}x^2$$
$$\tfrac{2}{3}x^2 = y^2 \qquad ay = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = y \qquad a\sqrt{\tfrac{2}{3}x^2} = x^2$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 x^2 = x^4$$
$$\tfrac{2}{3}a^2 = x^2$$
$$\sqrt{\tfrac{2}{3}a^2} = x$$

Est ergo $x^2 : a^2 = 2 : 3$.

Theorema. Quadratum lateris Tetraëdri est ad quadratum diametri Sphæræ, cui inscribi potest, in ratione subsesquialtera.

COROL-

COROLLARIUM I.

300. Est ergo latus Tetraëdri ad diametrum Sphæræ, cui inscribitur, ut $\sqrt{2}$ ad $\sqrt{3}$, consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. *Fig.*27. 301. Porro quoniam $y^2 = \frac{2}{3}x^2 = \frac{2}{3}ay$, erit $y = \frac{2}{3}a$. Patet adeo Tetraëdrum sphæræ inscribi, si diameter AB in tres partes æquales dividatur, fiatque $AC = \frac{2}{3}$ AB.

PROBLEMA CXLII.

Tab.II. *Fig.*28. 302. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Cubi seu Hexaëdri ipsi inscribendi* FG.

Sit diameter Sphæræ, quæ diagonali Cubi FH æquatur, $= a$, latus Cubi $= x$; erit (§. 417 *Geom.*) $FI^2 = 2x^2$, & $FH^2 = 3x^2$; consequenter

$$3x^2 = a^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3}a^2$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2}$$

Theorema. Quadratum lateris Hexaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subtripla.

COROLLARIUM I.

303. Est ergo latus Hexaëdri ad diametrum Sphæræ cui inscribitur, ut 1 ad $\sqrt{3}$; consequenter huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

Tab.II. *Fig.*27. 304. Sit in diametro Sphæræ $AC = \frac{2}{3}a$, & $CB = \frac{1}{3}a$; erit $AD = \sqrt{\frac{2}{9}a^2}$; consequenter $DB = \sqrt{\frac{1}{3}a^2}$, seu latus Hexaëdri.

PROBLEMA CXLIII.

Tab.II. *Fig.*29. 305. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Octaëdri inscripti* ML.

Sit $LM = x$, diameter Sphæræ circumscriptæ $HL = b$. Quoniam ML quadrantem subtendit (§. 342, 475 *Geom.*); erit (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{2}{4}bb \text{ seu } \tfrac{1}{2}bb = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = x$$

Theorema. Quadratum lateris Octaëdri est ad quadratum diametri Sphæræ circumscriptæ in ratione subdupla.

COROLLARIUM I.

306. Est ergo latus Octaëdri ML ad diametrum Sphæræ circumscriptæ ut 1 ad $\sqrt{2}$; adeoque huic incommensurabile.

COROLLARIUM II.

307. Si ex centro Sphæræ E erigatur perpendicularis EF, erit $FA = \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$, adeoque latus Octaëdri inscribendi; id quod in ipso calculo supposuimus, in futuros tamen usus sigillatim enunciandum. Tab.II. *Fig.*27.

PROBLEMA CXLIV.

308. *Data diametro Sphæræ; invenire latus Dodecaëdri* AB. Tab.II. *Fig.*30.

Quoniam puncta A, C, F, H sunt in Sphæra: planum per ea transiens est circulus, ut inferius in Sphæricis independenter a Dodecaëdro demonstrabitur. Quoniam anguli B, M, G & L, itemque latera AB, BC, CM, MF, FG, GH, HL & LA inter se æquantur (§. 475, 106 *Geom.*); AC = CF = HF = HA (§. 179 *Geom.*) adeoque AHFC Quadratum (§. 342 & 98 *Geom.*). Jam cum Pentagona 12 in 36 triangula resolvantur per lineas diagonales, quadratum vero AHFC nonnisi 6 subtendat; omnia ista triangula a sex quadratis subtendantur necesse est; consequenter diagonalis AC est lateri Hexaëdri sive Cubi eidem Sphæræ inscripti æqualis (§. 460 *Geom.*).

Sit latus Dodecaëdri $AB = x$, diameter Sphæræ $= d$, erit $AC = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ (§. 302), consequenter

 AC:

Tab.II. Fig.30.

$$AC : AB = AB : AC - AB$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} : x = x : \sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} - x \quad (\S.294).$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 - x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x^2$$

$$\tfrac{1}{3}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2}$$

$$\tfrac{1}{12}d^2 \qquad\qquad \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\tfrac{5}{12}d^2 = x^2 + x\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} + \tfrac{1}{12}d^2$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} = x + \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{5}{12}d^2} - \sqrt{\tfrac{1}{12}d^2} = x$$

h. e. $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}d^2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}d^2} = x$.

Æquatio altera hoc ſuppeditat

Theorema. Quadratum diametri Sphæræ æquatur rectangulo ex aggregato lateris Dodecaëdri & Hexaëdri eidem inſcriptorum in triplum latus Dodecaëdri.

COROLLARIUM I.

309. Si diameter Sphæræ fuerit 1, erit latus Dodecaëdri inſcripti $\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; conſequenter illa ad hoc, ut 2 ad $\sqrt{\tfrac{5}{3}} - \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, & quadratum illius ad quadratum hujus ut 6 ad $3 - \sqrt{5}$. Eſt ergo diameter Sphæræ lateri Dodecaëdri inſcripti tum in ſe, tum potentia incommenſurabilis.

COROLLARIUM II.

Tab.II. Fig.27. 310. Latus Dodecaëdri eſt portio major BG lateris Hexaëdri DB eidem Sphæræ inſcripti media & extrema ratione ſecti in G (§. 258).

PROBLEMA CXLV.

Tab.II. Fig.31. 311. *Data diametro Sphæræ* HM; *invenire latus Icoſaëdri inſcripti.*

Sit ABCDEA circulus ſubtendens angulum ſolidum Icoſaëdri H; erit latus Icoſaëdri æquale lateri Pentagoni AB huic circulo inſcripti (§. 475 *Geom.*). Concipiatur eidem circulo inſcriptum Decagonum regulare DKEFA &c. & alterum circulo alii, qui iſti parallelus & ab eo diſtat intervallo radii CG; erit DN = DC (§. 279). Quodſi ergo anguli Pentagonorum lineis tranſverſis DN, DI, EI &c. connectantur; decem prodibunt triangula æquilatera juncta decem aliis, quorum quinque a circulo ſuperiore, quinque ab inferiore ſubtenduntur. Tab.II. Fig.31.

Sit HM $= b$, HC $= x$, GC $= y$. Quoniam GC eſt latus Hexagoni; erit HG latus Decagoni (§. 279) adeoque $= \sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - \tfrac{1}{2}y$, (§. 275). Habemus ergo

$$2HG + BC = HM \qquad HC^2 = HG^2 + GE^2$$

$$2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} - y + y = b \qquad x^2 = y^2 + \tfrac{5}{4}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} + \tfrac{1}{4}y^2$$

$$\text{h. e. } 2\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2} = b$$

$$5y^2 = b^2 \qquad x^2 = \tfrac{5}{2}y^2 - y\sqrt{\tfrac{5}{4}y^2}$$

$$y^2 = \tfrac{1}{5}b^2 \qquad x^2 = \tfrac{1}{2}b^2 - \sqrt{\tfrac{1}{20}b^4}$$

$$\text{ſeu } \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{5}b^2} = b : \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})}$$

Constructio. Fiat AH $=$ AB $= b$, erit EH $= \sqrt{\tfrac{5}{4}b^2}$ (§. 417 *Geom.*) & ob EH : AH = EK : IK, hoc eſt, $\tfrac{1}{2}b\sqrt{5} : b = \tfrac{1}{2}b : \frac{b}{\sqrt{5}}$ (§. 268 *Geom.*) IK $= b : \sqrt{5}$. Eſt ergo IK radius circuli, cui Pentagonum Icoſaëdri inſcribitur. Porro EI $= b : 2\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$ (§. *cit. Geom.*) & hinc AI $= \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2}$. Unde tandem AK $= \sqrt{(\tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}b\sqrt{\tfrac{1}{5}b^2})} = x$ (§. 330 *Geom.*). Tab.II. Fig.27.

COROLLARIUM I.

312. Quoniam $5y^2 = b^2$; quadratum diametri Sphæræ eſt in ratione quintupla ad quadratum radii circuli angulum ſolidum Icoſaëdri ſubtendentis.

COROLLARIUM II.

313. Liquet etiam, latus Icoſaëdri diametro Sphæræ circumſcriptæ tum in ſe, tum potentia incommenſurabile eſſe.

SCHO-

SCHOLION I.

314. *Si diameter Sphæræ fuerit* 100000 *erit* (§. 299, 305, 302, 311, 308) *latus Tetraëdri inscripti* 81649, *Octaëdri* 70710, *Hexaëdri* 57736, *Icosaëdri* 52573, *Dodecaëdri* 35682 (*a*).

SCHOLION II.

315. *Cum ex diametro Sphæræ corporibus regularibus circumscriptæ invenire possimus latera eorum; non difficile foret, inde ulterius elicere tum superficies, tum soliditates eorundem, easque tum inter se, tum cum Quadrato & Cubo diametri Sphæræ conferre: sed quoniam hæc doctrina rarissimi est usus, eam prætermittendam esse judicamus.*

CAPUT IV.

De Algebra ad Trigonometriam planam applicata.

PROBLEMA CXLVI.

316. *Datis basi* HI *trianguli cujuscunque, & angulis ad basin* H *&* I; *invenire altitudinem.*

Tab.II. Fig.21. n. 1. Sit $HI = a$, $LM = x$, sinus anguli $MIL = s$, ejus cosinus $= c$; sinus anguli $LHM = p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§.33 *Trigon.*) $s : x = c : MI$ & $p : x = q : HM$. Unde reperitur $MI = cx : s$ & $HM = qx : p$ (§.302 *Arithm.*). Quare (§.87 *Arithm.*).

$$cx : s + qx : p = a \quad (sp)$$
$$pcx + sqx = asp \quad (pc + sq)$$
$$x = asp : (pc + sq).$$

Æquatio penultima in hanc analogiam

$$pc + sq : sp = a : x$$

resoluta sequens exhibet

Theorema. In omni triangulo HIL basis HI est ad altitudinem ML, ut summa rectangulorum ex sinu anguli obliqui ad basin unius in cosinum alterius se habet ad rectangulum ex sinibus angulorum ad basin.

(*a*) HERIGONIUS *Curs. Mathem.* Tom. I. p. 779.

Aliter.

Sumatur ML pro sinu toto, erunt HM & MI tangentes angulorum HLM & MLI, seu cotangentes datorum H & I. Sint sinus totus $= t$, cotangentes $= m$ & n, $LM = x$, $HI = a$; erit $t : m = x : HM$, & $t : n = x : MI$ (§. 40 *Trigon.*); consequenter $HM = mx : t$, $MI = nx : t$, adeoque (§. 87 *Arithm.*). Tab.II. Fig.21. n. 1.

$$a = (mx + nx) : t \quad (t)$$
$$at = mx + nx \quad (m + n)$$
$$at : (m + n) = x$$

Theorema. Basis trianguli est ad altitudinem ut summa cotangentium angulorum ad basin ad sinum totum.

PROBLEMA CXLVII.

317. *Datis summa crurum* HL + LI, *una cum angulis ad basin* H *&* I; *invenire crura* HL *&* LI.

Sit $HL + LI = a$, sinus $H = m$, sinus $I = n$, $HL = x$, erit $IL = a - x$. Quare (§.33 *Trigon.*).

$x : n$

Tab.II. *Fig.* 21. n. 1.

$$x : n = a - x : m$$
$$mx = na - nx$$
$$mx + nx = na \quad m+n \text{ div.}$$
$$x = na : (m+n)$$
$$a - x = (ma + na - na) : (m+n) = ma : (m+n)$$

Theorema. Summa crurum trianguli HL + LI est ad crus unum HL ut summa sinuum angulorum ad basin H & I ad sinum anguli I cruri isti HL oppositum.

PROBLEMA CXLVIII.

318. *Datis angulis ad basin* H *&* I, *una cum segmento baseos uno* HM; *invenire segmentum alterum* MI.

Sit HM $= a$, MI $= x$, sinus anguli H $= m$, ejus cosinus $= n$; sinus anguli I $= p$, ejus cosinus $= q$. Erit (§. 33 *Trigon.*) $n : a = m$: ML. Reperitur adeo ML $= am : n$. Porro, *vi* § *cit.* $q : x = p$: ML. Reperitur itaque ML $= px : q$. Quare (§. 81 *Arithm.*),

$$px : q = am : n \quad nq$$
$$pnx = amq \quad pn$$
$$x = amq : pn$$

Est adeo $pn : mq = a : x$.

Theorema. Si ex vertice trianguli L in basin HI perpendiculum demittitur; segmentum unum HM est ad alterum MI ut rectangulum ex sinu anguli segmento MI adjacentis in cosinum anguli segmento HM adjacentis ad rectangulum ex sinu anguli H in cosinum anguli I.

PROBLEMA CXLIX.

Tab.I. *Fig.* 3. 319. *Datis area trianguli rectanguli* ABC, *una cum angulo* C; *invenire crura* AB *&* BC.

Sit area $= b^2$ BC $= x$

Sinus totus $= r$, erit BA $= 2b^2 : x$ (§. 394 *Geom.*)

Tangens anguli C $= t$

Quare (§. 40 *Trigon.*) Tab.I. *Fig.* 3.

$$x : \frac{2b^2}{x} = r : t$$
$$x^2 : 2b^2 = r : t$$
$$x^2 = 2rb^2 : t$$
$$x = \sqrt{(2rb^2 : t)}$$

Theorema: Area trianguli rectanguli est ad quadratum cruris unius BC ut tangens dimidia anguli adjacentis C ad sinum totum.

Constructio: Intra crura anguli dati ADM erigatur perpendicularis FE, puncto E pro lubitu assumto, erit DE $= r$ & FE $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Fiat DG = FE, DH $= b$, & agatur ipsi EG parallela HI: erit DI $= br : t$ (§. 271 *Geom.*). Fiat MI $= 2b$ & quaeratur inter MI & DI media proportionalis IK (§. 327 *Geom.*), quae erit crus unum. Dividatur MI bifariam in L & fiat IN = LI, ducaturque NO ipsi MK parallela, erit IO $= 2b^2 : x$ (§. 271 *Geom.*), adeoque crus alterum, consequenter KOI, triangulum quaesitum. Tab.II. *Fig.* 32.

Aliter. Sit EDA angulus datus. Fiat DA $= 2b$ & erigatur AE perpendicularis ad DA: erit simul DA $= r$ & AE $= t$ (§. 7 *Trigon.*). Producatur EA in infinitum, & in D erigatur ad ED perpendicularis DG, erit AG $= \frac{2br}{t}$ (§. 327 *Geom.*). Fiat AH = AG, & AI $= \frac{1}{2}$ AD $= b$, erit, descripto super IH semicirculo, AL $= \sqrt{\frac{2b^2r}{t}}$. Fiat denique AB = AL, & ducatur BC cruri anguli dati DE parallela; erit triangulum BAC quaesitum. Tab. XII. *Fig.* 117.

PROBLEMA CL.

320. *Data subtensa arcus* AB *quadrante minoris, una cum radio circuli* CE; *invenire subtensam* CB *arcus compositi ex arcu* AB *&* *ejus complemento dimidio ad semicirculum.* Tab. III. *Fig.* 33.

Applicetur AB diametro CD parallela & fiat DF = AB, ducanturque rec-

Tab. III. Fig. 33. rectæ EB, AD & BF. Quoniam $x = o$ (§. 315 *Geom.*), & ob parallelismum linearum AD & BF (§. 257 *Geom.*) $x = y$ (§. 233 *Geom.*); erit $o = y$ (§. 87 *Arithm.*). Est vero etiam, ob CE=EB (§. 40 *Geom.*) $u = o$ (§. 184 *Geom.*) $= y$; consequenter CF : CB = CB : CE (§. 267 *Geom.*). Sit jam AB = a, CE = r, CB = x; erit CF = $a + 2r$; consequenter

$$a + 2r : x = x : r$$
$$ar + 2r^2 = x^2$$
$$\sqrt{(ar + 2r^2)} = x$$

COROLLARIUM I.

321. Cum angulus CBD sit rectus (§. 317 *Geom.*); erit $BD^2 = 4r^2 - ar - 2r^2 = 2r^2 - ar$ (§. 417 *Geom.*); consequenter BD subtensa dimidii complementi ad semicirculum arcus AB $= \sqrt{(2r^2 - ar)}$.

COROLLARIUM II.

322. Quadratum ergo chordæ DB arcum quadrante minorem subtendentis æquatur rectangulo ex radio CE in differentiam chordæ diametro parallelæ ex puncto B ductæ AB a diametro CD.

COROLLARIUM III.

323. Quadrata chordarum CB & BD, quæ ambæ simul semicirculum subtendunt, sunt inter se ut $2r^2 + ar$ ad $2r^2 - ar$ (§. 320, 321), hoc est, ut $2r + a$ ad $2r - a$ (§. 181 *Arithm.*), hoc est, ut aggregatum ex diametro CD & chorda AB ex puncto concursus B eidem parallela ducta, ad differentiam hujus chordæ a diametro.

PROBLEMA CLI.

Tab. II. Fig. 34. 324. *Datis in quadrilatero circulo inscripto lateribus* AE, EB, BC *&* AC, *una cum diagonali* EC; *invenire diagonalem* AB.

Sit AE = a, EB = b, BC = c, AC = d, EC = f, AB = y. Ducatur EF, ita ut sit $o = x$ (§. 208 *Geom.*). Quoniam præterea ACE = ABE (§. 315 *Geom.*); erit EC : AC = EB : BF, hoc est, $f : d = b$: BF (§. 267 *Geom.*). Reperitur ergo BF = $bd : f$. Quoniam porro EAB = ECB (§. 315 *Geom.*), & AEF = CEB (§. 88 *Arithm.*); erit EC (f) : CB (c) = EA (a) : AF ($ac : f$) (§. 267 *Geom.*). Quare (§. 86 *Arithm.*).

$$(bd + ac) : f = y$$
$$bd + ac = fy$$

Theorema. In quadrilatero circulo inscripto AEBC rectangulum ex diagoniis EC & AB æquatur rectangulis ex lateribus oppositis EB in AC & EA in BC.

PROBLEMA CLII.

325. *Dato sinu anguli simpli, invenire sinus & cosinus angulorum multiplorum.*

Sit angulus quicunque A, fiat AB = BD = DF = FH = HL = LM = MP = PQ = QT = TV: erit A = ADB (§. 184 *Geom.*), EBD = A + ADB (§. 239 *Geom.*) = 2A, *per demonstr.* Eodem modo ostenditur, esse FDH = A + DFA = 3A; HFL = A + AHF = 4A; LHK A + ALH = 5A; PLM = A + AML = 6A &c. Demittantur perpendiculares BC, DE, FG, IH, LK, MN &c. Quodsi AB sumatur pro sinu toto; erit BC sinus, AC cosinus anguli simpli A; ED sinus, BE cosinus anguli dupli; FG sinus, DG cosinus anguli tripli, &c. (§. 2, 11 *Trigon.*). Tab. III. Fig. 35.

Sit AB = r, BC = b, AC = a, crit, ob angulum A utrique △△ BAC

& EAD communem, & rectos ad C & E æquales (§. 267 *Geom.*):

$$AB : BC = AD : DE$$

$$r : b = 2a : \frac{2ab}{r}$$

$$AB : AC = AD : AE$$

$$r : a = 2a : \frac{2a^2}{r}$$

Ergo $BE = AE - AB = 2a^2 : r - r = (2a^2 - r^2) : r$. Est vero $r^2 = a^2 + b^2$ (§. 417 *Geom.*). Ergo $BE = (2a^2 - a^2 - b^2) : r = (a^2 - b^2) : r$ & $AF = AE + EF = (3a^2 - b^2) : r$.

$$AB : BC = AF : FG \text{ (§. 268 Geom.)}$$

$$r : b = \frac{3a^2-b^2}{r} : \frac{3ab^2-b^3}{r^2}$$

$$AB : AC = AF : AG$$

$$r : a = \frac{3a^2-b^2}{r} : \frac{3a^3-ab^2}{r^2}$$

Ergo $DG = AG - AD = (3a^3 - ab^2) : r^2 - 2a = (3a^3 - ab^2 - 2ar^2) : r^2 =$ (substituto valore ipsius $r^2 = a^2 + b^2$), $(a^3 - 3ab^2) : r^2$; consequenter $AH = AG + GH = (4a^3 - 4ab^2) : r^2$

$$AB : BC = AH : HI$$

$$r : b = \frac{4a^3-4ab^2}{r^2} : \frac{4a^3b-4ab^3}{r^3}$$

$$AB : AC = AH : AI$$

$$r : a = \frac{4a^3-4ab^2}{r^2} : \frac{4a^4-4a^2b^2}{r^3}$$

Quia $FA = (3a^2 - b^2) : r = (3a^2 - b^2)r^2 : r^3 = (3a^2 - b^2)(a^2 + b^2) : r^3 = (3a^4 + 2a^2b^2 - b^4) : r^3$ ideo erit $FI = AI - AF = (a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$.

Eodem prorsus modo reperitur

$KL = (5a^4b - 10a^2b^3 + b^5) : r^4$

& $HK = (a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$;

$MN = (6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^5) : r^5$

& $LN = (a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$;

$PO = (7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7) : r^6$

& $QR = (a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

Si itaque radius seu sinus totus $= r$, erit sinus anguli

simpli b

dupli $2ba : r$

tripli $(3ba^2 - b^3) : r^2$

quadrupli $(4ba^3 - 4b^3a) : r^3$

quintupli $(5ba^4 - 10b^3a^2 + b^5) : r^4$

sextupli $(6ba^5 - 20b^3a^3 + 6b^5a) : r^5$

septupli $(7ba^6 - 35b^3a^4 + 21b^5a^2 - b^7) : r^6$

&c.

Hinc patet lex progressionis in infinitum. Componitur nimirum formula pro sinu anguli multipli ex termino secundo, quarto, sexto, octavo &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad eam dignitatem evecti, cujus exponens idem est cum exponente multipli, signis + & — alternantibus (§. 95).

Hinc formula generalis in casu indefinito emergit

$$\frac{m}{1 . r^{m-1}} ba^{m-1} - \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3 . r^{m-1}} b^3a^{m-3} + \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . r^{m-1}} b^5a^{m-5} - \frac{m . m-1 . m-2 . m-3 . m-4 . m-5 . m-6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . r^{m-1}} b^7a^{m-7} \text{ \&c.}$$

Similiter si sinus totus $= r$, erit cosinus anguli

simpli a

dupli $(a^2 - b^2) : r$

tripli $(a^3 - 3ab^2) : r^2$

quadrupli $(a^4 - 6a^2b^2 + b^4) : r^3$

quintupli $(a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4) : r^4$

sextupli $(a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6) : r^5$

septupli $(a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6) : r^6$

&c.

Unde denuo patet lex progressionis in infinitum. Nimirum formulæ componuntur ex terminis primo, tertio, quinto, septimo, nono &c. binomii ex cosinu a & sinu anguli simpli b compositi ad

eam

eam dignitatem evecti, cujus exponens est idem cum exponente multipli anguli desiderati, signis + & — alternantibus (§. 95). Erit ergo formula generalis in casu indefinito

$$\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2}$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4.r^{m-1}}b^4a^{m-4}$$

$$- \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.2.3.4.5.6.r^{m-1}}b^6a^{m-6} +$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6.m-7}{1.2.3.4.5.6.7.8.r^{m-1}}b^8a^{m-8}$$

&c. Quoniam $b^2 = r^2 - a^2$ (§. 16 *Trig.*) & ipsius b^2 potentiæ sunt etiam rationales; substituto hoc valore, sive in formula generali, sive in specialibus, prodit cosinus anguli multipli per solum cosinum simpli & radium determinatus. Ita reperietur cosinus anguli

dupli, $\frac{a^2-b^2}{r} = \frac{a^2-r^2+a^2}{r} = \frac{2a^2}{r} - r$

tripli, $\frac{a^3-3ar^2+3a^3}{r^2} = \frac{4a^3}{r^2} - 3a$

quadrup. $\frac{a^4-6a^2r^2+6a^4+r^4-2a^2r^2+a^4}{r^3}$

$$= \frac{8a^4}{r^3} - \frac{8a^2}{r} + r$$

quint. $\frac{a^5-10a^3r^2+10a^5+5ar^4-10a^3r^2+5a^5}{r^4}$

$$= \frac{16a^5}{r^4} - \frac{20a^3}{r^2} + 5a.$$

Similiter ex sinuum formula excluditur cosinus, si valor ipsius $a = \sqrt{(r^2-b^2)}$ substituitur: quamvis ea non sit ab irrationalitate libera.

COROLLARIUM

326. Cum sinus sit chordæ dimidium (§. 2 *Trigon.*), si chorda arcus simpli dicatur b, & chorda ejus complementi ad quadrantem a, & diameter r; per easdem formulas chordæ arcuum multiplorum determinantur. Quoniam vero data chorda datur etiam arcus; per easdem formulas arcus per datum numerum multiplicari potest.

PROBLEMA CLIII.

327. *Data tangente arcus simpli, invenire tangentem arcus multipli.*

Cum sit ut cosinus $\frac{a^m}{r^{m-1}} - \frac{m.m-1}{1.2.r^{m-1}}b^2a^{m-2}$ + &c. ad sin. $\frac{m}{r^{m-1}}ba^{m-1} - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.r^{m-1}}b^3a^{m-3}$ &c. ita radius r ad tangentem (§. 26 *Trigon.*); erit tangens (assumtis ad abbreviandum calculum pro coëfficientibus cosinuum A, B, C, D, E, pro coëfficientibus sinuum P, Q, R, S, T, excluso tamen in divisoribus r^{m-1}) =

$$\frac{Prba^{m-1} - Qrb^3a^{m-3} + Rrb^5a^{m-5} - Srb^7a^{m-7}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6}} \text{ \&c.}$$

Sit tangens anguli simpli t, erit (§. *cit.* *Trigon.*) $a : b = r : t$, consequenter $a = br : t$. Quodsi hic valor in locum ipsius a substituatur, prodit formula tangentis

$$\frac{\frac{Pb^mr^m}{t^{m-1}} - \frac{Qb^mr^{m-2}}{t^{m-3}} + \frac{Rb^mr^{m-4}}{t^{m-5}} - \frac{Sb^mr^{m-6}}{t^{m-7}}}{\frac{b^mr^m}{t^m} - \frac{Ab^mr^{m-2}}{t^{m-2}} + \frac{Bb^mr^{m-4}}{t^{m-4}} - \frac{Cb^mr^{m-6}}{t^{m-6}}} \text{ \&c.}$$

Quodsi ulterius hæc formula dividatur per b^m & multiplicetur per t^m, prodibit tangens indefinita

$$\frac{Pr^mt - Qr^{m-2}t^3 + Rr^{m-4}t^5 - Sr^{m-6}t^7}{r^m - Ar^{m-2}t^2 + Br^{m-4}t^4 - Cr^{m-6}t^6} \text{ \&c.}$$

Substitutis tandem valoribus P, Q, R, S & A, B, C, &c. tangentium formula erit

$$\left(\frac{m}{1}r^mt - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}r^{m-2}t^3 + \right.$$

$$\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}r^{m-4}t^5 -$$

$$\left.\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5.m-6}{1.2.3.4.5.6.7}r^{m-6}t^7 \text{ \&c.}\right)$$

 :(r^m

$:\left(r^m - \frac{m.m-1}{1.\ 2} r^{m-2}t^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\ 2.\ 3} r^{m-4}t^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4.m-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} r^{m-6}t^6 \ \&c.\right)$

Apparet adeo, ſi binomium ex radio & tangente $r + t$ ad dignitatem indeterminatam elevetur (§. 95), fractionis, quæ tangentem indefinitam exprimit, denominatorem componi ex terminis imparibus, numeratorem vero ex terminis paribus, ſed per radium multiplicatis & utrobique ſignis + atque — alternantibus.

PROBLEMA CLIV.

328. *Data ſecante arcus ſimpli, invenire ſecantem multipli.*

Quoniam ſecans eſt tertia proportionalis ad coſinum & radium (§. 26 *Trigon.*), erit (§. 325) aſſumtis pro coëfficientibus coſinus (excluſo tamen in diviſoribus r^{m-1}) A, B, C, D &c. ſecans indeterminata.

$$\frac{r^{m+1}}{a^m - Ab^2a^{m-2} + Bb^4a^{m-4} - Cb^6a^{m-6} \ \&c.}$$

Eſt vero $r : b = s : t$ (§. *cit. Trig.*): unde eruitur $r = bs : t$. Hoc valore in formula ſecantis ſubſtituto, mutatur ea in ſequentem:

$$\frac{rb^m s^m}{a^m t^m - Ab^2a^{m-2}t^m + Bb^4a^{m-4}t^m \ \&c.}$$

Porro $a : b = r : t$ (§. *cit. Trigon.*), adeoque $a = br . t$. Subſtituto itaque valore ipſius a in formula proxime præcedente; prodibit

$$\frac{rb^m s^m}{b^m r^m - Ab^m r^{m-2}t^2 + Bb^m r^{m-4}t^4 \ \&c.}$$

Si tandem hæc formula dividatur per rb^m, determinabitur valor ſecantis indefinitæ ex tangente & ſecante anguli ſimpli

$$\frac{s^m}{r^{m-1} - Ar^{m-3}t^2 + Br^{m-5}t^4 - Cr^{m-7}t^6} \ \&c.$$

CAPUT V.

De Extractione Radicum ex Æquationibus altioribus.

PROBLEMA CLV.

329. *Explicare naturam æquationum.*

1. Aſſumantur tot valores quantitatis incognitæ, quot libuerit; formenturque inde ſimplices æquationes, ſed nihilo æquales.
2. Æquationes ſimplices in ſe invicem ducantur; ita prodibunt æquationes altiores, quarum conſideratio earum proprietates manifeſtabit.

Sit	$x = 2$	$x = a$
	$x = -3$	$x = -b$
	$x = 4$	$x = c$
erit	$x - 2 = 0$. I	$x - a = 0$
	$x + 3 = 0$. II	$x + b = 0$
	$x - 4 = 0$. III	$x - c = 0$

Multiplicetur primo æquatio I per æquationem II, & factum denuo per æquationem III.

$x-2$

$$
\begin{array}{ll}
x - 2 = 0 & x - a = 0 \\
x + 3 = 0 & x + b = 0 \\
\hline
 + 3x - 6 & x^2 + bx - ab = 0 \\
x^2 - 2x & - ax \\
\hline
x^2 + x - 6 = 0 & x - c = 0 \\
x - 4 = 0 & \\
\hline
 - 4x^2 - 4x + 24 & x^3 - cx^2 - bcx + abc = 0 \\
x^3 + x^2 - 6x & + bx^2 + acx \\
\hline
x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0 & - ax^2 - abx
\end{array}
$$

Ad has æquationes attendens (quæ facile ad superiores gradus evehi possunt) sequentia observabit.

1. *Quantitatem cognitam secundi termini esse summam radicum, sed signo contrario affectarum; quantitatem cognitam tertii esse summam productorum ex singulis binis; quantitatem cognitam quarti esse summam productorum ex singulis ternis &c terminum denique ultimum esse factum omnium radicum.* Ex gr. in æquatione quadratica termini secundi quantitas cognita $1 = 3 - 2$. Radices vero sunt $+ 2$ & $- 3$. Similiter in cubica quantitas cognita secundi termini $- 3 = + 3 - 4 - 2$. Radices sunt $- 3$, $+ 4$ & $+ 2$. Quantitas cognita termini tertii in æquatione cubica $- 10 = - 6 + 8 - 12$. Radices sunt, $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$. In eadem terminus ultimus $+ 24 = 2 . 3 . 4$.
2. *Quamlibet æquationem tot habere radices quot quantitas incognita primi termini dimensiones, seu exponens unitates.* Ex. gr. in æquatione quadratica x^2 duas habet dimensiones: radices duæ sunt $+ 2$ & $- 3$. In æquatione cubica x^3 tres habet dimensiones, radices tres sunt $+ 2$, $- 3$ & $+ 4$.
3. *In qualibet æquatione tot esse radices veras, quot sunt signorum permutationes; tot esse falsas, quot eorundem successiones.* Ex. gr. in æquatione quadratica $+ x^2 + x - 6 = 0$, una est signorum successio $+ +$, una permutatio $+ -$. Æquatio vero habet radices duas, alteram veram $+ 2$, alteram falsam $- 3$. In æquatione cubica $+ x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duæ sunt signorum permutationes $+ -$ & $- +$; una successio $- -$. Radices vero tres habet, duas quidem veras $+ 2$ & $+ 4$, unam falsam $- 3$.

SCHOLION I.

330. *Theoremata duo priora ex ipsa æquationum genesi haud difficulter demonstrantur: tertium vero, quod* HARRIOTUS *per inductionem invenit, nemo hactenus demonstrare potuit.*

SCHOLION II.

331. *Ceterum non est, quod miremur, unam æquationem multas habere posse radices. Unius enim ejusdemque Problematis varii esse possunt casus & in singulis casibus ad eandem pervenitur æquationem: quemadmodum exempla in Quadraticis supra habuimus (§. 269, 262). Quoniam tamen casus quidam interdum impossibiles sunt; radices quoque impossibiles esse debent.*

COROLLARIUM.

332. Radices veræ mutantur in falsas & falsæ in veras, si signa terminorum alternorum mutentur. E. gr. æquatio $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ duas habet radices veras, unam falsam; sed si scribas $x^3 + 3x^2 - 10x - 24$, duæ sunt signorum successiones $+ +$ & $- -$, una vero permutatio $+ -$; adeoque æquatio duas radices falsas, veram unam habet.

 PRO-

Problema CLVI.

333. *Radicem æquationis augere vel minuere quantitate data.*

Sit æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$. Invenienda est æquatio alia, in qua radix $x + 3$.

$$\text{Fiat } x + 3 = y$$
$$\text{erit } x = y - 3$$
$$x^2 = y^2 - 6y + 9$$
$$x^3 = y^3 - 9y^2 + 27y - 27$$
$$-6x^2 = -6y^2 + 36y - 54$$
$$+13x = +13y - 39$$
$$-10 = -10$$
$$0 = y^3 - 15y^2 + 76y - 130$$

En æquationem novam, in qua $y = x + 3$!

Sit e contrario in æquatione modo inventa radix minuenda binario.

$$\text{Fiat } y - 2 = x$$
$$\text{erit } y = x + 2$$
$$y^2 = x^2 + 4x + 4$$
$$y^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$
$$-15y^2 = -15x^2 - 60x - 60$$
$$+76y = +76x + 152$$
$$-130 = -130$$
$$0 = x^3 - 9x^2 + 28x - 30$$

En æquationem novam, in qua $x = y - 2$!

Corollarium I.

334. Quodsi radicem augeas quantitate radice falsa maxima majore, radices falsæ evadunt veræ; & contra si radicem minuas quantitate radice vera maxima majore, veræ evadunt falsæ. Si enim $y = -4$, & fiat $y + 5 = x$; erit $x = 5 - 4 = 1$. Contra si $y = 3$ & fiat $y - 4 = x$; erit $3 - 4 = -1 = x$. Dum itaque radicem minuimus quantitate quadam data, facile accidit ut radices veræ in falsas mutentur.

Corollarium II.

335. Dum radices veræ augentur, falsæ minuuntur. Nam si $y = 3$ & $= -5$, fiatque $y + 4 = x$; erit $x = 3 + 4 = 7$ & $= 4 - 5 = -1$. Similiter si fiat $y - 2 = x$; erit $x = 3 - 2 = 1$ & $= -5 - 2 = -7$.

Problema CLVII.

336. *Radicem æquationis per quantitatem datam multiplicare.*

Sit ex. gr. radix æquationis $x^3 + px^2 + qx - r = 0$ multiplicanda per a.

$$\text{Fiat } ax = y$$
$$\text{erit } x = y : a$$
$$x^2 = y^2 : a^2$$
$$x^3 = y^3 : a^3$$
$$+px^2 = +py^2 : a^2$$
$$+qx = +qy : a$$
$$-r = -r$$
$$\frac{y^3}{a^3} + \frac{py^2}{a^2} + \frac{qy}{a} - r = 0$$
$$y^3 + apy^2 + a^2qy - a^3r = 0$$

En æquationem novam, in qua $y = ax$!

Corollarium I.

337. Hinc manifestum est, æquationem datam tantum multiplicari debere per progressionem geometricam, in qua terminus primus 1, denominator rationis quantitas per quam radix multiplicari jubetur. Sit ex. gr. in æquatione $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$ radix multiplicanda per 2. Ita ergo procedendum.

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$$
$$y^4 + 8y^3 - 76y^2 - 848y - 1920 = 0$$

En

En æquationem, in qua $y = 2x$!

Similiter fit radix æquationis $x^3 - 3x + 1 = 0$ multiplicanda per 3.

$$\begin{array}{l} x^3 * - 3x + 1 = 0 \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline y^3 * - 27y + 27 = 0 \end{array}$$

En æquationem, in qua $y = 3x$!

S C H O L I O N.

338. *Stellula repleri solent loca vacua, in quibus termini æquationis deficiunt.*

P R O B L E M A CLVIII.

339. *Radicem æquationis per quantitatem datam dividere.*

Sit æquationis $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ radix dividenda per a.

Fiat $x : a = y$

erit

$$\begin{array}{rcl} x & = & ay \\ x^2 & = & a^2y^2 \\ x^3 & = & a^3y^3 \\ -px^2 & = & -a^2py^2 \\ +qx & = & +aqy \\ -r & = & -r \\ \hline \multicolumn{3}{c}{a^3y^3 - a^2py^2 + aqy - r = 0} \\ \multicolumn{3}{c}{y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0} \end{array}$$

En æquationem novam, in qua $y = x : a$!

C O R O L L A R I U M.

340. Apparet adeo, non alia re opus esse, quam ut æquatio data dividatur per progressionem geometricam, cujus terminus primus 1, denominator rationis quantitas, per quam radix dividenda. Sit ex.gr. radix æquationis $x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0$ dividenda per 2. Ita igitur procedendum:

$$\begin{array}{l} x^4 + 8x^3 - 76x^2 - 848x - 1920 = 0 \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \\ \hline y^4 + 4y^3 - 19y^2 - 106y - 120 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{2}x$.

Similiter si radix æquationis $x^3 * - 36x - 54 = 0$ dividatur per 3; erit

$$\begin{array}{l} x^3 * - 36x - 54 = 0 \\ 1 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \\ \hline y^3 * - 4y - 2 = 0 \end{array}$$

In hac æquatione $y = \frac{1}{3}x$.

P R O B L E M A CLIX.

341. *Complere æquationem, in qua termini quidam deficiunt.*

Radix æquationis augenda est quantitate data.

Sit e.gr. æquatio $x^3 * - 23x - 70 = 0$.

Fiat $x + 1 = y$

erit

$$\begin{array}{rcl} x & = & y - 1 \\ x^2 & = & y^2 - 2y + 1 \\ \hline x^3 & = & y^3 - 3y^2 + 3y - 1 \\ -23x & = & -23y + 23 \\ -70 & = & -70 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{y^3 - 3y^2 - 20y - 48 = 0.} \end{array}$$

Habetur hic æquatio completa, in qua $y = x + 1$.

S C H O L I O N.

342. *Idem Problema solvi potest radicem æquationis quantitate data minuendo: sed cum hac ratione metuendum sit, ne radices veræ in falsas mutentur* (§. 334) *consultius est, ut radicem æquationis augeamus.*

P R O B L E M A CLX.

343. *Secundum terminum ex æquatione tollere.*

Sit in æquatione $x^3 \mp px^2 - qx + r = 0$ tollendus secundus terminus px^2.

Fiat

Fiat $x + t = y$

erit $x = y - t$

$$x^2 = y^2 - 2ty + t^2$$

$$x^3 = y^3 - 3ty^2 + 3t^2y - t^3$$
$$\mp px^2 = \mp py^2 \pm 2pty \mp pt^2$$
$$-qx = \quad -qy + qt$$
$$+r = \quad +r$$

Ut secundus terminus tollatur, si fuerit $-px^2$ fieri debet,

$$-3t - p = 0$$

Unde erit $-3t = p$

$$t = -\tfrac{1}{3}p$$

Quodsi fuerit $+px^2$, erit

$$-3t + p = 0$$
$$-3t = -p$$
$$t = +\tfrac{1}{3}p$$

Et in genere, si fuerit $x^m \mp px^{m-1}$ &c. & fiat $x = y - t$, erit

$$x^m = y^m - mty^{m-1} \text{ \&c.}$$
$$\mp px^{m-1} = \mp py^{m-1} \text{ \&c.}$$

consequenter in casu primo

$$-mt - p = 0$$
$$-mt = p$$
$$t = -p : m$$

in casu autem altero

$$-mt + p = 0$$
$$-mt = -p$$
$$t = p : m$$

Unde patet

Regula: Si terminus secundus sit positivus, augeatur; si privativus, minuatur radix quantitate cognita secundi termini per exponentem primi divisa.

Sit ex. gr. ex æquatione $x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$ tollendus secundus terminus.

Fiat $x - 8 : 3 = y$

erit $x = y + 8 : 3$

$$x^2 = y^2 + 16y : 3 + 64 : 9$$

$$x^3 = y^3 + 8y^2 + 64y : 3 + 512 : 27$$
$$-8x^2 = -8y^2 - 128y : 3 - 512 : 9$$
$$-x = \quad -y \quad -8 : 3$$
$$8 = \quad +8$$

$$y^3 * -67y : 3 - 880 : 27 = 0$$

In hac æquatione $y = x - 8 : 3$.

COROLLARIUM I.

344. Quodsi ex æquatione quadratica affecta secundus terminus aufertur, ad puram reducitur, sicque ea alio adhuc modo resolvi potest. Si ex. gr. $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Fiat $x - 4 = y$

erit $x = y + 4$

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = -8y - 32$$
$$+15 = \quad +15$$

$$y^2 - 1 = 0$$
$$y = 1$$

Consequenter $x = 1 + 4 = 5$.

COROLLARIUM II.

345. Secundo termino sublato, æquationes cubicæ ad tres casus reducuntur. Nimirum

$$x^3 * -px - r = 0$$
$$x^3 * +px - r = 0$$
$$x^3 * -px + r = 0$$

PRO-

PROBLEMA CLXI.

346. *Ex æquatione terminum tertium tollere.*

Si in æquatione $x^3 - 4x^2 + 4x - 6 = 0$

Fiat $x = y - m$

erit $x^2 = y^2 - 2my + m^2$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 - 3my^2 + 3m^2y - m^3 \\ -4x^2 &= \quad\; -4y^2 \;\; +8my - 4m^2 \\ +4x &= \qquad\qquad\quad +4y - 4m \\ -6 &= \qquad\qquad\qquad\quad -6 \end{aligned}$$

Quoniam æquatio finistra dextræ æqualis; si tertius terminus deficere debet, talis assumendus est valor ipsius m, ut sit

$$3m^2 + 8m + 4 = 0$$

erit ergo $m^2 + \frac{8}{3}m = -\frac{4}{3}$

$$\frac{16}{9} \qquad \frac{16}{9}$$

$$m^2 + \frac{8}{3}m + \frac{16}{9} = \frac{4}{9}$$

$$m + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m = -\frac{2}{3}$$

Fiat ergo $x = y + \frac{2}{3}$

erit $x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}$

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 2y^2 + \tfrac{4}{3}y + \tfrac{8}{27} \\ -4x^2 &= -4y^2 - \tfrac{16}{3}y - \tfrac{16}{9} \\ +4x &= \qquad +4y + \tfrac{8}{3} \\ -6 &= \qquad\qquad -6 \end{aligned}$$

$$y^3 - 2y^2 * -130:27 = 0.$$

En æquationem, in qua terminus tertius deficit, & $y = x - \frac{2}{3}$.

SCHOLION.

347. *Eodem artificio in aliis quoque casibus utemur. Sed terminus quartus, quintus &c. hac methodo tolli nequeunt, quia radices altiores extrahendæ forent.*

PROBLEMA CLXII.

348. *Ex æquatione terminum penultimum tollere, si secundus deficiat.*

Pro quantitate incognita substituendus est terminus ultimus per y divisus.

Sit ex. gr. in æquatione $x^3 - 3x + 1 = 0$ tollendus terminus penultimus $-3x$. Operatio talis erit

$$\begin{aligned} x^3 &= \frac{1}{y^3} \\ -3x &= -\frac{3}{y} \\ +1 &= +1 \end{aligned}$$

$$1 - \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} = 0$$

$$y^3 - 3y^2 + 1 = 0$$

PROBLEMA CLXIII.

349. *Æquationem datam a fractionibus liberare.*

Radix multiplicetur per factum ex omnibus denominatoribus fractionum occurrentium, aut per numerum, qui omnes denominatores metitur.

Exempla.

$$y^3 * - \tfrac{67}{3}y - \tfrac{880}{27} = 0$$

$$1 \quad 3 \qquad 9 \qquad 27$$

$$x^3 * - 201x - 880 = 0$$

In hac æquatione $x = 3y$.

$$x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{3}{4}x - 64 = 0$$

$$1 \qquad 12 \qquad 144 \qquad 1728$$

$$y^3 - 8y^2 + 108y - 110592 = 0$$

In hac æquatione $y = 12x$.

PROBLEMA CLXIV.

350. *Æquationem datam ab irrationalitate liberare.*

Interdum id fieri poteſt per multiplicationem: interdum per diviſionem radicis. Neutra tamen regula univerſalis eſt.

Si radix fuerit quadrata, quæ tolli debet, radix æquationis multiplicatur per ipſam; ſi vero cubica aut altior quædam, per radicem cubicam ex quadrato quantitatis ſub ſigno radicali tollendæ poſitæ, aut in genere per radicem ejuſdem gradus, quæ tolli debet, ſed ex quantitate ſub ſigno radicali tollendæ poſita ad gradum proxime inferiorem elevata. Interdum circumſtantiæ ſingulares aliud ſuadent.

Exempla.

$$x^4 + 2ax^3\sqrt{2} + 8abx^2 - a^3x\sqrt{8} - 2a^2b^2$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad * \quad 2 \quad \sqrt{8} \quad 4$$
$$y^4 + 4ay^3 + 16aby^2 - 8a^3y - 8a^2b^2 = 0.$$

In hac æquatione $y = a\sqrt{2}$.

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - aab = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{4} \quad \sqrt[3]{16} \quad 4$$
$$y^3 - 2ay^2 + 8aby - 4aab = 0$$

In hac æquatione $y = x\sqrt[3]{4}$

Diviſio exemplis rectius, quam regulis docetur.

$$x^3 - 3x^2\sqrt{3} \quad * \quad - 6\sqrt{3} = 0$$
$$1. \quad \sqrt{3}. \quad 3. \quad 3\sqrt{3}$$
$$y^3 - 3y^2 \quad * \quad - 2 = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt{3}$

$$x^3 - ax^2\sqrt[3]{2} + abx\sqrt[3]{32} - a^2b = 0$$
$$1 \quad \sqrt[3]{2} \quad \sqrt[3]{4} \quad 2$$
$$y^3 - ay^2 + 2aby - \tfrac{1}{2}a^2b = 0$$

In hac æquatione $y = x : \sqrt[3]{2}$.

$$x^3 - x^2\sqrt{2} + 3\tfrac{1}{2}x - 3\sqrt{2} = 0$$
$$1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 2\sqrt{2}$$
$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$

Quodſi ulrerius fractiones tollere volueris; multiplicatio fieri debet per 2.

$$y^3 - y^2 + \tfrac{7}{4}y - \tfrac{3}{2} = 0$$
$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8$$
$$z^3 - 2z^2 + 7z - 12 = 0$$

In hac æquatione $z = 2y = 2x : \sqrt{2}$.

Problema CLXV.

351. *Invenire utrum æquatio data habeat radices rationales, nec ne; &, ſi quas habet, quænam eæ ſint.*

Cum æquationis terminus ultimus ſit factum omnium radicum (§. 329), reſolvatur is in ſuos factores, & hi ſucceſſive ſubſtituantur pro x in æquatione data: in quibus enim caſibus numeri poſitivi & negativi ſe mutuo deſtruunt, in iis factor ſubſtitutus eſt valor ipſius x.

Sit ex. gr. $x^2 - 6x + 8 = 0$. Terminus ultimus 8 factores habet 2 & 4. Ponatur $x = 2$; erit

$$x^2 = 4$$
$$-6x = -12$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 2 radix vera æquationis. Fiat quoque $4 = x$; erit

$$x^2 = 16$$
$$-6x = -24$$
$$+8 = +8$$
$$0 = 0$$

Eſt ergo 4 radix altera vera æquationis.

Sit $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$. Factores termini ultimi 15 ſunt 1, 3, 5.

Subſtituatur 1 pro x; erit

$$x^3 = 1$$
$$-3x^2 = -3$$
$$-13x = -13$$
$$+15 = +15$$
$$0 = 0$$

Eſt

Eſt ergo 1 una ex radicibus veris. Subſtituatur porro 3 pro x; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 27 \\ -3x^2 & = & -27 \\ -13x & = & -39 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & -24 \end{array}$$

Eſt ergo 3 nulla ex radicibus veris. Subſtituatur ergo -3 pro x.

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & -27 \\ -3x^2 & = & -27 \\ -13x & = & +39 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt itaque -3 radix falſa æquationis. Subſtituatur denique 5 pro x; erit

$$\begin{array}{rcl} x^3 & = & 125 \\ -3x^2 & = & -75 \\ -13x & = & -65 \\ +15 & = & +15 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 5 radicum verarum altera.

Aliter.

Cum æquationes compoſitæ ex multiplicatione ſimplicium oriantur (§. 329); ſi radix aliqua fuerit rationalis, æquatio per ſimplicem ex aliquo factore termini ultimi & x conflatam diviſibilis ſit neceſſe eſt. Quare diviſio hæc tentanda.

Sit data æquatio $x^3-3x^2-10x+24=0$. Factores termini ultimi ſunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12: unde æquationes ſimplices conflantur $x-1=0$, $x+1=0$; $x-2=0$, $x+2=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-4=0$, $x+4=0$; $x-6=0$, $x+6=0$; $x-8=0$, $x+8=0$; $x-12=0$, $x+12=0$. Diviſio fruſtra tentatur per $x-1$ & $x+1$. Quare 1 nec radix falſa eſt, nec verarum una: ſuccedit autem diviſio per $x-2$.

$$\begin{array}{r|l} x-2 & x^3-3x^2-10x+24\;(x^2-x-12 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & -x^2-10x \\ & -x^2+2x \\ \hline & -12x+24 \\ & -12x+24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt adeo 2 una ex radicibus veris, cumque terminus ultimus ſit 12 in quotiente, 8 & 12 non ſunt in numero radicum. Diviſio æquationis quadraticæ $x^2-x-12=0$ per $x-3$ fruſtra tentatur; ſed per $x+3$ ſuccedit.

$$\begin{array}{r|l} x+3 & x^2-x-12\;(x-4 \\ & x^2+3x \\ \hline & -4x-12 \\ & -4x-12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 3 radix falſa æquationis &, ob $x-4=0$, 4 verarum altera.

Similiter ſit $x^3-3x^2-13x+15=0$: erunt factores termini ultimi 1, 3, 5; conſequenter diviſores tentandi $x-1=0$, $x+1=0$; $x-3=0$, $x+3=0$; $x-5=0$, $x+5=0$. Tentetur diviſio per $x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x^3-3x^2-13x+15\;(x^2-2x-15 \\ & x^3-x^2 \\ \hline & -2x^2-13x \\ & -2x^2+2x \\ \hline & -15x+15 \\ & -15x+15 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Eſt ergo 1 radicum verarum una. Diviſio in æquatione quadratica per $x-3$ non ſuccedit: ſuccedit tamen per $x+3$.

$$
\begin{array}{r l}
x+3)\ & x^2-2x-15\ (x-5\ . \\
 & x^2+3x \\ \hline
 & -5x-15 \\
 & -5x-15 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

Est itaque 3 radix falsa, & ob $x-5=0$, 5 verarum altera.

COROLLARIUM.

352. Ex modo allatis exemplis manifestum est, Problema præsens hanc quoque admittere solutionem:

1. Numerus, quem radicem esse suspicamur, subducendus est ex coëfficiente secundi termini.
2. Residuum multiplicandum est per illum ipsum numerum, & factum ex coëfficiente termini tertii subtrahendum.
3. Quod relinquitur, denuo per illum numerum multiplicetur; factum ex coëfficiente termini quarti subtrahatur, & ita porro.

$$
\begin{array}{r c c c}
 & x^3-3x^2 & -10x & +24=0 \\
 & -2 & +2 & +24 \\ \hline
 & -1 & -12 & 0 \\
-2 & & & \\ \hline
 & +2 & +24 &
\end{array}
$$

Quoniam 0 relinquitur, 2 est una radicum verarum.

$$
\begin{array}{r c c c}
 & x^3-3x^2 & -13x & +15=0 \\
 & -1 & +2 & +15 \\ \hline
 & -2 & -15 & 0 \\
-1 & & & \\ \hline
 & +2 & +15 &
\end{array}
$$

Est ergo 1 altera radicum verarum.

SCHOLION.

353. *Ne radicum rationalium investigatio molesta accidat, consultum est, ut vel æquationem propositam in aliam transformemus, in qua terminus ultimus divisores pauciores habet, vel duos numeros investigemus, intra quos radices continentur: quem in finem sequentia subnectimus Problemata.*

PROBLEMA CLXVI.

354. *Æquationem propositam, in qua terminus ultimus plures admittit divisores, transformare in aliam, in qua terminus ultimus pauciores divisores habet.*

Fiat $x=1$, vel $x=-1$; vel $x=2$, vel $x=-2$; vel $x=3$, vel $x=-3$; vel $x=4$, vel $x=-4$ &c. &, his valoribus successive substitutis, observetur, quo in casu summa relinquat numerum pauciores factores habentem, quam terminus ultimus æquationis: eo enim numero radix æquationis vel augenda est, vel minuenda (§. 333).

Sit ex. gr. $x^3-3x^2-10x^2+24=0$

$$
\begin{array}{l l}
\text{Fiat } x = & 1 \\ \hline
\text{erit } x^3 = & 1 \\
-3x^2 = & -3 \\
-10x = & -10 \\
+24 = & +24 \\ \hline
\text{Summa} = & +12
\end{array}
$$

Cum 12 pauciores divisores admittat quam 24;

$$
\begin{array}{l}
\text{Fiat } x=y+1 \\
\text{erit } x^2=y^2+2y+1 \\ \hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r l}
x^3= & y^3+3y^2+3y+1 \\
-3x^2= & \quad -3y^2-6y-3 \\
-10x= & \qquad\quad -10y-10 \\
+24= & \qquad\qquad\quad +24 \\ \hline
 & y^3 \quad * \quad -13y+22=0
\end{array}
$$

In hac æquatione est $y=x-1$.

SCHO-

SCHOLION.

355. *Eadem æquatio* $y^3 * - 13y + 13 = 0$ *habet radicem falsam* -4. *Si enim hunc valorem pro y substituas, prodibit* $-64 + 52 + 12 = 0$. *Ergo* $x = y + 1 = -3$. *Reperitur adeo* -3 *radix falsa æquationis propositæ* $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$; *prorsus ut supra* (§. 351).

PROBLEMA CLXVII.

356. *Invenire limites æquationis, hoc est, duas quantitates, intra quas radix continetur.*

Sit $x^2 + px - q = 0$

erit $x^2 + px = q$

$px < q$ (§. 84 *Arithm.*).

$x < q : p$ (§. 182 *Arithm.*).

Similiter ob $x^2 + px = q$

$q > x^2$ (§. 84 *Arithm.*).

$\sqrt{q} > x$ (§. 246, 180 *Arith.*)

$x\sqrt{q} > x^2$ (§. 180 *Arithm.*).

$px \quad px$ add.

$x\sqrt{q} + px > x^2 + px$ (§. 90 *Arithm.*)

adeoque $(\sqrt{q} + p)\, x > q$ (§. 89 *Arith.*)

$x > q : (\sqrt{q} + p)$ (§. 182 *Arithm.*).

Sunt adeo limites æquationis $q : p$ & $q : (\sqrt{q} + p)$. Nempe radix minor esse debet quam $q : p$ & major quam $q : (\sqrt{q} + p)$.

Sit $x^2 - px + q = 0$

erit $x^2 + q = px$

$x^2 < px$

$x < p$

Similiter quia $x^2 = px - q$, adeoque differentia inter px & q positiva, erit

$px > q$

$x > q : p$

Sunt adeo limites æquationis p & $q : p$. Nempe radix minor est quam p & major quam $q : p$.

Sit $x^2 - px - q = 0$

erit $x^2 = px + q$

$x^2 > q$

$x > \sqrt{q}$

$x\sqrt{q} > q$

Ergo $px + x\sqrt{q} > px + q$

hoc est, $px + q < px + x\sqrt{q}$

adeoque $x^2 < px + x\sqrt{q}$

$x < p + \sqrt{q}$

Similiter $x^2 > px$

$x > p$

$px > p^2$

$px + q > p^2 + q$

$x^2 > p^2 + q$

$x > \sqrt{(p^2 + q)}$

Sunt adeo limites $p + \sqrt{q}$ & $\sqrt{(p^2 + q)}$. Nimirum radix minor esse debet quam $p + \sqrt{q}$; sed major quam $\sqrt{(p^2 + q)}$.

Sit $x^3 - qx + r = 0$

erit $x^3 + r = qx$

Ergo $qx > r$

$x > r : q$

Similiter $x^3 < qx$

$x^2 < q$

$x < \sqrt{q}$

Sunt adeo limites $r : q$ & $\sqrt{q}$.

Sit $x^3 + qx - r = 0$

erit $x^3+qx=r$

$qx<r$

$x<r:q$

Similiter $r>x^3$

$r^{1:3}>x$

$r^{2:3}>x^2$

$xr^{2:3}>x^3$

$xr^{2:3}+qx>x^3+qx$

$>r$

$x>r:(r^{2:3}+q)$

Sunt adeo limites $r:q$, & $r:(r^{2:3}+q)$,

Sit $x^3-px^2+qx-r=0$

erit $x^3-px^2=r-qx$

Quodsi ergo $x>p$, erit quoque $r>qx$, consequenter $x<r:q$. Sed si $p>x$; erit $qx>r$, consequenter $x>r:q$.

In utroque igitur casu limites sunt p & $r:q$.

Sit $x^3-px^2-qx+r=0$

erit $x^3+r=px^2+qx$

$px^2+qx>r$

$x^2+qx:p>r:p$

$x^2+qx:p+q^2:4p^2>r:p+q^2:4p^2$

$x^2+q:2p>\sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}$

$x>\sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}-q:2p$

Similiter $px^2+qx>x^3$

$px+q>x^2$

$q>x^2-px$

$q+\frac{1}{4}p^2>x^2-px+\frac{1}{4}p^2$

$\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}>x-\frac{1}{2}p$

$x<\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{2}p$

Sunt adeo limites $\sqrt{(r:p+q^2:4p^2)}-q:2p$ & $\sqrt{(q+\frac{1}{4}p^2)}+\frac{1}{2}p$.

Sit $x^4-qx^2-rx-s=0$

erit $x^4-qx^2=rx+s$

Ergo $x^4>qx^2$

$x^2>q$

$x>\sqrt{q}$

Similiter $x^4-rx=qx^2+s$

ergo $x^3>r$

$x>r^{1:3}$

Tandem $x^4-s=qx^2+rx$

Ergo $x^4>s$

$x>s^{1:4}$

$x^3>s^{3:4}$

$x^3s^{1:4}>s$

Similiter $x>q^{1:2}$ $\quad$ $x>r^{1:3}$

$xq^{1:2}>q$ $\quad$ $x^2>r^{2:3}$

$x^3q^{1:2}>qx^2$ $\quad$ $x^2r^{1:3}>r$

$x^3r^{1:3}>rx$

Ergo ob $x^4=qx^2+rx+s$

$x^4<x^3q^{1:2}+x^3r^{1:3}+x^3s^{1:4}$

$x<q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$

Sunt adeo limites $\sqrt{q}$ vel $r^{1:3}$ vel $s^{1:4}$, & $q^{1:2}+r^{1:3}+s^{1:4}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

SCHOLION.

357. *In aequatione* $x^3-3x^2-10x+24=0$ *factores termini ultimi sunt* 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24. *Limites reperiuntur* $\sqrt{(\frac{24}{3}+\frac{25}{9})}-\frac{5}{3}=\sqrt{\frac{97}{9}}-\frac{5}{3}=\frac{98-50}{30}=\frac{48}{30}=1\frac{3}{5}$ *fere, &* $\sqrt{(10+\frac{9}{4})}+\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{49}{4}}+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=\frac{10}{2}=5$. *Maxima igitur radicum non potest esse minor quam* $1\frac{3}{5}$ *debet tamen esse minor quam* 5. *Unde apparet divisionem tentandam esse per* $x-2$. *Quo*

Quo facto reperitur $x = 2$ *& æquatio reducitur ad quadraticam* $x^2 - x - 12 = 0$ (§. 351). *Unde radix vera altera* $= \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$, *& falsa* $\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$ (§. 143).

PROBLEMA CLXVIII.

358. *Ex æquatione cubica radicem extrahere.*

Æquationes cubicæ, sublato secundo termino, ad hos tres casus reducuntur (§. 345).

$$x^3 = +px + q$$
$$x^3 = -px + q$$
$$x^3 = +px - q$$

Fiat $x = y + z$

erit $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3$

$px = py + pz$

Quamobrem in casu primo

$$y^3 + 3y^2z + 3z^2y + z^3 = py + pz + q$$

Fiat $3y^2z + 3z^2y = +py + pz$ $\quad (y+z)$

erit $3yz = p$ $\quad 3y$

$z = p : 3y$

Erit porro $y^3 + z^3 = q$

hoc est $y^3 + p^3 : 27y^3 = q^3$

$$y^6 + \tfrac{1}{27}p^3 = qy^3$$

$$y^6 - qy^3 = -\tfrac{1}{27}p^3$$
$$\tfrac{1}{4}q^2 \qquad \tfrac{1}{4}q^2$$

$$y^6 - qy^3 + \tfrac{1}{4}q^2 = \tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3$$

$$\left.\begin{matrix} y^3 - \tfrac{1}{2}q \\ \tfrac{1}{2}q - y^3 \end{matrix}\right\} = \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$y^3 = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3)}$$

$$y = (\tfrac{1}{2}q \pm)\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 - \tfrac{1}{27}p^3}))^{1:3}$$

Est nempe $y = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$ & $z = \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ergo $y + z = x =$
$\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Eodem modo reperitur radix in casu altero $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)})}$.

Denique in casu tertio $x =$
$\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q + \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} + \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q - \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})}$.

Ex. gr. Sit $x^3 = 6x + 40$: erit $p = 6$, $q = 40$, adeoque $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, $\frac{1}{27}p^3 = 8$; consequenter $\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3 = 392$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = \sqrt{392} = \sqrt{2.\,196} = 14\sqrt{2}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)} = 20 \pm 14\sqrt{2}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = 2 \pm \sqrt{2}$. Quare per regulam primam $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

Sit $x^3 = -3x + 36$. Quia $p = 3$, $q = 36$, adeoque $\frac{1}{2}q = 18$, $\frac{1}{4}q^2 = 324$, $\frac{1}{3}p = 1$, $\frac{1}{27}p^3 = 1$, consequenter $\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3 = 325 = \frac{1300}{4}$ & $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 10\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$. Unde $\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3)} = 18 \pm \frac{40}{4}\sqrt{3\frac{1}{4}}$, adeoque $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3\frac{1}{4}}$. Quare per regulam secundam $x = \frac{3}{2} + \sqrt{3\frac{1}{4}} + \frac{3}{2} - \sqrt{3\frac{1}{4}} = 3$.

Sit $x^3 = 6x - 40$. Quoniam $p = 6$, $q = 40$, eodem modo, quo in casu primo, reperitur $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{(\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3)})} = -2 + \sqrt{2}$, adeoque $x = -2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{2} = -4$.

SCHOLION.

359. *Equidem ex* $20 \pm \sqrt{392}$ *radix cubica extrahitur per regulas communes* (§. 282 Arithm.): *ut tamen appareat quomodo radix inveniri possit, si regulæ communes com-*

commode applicari nequeant, methodum generalem apponere libet, qua & in aliis casibus similibus utendum. Ceterum formulas illas extrahendi radicem ex æquatione cubica (§. 358) CARDANI *regulas vocat* CARTESIUS (*a*), *quia eas primus publicavit: ipse enim* CARDANUS *inventionis laudem* Scipioni FERREO *tribuit.*

PROBLEMA CLXIX.

360. *Extrahere radicem desideratam ex quantitate irrationali composita.*

Sit ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahenda radix quadrata. Ponamus eam esse $x+\sqrt{y}$, erit $x^2+2x\sqrt{y}+y=3+\sqrt{8}$.

Fiat $x^2+y=3$ $\quad$ $2x\sqrt{y}=\sqrt{8}$

erit $x^4+2x^2y+y^2=9$ $\quad$ $4x^2y=8$

$$4x^2y=8$$

$$x^4-2x^2y+y^2=1$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=1$$

$$x^2=y+1$$

Est vero etiam, ob $x^2+y=3$, $x^2=3-y$

Quare $3-y=y+1$

$$3=2y+1$$

$$2=2y$$

$$1=y$$

Ergo $x^2=y+1=2$

$$x=\sqrt{2}$$

Est ergo $x+\sqrt{y}=\sqrt{(3+\sqrt{8})}=1+\sqrt{2}$.

Sit similiter in Problemate præcedente ex $20+\sqrt{392}$ extrahenda radix cubica. Ponamus radicem esse $x+\sqrt{y}$, erit ejus cubus

$$x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+\sqrt{y^3}=20+\sqrt{392}$$

Fiat $3x^2\sqrt{y}+\sqrt{y^3}=\sqrt{392}$

erit $9x^4y+6x^2y^2+y^3=392$

Porro $x^3+3xy=20$

$$x^6+6x^4y+9x^2y^2=400$$

$$9x^4y+6x^2y^2+y^3=392 \quad \text{subt.}$$

$$x^6-3x^4y+3x^2y^2-y^3=8$$

Ext. Rad.

$$x^2-y=2$$

$$x^2-2=y$$

Substituto valore ipsius y in æquatione:

$$x^3+3xy=20$$

erit $x^3+3x^3-6x=20$

hoc est $4x^3-6x=20$

$$x^3 * -\tfrac{6}{4}x=5$$

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad (\S.\ 337).$$

$$z^3 * -6z=40$$

Si pro z substituatur 4; erit $64-24=40$. Est ergo 4 radix hujus æquationis (§. 351); consequenter $x=z:2=2$. Quare cum sit

$$x^2-2=y$$

erit $4-2=y$

$$2=y$$

Est ergo radix cubica ex $20+\sqrt{392}$ extracta $2+\sqrt{2}$.

Eodem modo operandum est in casibus aliis.

PROBLEMA CLXX.

361. *Æquationem biquadraticam, in qua secundus terminus deficit, reducere ad cubicam.*

Sit æquatio biquadratica $x^4+qx^2+rx+s=0$, ubi retinetur in omnibus terminis signum +, ut omnes casus repræ-

(*a*) *Geom.* Lib. II. p. m. 93, & 94.

repræſententur. Cum æquatio biquadratica ex multiplicatione duarum quadraticarum oriatur (§. 329); aſſumantur duæ quadraticæ $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$, quæ in ſe invicem ductæ generabunt

$$\begin{aligned} x^4 * + zx^2 + yvx + vz &= 0 \\ + vx^2 - yzx & \\ - y^2x^2 & \end{aligned}$$

Quoniam hæc æquatio eadem ſupponitur cum propoſita; erit

$$\begin{array}{ll} z + v - y^2 = q & yv - yz = r \quad vz = s \\ \hline q + y^2 = z + v & v - z = r : y \\ \hline q + y^2 - v = z & v - q - y^2 + v = r : y \\ & \overline{2v = q + y^2 + r : y} \\ & v = (q + y^2 + r : y) : 2 \end{array}$$

Subſtituatur valor ipſius v in æquatione $q + y^2 - v = z$, erit

$$q + y^2 - (q + y^2 + r : y) : 2 = z$$

hoc eſt $z = (2q + 2y^2 - q - y^2 - r : y) : 2$
$= (q + y^2 - r : y) : 2.$

Ergo $vz = \left(\frac{q + y^2 + r : y}{2}\right) \left(\frac{q + y^2 - r : y}{2}\right)$

$$= \frac{q^2 + 2qy^2 + y^4 - r^2 : y^2}{4} = s$$

$$\overline{}\; 4y^2$$

$$\frac{q^2y^2 + 2qy^4 + y^6 - r^2 = 4sy^2}{y^6 + 2qy^4 + q^2y^2 - r^2 = 0}$$
$$- 4sy^2$$

Fiat $y^2 = t$, erit

$$t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0.$$
$$- 4st$$

PROBLEMA CLXXI.

362. *Ex æquatione biquadratica radicem extrahere.*

I. Si æquatio fuerit pura, ex. gr. *Wolfii Oper. Mathem.* Tom. I. $x^4 = a^2bc$: extrahatur primum radix quadrata, ut habeatur $x^2 = a\sqrt{bc}$; & hinc denuo educatur radix quadrata: reperietur $x = \sqrt{(a\sqrt{bc})}$

E. gr. Sit $x^4 = 32$; erit $x^2 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, adeoque $x = 2\sqrt{\sqrt{2}}$.

II. Si æquatio fuerit affecta,

1. Tollatur ſecundus terminus, ſi adfuerit (§. 343).
2. Reducatur æquatio ad cubicam (§. 361).
3. Inde extrahatur radix cubica (§. 358).
4. Hac data, ex æquationibus quarum ope biquadraticam ad cubicam reduximus, radices æquationis propoſitæ erui poſſunt.

Ex. gr. Sit $x^4 - 86x^2 + 600x - 851 = 0$; erit $q = -86$, $r = 600$, $s = -851$. Jam cum æquatio cubica, ad quam ea reducenda, ſit $t^3 + 2qt^2 + q^2t - r^2 = 0$:
$- 4st$
ſi in ea ſubſtituantur valores quantitatum q, r, s, prodibit

$$t^3 - 172t^2 + 10800t - 360000 = 0$$

Hæc æquatio cum ſit per $t - 100$ diviſibilis (§. 351); erit $t = 100$, adeoque in Problemate præcedente $y^2 = 100$ & hinc $y = 10$.

Hoc valore ſubſtituto in æquatione $\frac{q + y^2 - r : y}{2} = z$; reperitur $z = \frac{-86 + 100 - 600 : 10}{2} = -\frac{46}{2} = -23$.

Eodem valore ipſius y ſubſtituto in æquatione $v = \left(\frac{q + y^2 + r : y}{2}\right)$; invenitur $v = \frac{-86 + 100 + 600 : 10}{2} = \frac{74}{2} = 37$. Tandem valores quantitatum y, z

& v ſubſtiruendi ſunt in æquationibus quadraticis $x^2 + yx + z = 0$ & $x^2 - yx + v = 0$ & habebimus :

I. $x^2 + 10x - 23 = 0.$

$$x^2 + 10x = 23$$
$$\quad 25 \quad 25$$
$$x^2 + 10x + 25 = 48$$
$$x + 5 = \pm\sqrt{48} = \pm 4\sqrt{3}$$
$$x = \pm 4\sqrt{3} - 5$$

II. $x^2 - 10x^2 + 37 = 0$

$$x^2 - 10x^2 = -37$$
$$\quad 25 \quad 25$$
$$x^2 - 10x + 25 = -12$$
$$\left.\begin{matrix} x - 5 = \\ 5 - x = \end{matrix}\right\} = \sqrt{-12} = 2\sqrt{-3}$$
$$x = 5 \pm 2\sqrt{-3}$$

Sunt ergo radices æquationis propoſitæ $4\sqrt{3}-5, -4\sqrt{3}-5, 5 + 2\sqrt{-3}$ & $5 - 2\sqrt{-3}$

PROBLEMA CLXXII.

363. *Ex æquatione quacunque extrahere radicem per approximationem.*

Quamvis æquationum quadraticarum radices ſurdæ extrahi poſſint (§. 143), nec difficile ſit inde ulterius radicem prope veram in fractionibus decimalibus elicere (§. 273 *Arithm.*) : quoniam tamen methodus, quam nunc explicare intendimus, univerſalis eſt, ab exemplo facillimo æquationis quadraticæ ut ordiamur, conſultum ducimus.

Sit $x^2 - 5x - 31 = 0$. Quoniam $x < 5 + \sqrt{31}$ & $> \sqrt{56}$, ſive $x < 10 +$ & $> 7 +$ (§. 354) : ponamus radicem eſſe $8 + y$, ita ut y denotet fractionem, qua numerus aſſumtus 8 radicem vel excedit, vel ab ea deficit : erit

$$x^2 = \quad 64 + 16y + y^2$$
$$-5x = -40 - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$-7 + 11y + y^2 = 0$$

Quoniam fractionum potentiæ continuo decreſcunt, & radix tantum deſideratur prope vera, y^2 abjiciatur : quo facto, erit

$$-7 + 11y = 0$$
$$y = \tfrac{7}{11} = \tfrac{6}{10} \text{ fere}, = 0.\,6$$

Ergo $x = 8 + 0.\,6 = 8.\,6$

Ponamus $x = 8.\,6 + y$: erit

$$x^2 = \tfrac{7396}{100} + \tfrac{172}{10}y + y^2$$
$$-5x = -\tfrac{430}{10} - 5y$$
$$-31 = -31$$
$$\tfrac{7396}{100} - \tfrac{430}{10} - 31 + \tfrac{172}{10}y - 5y = 0$$

hoc eſt, reductione ad eandem denominationem facta,(quod in gratiam tyronum ſemel hic exhibere placuit)

$$7396 - 4300 - 3100 + (1720 - 500)y = 0$$
$$-0.\,04 + 12.\,20y = 0$$
$$12.\,20y = 0.\,04$$
$$y = 004 : 1220 = 0.\,0032$$

Ergo $x = 8.6000 + 0.0032 = 8.6032.$

Ponamus $x = 8.\,6032 + y$, erit

$$x^2 = 7'401505024 + 17'20640000y + y^2$$
$$-5x = -4.301600000 - 5.000000000y$$
$$-31 = -3.100000000$$
$$-0.000094976 + 12.20640000y = 0$$
$$y = 0000094976 : 1220640000$$
$$= 0.\,000077808.$$

Ergo

Ergo $x = 8.6032000000 + 0.0000$ $77808 = 8.603277808$.

Sit similiter ex æquatione cubica $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$ extrahenda radix per approximationem. Ponamus denuo radicem esse $5 + y$ [numerus 5 assumitur vi limitum æquationis (§. 354)]: quoniam termini, in quibus est y^2 & y^3, omittuntur; non opus est, ut in transformatione æquationis exprimantur. Reperitur adeo

$$\begin{aligned} x^3 &= 125 + 75y \dots \\ +2x^2 &= 50 + 20y \dots \\ -23x &= -115 - 23y \\ -70 &= -70 \\ \hline -10 &+ 72y = 0 \\ \hline y &= \tfrac{10}{72} = 0.1 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5 + 0.1 = 5.1$

Ponamus $x = 5.1 + y$: erit

$$\begin{aligned} x^3 &= 132.651 + 78.030y \dots \\ +2x^2 &= 52.020 + 20.400y \\ -23x &= -117.300 - 23.000y \\ -70 &= -70.000 \\ \hline -2.629 &+ 75.430y = 0 \\ \hline 75.430y &= 2.629 \\ \hline y &= 2629 : 75430 = 0.0348 \end{aligned}$$

Ergo $x = 5.1 + 0.0348 = 5.1348$

Eodem modo progredi licet, quousque libuerit.

Nec difficile est eadem methodo regulam generalem investigare. Sit nempe $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + ex^{m-5}$ &c. $+ f = 0$. Ponamus esse $x = t + y$; erit

$$\begin{aligned} x^m &= t^m + mt^{m-1}y + \frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} y^2 \dots \\ + ax^{m-1} &= at^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} y + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} y^2 \dots \\ + bx^{m-2} &= bt^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} y + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} y^2 \dots \\ + cx^{m-3} &= ct^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4} y + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5} y^2 \dots \end{aligned}$$

&c. &c.

$$+f = +f$$

Fiat $t^m + at^{m-1} + bt^{m-2} + ct^{m-3}$ &c. $= p$

$mt^{m-1} + (m-1)\, at^{m-2} + (m-2)\, bt^{m-3} + (m-3)\, ct^{m-4}$ &c. $= q$

$\frac{m.\,m-1}{2} t^{m-2} + \frac{m-1.\,m-2}{2} at^{m-3} + \frac{m-2.\,m-3}{2} bt^{m-4} + \frac{m-3.\,m-4}{2} ct^{m-5}$ &c. $= r$

Quoniam termini, in quibus y ad plures dimensiones ascendit, ob parvitatem abjiciuntur, erit

$$p + qy + ry^2 = 0$$

Fiat ut in exemplis specialibus

$$\begin{aligned} p + qy &= 0 \\ \text{erit } qy &= -p \\ y &= -p : q \end{aligned}$$

In applicatione regulæ hujus generalis eadem calculi instauratione opus est, qua in exemplis specialibus paulo ante usi sumus.

Quodsi vero regula desideretur, quæ celerius appropinquat, ex æquatione prima hunc in modum eruitur.

Quoniam $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p \quad (q+ry$

$y=-p:(q+ry)$

Sed $y=-p:q$, per regulam priorem.

Ergo $y=-p:(q-\frac{pr}{q})=-pq:(q^2-pr)$.

Vel quia $p+qy+ry^2=0$

erit $qy+ry^2=-p$

$qy:r+y^2=-p:r$

$q^2:4r^2+qy:r+y^2=q^2:4r^2-p:r$

$q:2r+y=\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-pr)}:r$

Habetur adeo x, si valor ipsius y adjiciatur valori t, signo vel positivo, vel privativo, prout repertus fuerit.

SCHOLION.

364. *Duas regulas posteriores methodo ab hac diversa investigavit celeberrimus* HALLEIUS (*a*), *& easdem aliquot exemplis illustravit. Quamvis vero usus earum ex ante allatis exemplis manifestus esse videatur; non inconsultum tamen judicamus ut unum apponamus.*

Sit $x^3+\underset{a}{438}x^2-\underset{b}{7825}x-\underset{f}{98508430}=0$.

Fiat $x=t+y=300+y$; erit

$x^3=27000000+270000y+900y^2+y^3$
$+ax^2=39420000+262800y+438y^2$
$-bx=-2347500-7825y$
$-f=-98508430$

$0=-34435930+524975y+1338y^2$

Est itaque $p=-34435930$, adeoque $-p=34435930$, $q=524975$, $r=1338$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=34435930:(524975+46075274340:524975)=34435930:612741=56$, consequenter $x=300+56=356$.

Fiat jam $x=356+y$; erit

$x^3=45118016+380208y+1068y^2+y^3$
$+ax^2=55510368+311856y+438y^2$
$-bx=-2785700-7825y$
$-f=-98508430$

$0=-665746+684239y+1506y^2$.

Est itaque $p=-665746$, $q=684239$, $r=1506$. Quare $y=-p:(q-pr:q)=665746:(684239+1002613476:684239)=6657460:685704=0.9708$, consequenter $x=356+0.9708=356.9708$.

Per regulam irrationalem radix in pluribus notis per duas operationes inveniri potest, quia rationali accuratior. Possunt quoque plures notae inveniri per rationalem, si operatio continuetur.

COROLLARIUM.

365. Sit $x^m-f=0$ & fiat $x=t+y$; erit $x^m-f=t^m+mt^{m-1}y+\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}y^2$ &c. $-f$. Unde si fiat $t^m+mt^{m-1}y-f=0$, erit $y=(f-t^m):mt^{m-1}$, quae est regula per approximationem extrahendi radicem ex quavis aequatione pura. Si accuratior desideretur, fiat ut ante $t^m=p$, $mt^{m-1}=q$, $\frac{m.m-1}{1.2}t^{m-2}=r$; reperietur ut in problemate $y=-p:(q-pr:q)$. Unde apparet eandem regulam inservire radicum extractioni tum ex aequationibus puris, tum ex affectis.

PROBLEMA CLXXIII.

366. *Ex serie infinita radicem extrahere.*

Sit $v=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5$ &c.

Fiat $x=hv+iv^2+kv^3+lv^4+mv^5+nv^6$ &c. erit (§. 95),

$x^2=h^2v^2+2hiv^3+i^2v^4+2ikv^5+k^2v^6$
$+2hkv^4+2hlv^5+2ilv^6$
$+2hmv^6$

$x^3=h^3v^3+3h^2iv^4+3hi^2v^5+i^3v^6$
$+3h^2kv^5+3h^2lv^6$
$+6hikv^6$

$x^4=h^4v^4+4h^3iv^5+6h^2i^2v^6$
$+4h^3lv$

(*a*) In Transact. Anglican. n. 210. p. 136.

$x^5 = \quad h^5v^5 + 5h^4iv^6$
$x^6 = \quad h^6v^6$

Subſtituantur valores modo inventi in æquatione $0 = -v + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6$ &c. erit

$-v = -v$							
$+ax =$	$+ahv$	$+aiv^2$	$+akv^3$	$+alv^4$	$+amv^5$	$+anv^6$	&c.
$+bx^2 =$		$+bh^2..$	$+2bhi..$	$+bi^2..$	$+2bik..$	$+bk^2..$	
				$+2bhk..$	$+2bhl..$	$+2bil..$	
						$+2bhm..$	
$+cx^3 =$			$+ch^3..$	$+3ch^2i..$	$+3chi^2..$	$+ci^3..$	
					$+3ch^2k..$	$+3ch^2l..$	
						$+6chik..$	
$+dx^4 =$				$+dh^4..$	$+4dh^3i..$	$+6dh^2i^2..$	
						$+4dh^3k..$	
$+ex^5 =$					$+eh^5..$	$+5eh^4i..$	
$+fx^6 =$						$+fh^6..$	

Jam cum æquatio ponatur nihilo æqualis, propterea quod v ſubducitur ex altero æquationis membro ipſi æquali; omnes terminos v, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6 &c. in nihilum ductos concipere licet.

Fiat ergo in hac æquatione cujuslibet termini coëfficiens nihilo æqualis, erit

$$ah - 1 = 0 \qquad ai + bh^2 = 0$$
$$h = 1 : a \qquad i = -bh^2 : a$$
$$i = -b : a^3$$

$$ak + 2bhi + ch^3 = 0$$
$$k = (-2bhi - ch^3) : a$$
$$k = (+2b^2 - ac) : a^5$$

$$al + bi^2 + 2bhk + 3ch^2i + dh^4 = 0$$
$$l = (-bi^2 - 2bhk - 3ch^2i - dh^4) : a$$

conſequenter ob

$$bi^2 = b^3 : a^6,\ 2bhk = (4b^3 - 2abc) : a^6$$
$$3ch^2i = -3bc : a^5 \qquad dh^4 = d : a^4$$
$$l = -b^3 : a^7 - 4b^3 : a^7 + 2abc : a^7 + 3bc : a^6 - d : a^5$$
$$l = (5abc - 5b^3 - a^2d) : a^7$$

$$am + 2bik + 2bhl + 3chi^2 + 3ch^2k + 4dh^3i + eh^5 = 0$$

Ergo ob

$2bik = (-4b^4 + 2ab^2c) : a^8$, $4dh^3i = -4bd : a^6$
$2bhl = (10ab^2c - 10b^4 - 2a^2bd) : a^8 \qquad eh^5 = e : a^5$
$3chi^2 = 3b^2c : a^7 \qquad 3ch^2k = (6b^2c - 3ac^2) : a^7$
$m = (14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e) : a^9$

Eodem modo reperitur $n = (-42b^5 + 84ab^3c - 28a^2bc^2 - 28a^2b^2d + 7a^3cd + 7a^3be - a^4f) : a^{11}$, & ita porro.

Quodſi tandem in æquatione aſſumta $x = hv + iv^2 + kv^3 + lv^4 + mv^5 + nv^6$ &c. valores inventi coëfficientium h i, k, l, m, n &c. ſubſtituantur, prodibit radix quæſita

$$x = \frac{1}{a}v - \frac{b}{a^3}v^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3$$
$$+ \frac{5abc - 5b^3 - a^2d}{a^7}v^4 +$$
$$\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5$$

&c. in infinit.

CAPUT VI.

De Algebra ad Geometriam Sublimiorem applicata.

Definitio XX.

367. Per *Geometriam Sublimiorem* intelligo eam Geometriæ partem, quæ de lineis curvis & solidis inde genitis tractat.

Definitio XXI.

Tab. III. Fig. 36. 368. *Diameter* curvæ est recta AD rectas MM inter se parallelas bifariam secans in P. In specie *Axis* vocatur, si rectas æquidistantes ad angulos rectos secet.

Definitio XXII.

369. *Vertex curvæ* est punctum A, ex quo ducitur diameter.

Definitio XXIII.

Tab. III. Fig. 36. 370. *Ordinatim applicatæ* sunt lineæ æquidistantes MM, quæ a diametro bifariam secantur. Earum dimidiæ PM vocantur *Semiordinatæ*. Vocantur etiam Tab. V. Fig. 60. *Semiordinatæ* lineæ QM, QM ex punctis curvæ M, M ad lineam AΓ positione datam ductæ, ac inter se parallelæ.

Definitio XXIV.

Tab. III. Fig. 36. 371. *Abscissa* AP est pars diametri vel alterius lineæ, ad quam curva refertur, inter verticem aut aliud punctum fixum & semiordinatam PM intercepta. Quidam *sagittam* vocant.

* Scholion.

372. *Abscissæ nimirum a quovis puncto in linea positione data computari possunt, ad quam referuntur puncta curvæ, quemadmodum ex subsequentibus patebit.*

Definitio XXV.

373. *Diameter transversa* AB est recta, quæ utrinque intra curvas continuata rectas intra easdem æquidistantes MM bifariam secat. Tab. III. Fig. 37.

Definitio XXVI.

374. *Diameter conjugata* est recta, quæ alteri diametro æquidistantes bifariam secat.

Definitio XXVII.

375. *Quantitates variabiles* sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, aut crescunt aut decrescunt. Tab. III. Fig. 38.

Ex. gr. semiordinata PM & abscissa AP circuli sunt quantitates variabiles: una enim crescente, crescit etiam altera.

Quantitates constantes sunt, quæ, crescentibus aliis vel decrescentibus, eædem manent.

Ita semidiameter circuli AC est quantitas constans: crescentibus enim abscissis & semiordinatis AP & PM semper eadem manet.

Hypothesis VIII.

376. *Quantitates constantes primis alphabeti literis indigitentur* a, b, c, &c. *variabiles vero ultimis* z, y, x, &c. *Speciatim* x *abscissam*, y *semiordinatam denotet, nisi aliud expresse moneatur.*

Definitio XXVIII.

377. *Curva algebraica* est, in qua relatio abscissarum AP ad semiordinatas per æquationem algebraicam explicari potest. Sit ex. gr. in circulo Tab. III. Fig. 36.

AB

Tab. III. Fig. 38. $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $PB = a - x$, consequenter ob $PM^2 = AP.PB$ (§. 327, 377 *Geom.*) $y^2 = ax - x^2$. Vel sit $PC = x$, $AC = a$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $MC^2 - PC^2 = PM^2$, hoc est, $a^2 - x^2 = y^2$.

SCHOLION I.

378. *Dicuntur æquationes algebraicæ, quæ determinati sunt gradus, ita ut æquatio semper eadem maneat in singulis punctis curvæ.*

SCHOLION II.

379. *Vulgo cum* CARTESIO (*a*) *lineas algebraicas* geometricas *vocant, quod eas tantum ad construenda Problemata admittant, adeoque in Geometriam recipiant. Aliter vero nobis videtur, non refragantibus summis in re Geometrica arbitris* LEIBNITIO *atque* NEWTONO (*b*).

DEFINITIO XXIX.

380. *Curva transcendens* est, quæ per æquationem algebraicam definiri nequit.

SCHOLION.

381. *Curvæ transcendentes ab aliis,* CARTESII *exemplo, dicuntur* mechanicæ *& ex Geometria ejiciuntur; aliter sentientibus viris summis* LEIBNITIO *atque* NEWTONO. *Invenit quoque* LEIBNITIUS *novum æquationum transcendentium genus, quibus curvæ transcendentes definiuntur, & quæ sunt gradus indefiniti, hoc est, non constanter eædem in omnibus curvæ punctis* (*c*).

DEFINITIO XXX.

382. *Curva algebraica ejusdem generis* sunt, quarum æquationes ad eandem dimensionem assurgunt. Cum vero sola æquatio, quæ rectam definit, unius dimensionis esse possit; *Curva primi generis* vocatur, in qua æquatio ad duas dimensiones assurgit; si ad tres, *curva secundi generis*; si ad quatuor, *curva tertii generis*, &c.

Ex. gr. æquatio pro circulo est $y^2 = ax - x^2$, vel etiam $a^2 - x^2 = y^2$ (§. 377). Est ergo circulus curva primi generis. Similiter curva primi generis est, quæ definitur per æquationem $ax = y^2$. Sed curva secundi generis est, quam definit æquatio $a^2x = y^3$.

DEFINITIO XXXI.

383. *Familia curvarum* vocatur plurium curvarum diversi generis congeries, quæ omnes per eandem æquationem indeterminati gradus, sed pro diversitate generis diversimode explicandi, definiuntur.

Ex. gr. sit æquatio indeterminati gradus $a^{m-1}x = y^m$. Si $m = 2$, erit $ax = y^2$. Si $m = 3$, erit $a^2x = y^3$; si $m = 4$, erit $a^3x = y^4$, &c. in infinitum. Omnes istæ curvæ dicuntur ejusdem familiæ.

SCHOLION.

384. *Æquationes, per quas curvarum familiæ definiuntur, cum transcendentibus non sunt confundendæ. Licet enim, intuitu totius familiæ, sint gradus indeterminati; cujuslibet tamen ex familia curvæ respectu, gradum determinatum habent: cum æquationes transcendentes, respectu ejusdem curvæ, indefiniti gradus existant* (§. 381).

COROLLARIUM.

385. Omnes adeo curvæ algebraicæ familiam quandam componunt, ex innumeris aliis constantem, quarum una quælibet infinita genera complectitur. Cum enim æquationes per quas curvæ definiuntur, ingre-

(*a*) *Geom.* Lib. 2. p. m. 17. & seq.
(*b*) *Act. Erudit. Lipf.* A. 1708. p. 516.
(*c*) *Act. Erudit. Lipf.* A. 1684. p. 234. 235.

ingrediantur facta vel ex potentiis abscissarum & semiordinatarum in coëfficientes datos, vel ex potentiis abscissarum in potentias semiordinatarum, vel ex meris quantitatibus datis; omnes vero æquationes nihilo æquales fieri possint (e. gr. si $ax = y^2$, erit $ax - y^2 = 0$); æquatio pro omnibus curvis algebraicis erit $ay^m + bx^n + cy^r x^s + df = 0$. Signum $+$ in omnibus terminis retinetur, quia in casibus singularibus infinitæ variationes occurrere possunt. Et, si plures potentiæ ejusdem indeterminatæ quantitatis, v. gr. x, occurrunt, coëfficiens termini in formula, v. gr. b, explicatur per omnes ejus coëfficientes, & exponens dignitatis, v. gr. n, per omnes dignitatum exponentes.

DEFINITIO XXXII.

386. *Sectiones conicæ* sunt lineæ curvæ, quæ ex coni sectione oriuntur.

SCHOLION.

387. *Sectiones conicæ præter Circulum sunt tres*, Parabola, Hyperbola & Ellipsis. *Nos præcipuas earum proprietates, quæ scilicet frequentioris sunt usus, ex æquationibus eas definientibus per calculum algebraicum eruemus; quia nobis propositum est, Algebræ ad Geometriam Sublimiorem applicationem exemplis docere; licet non diffiteamur, communes earum proprietates una eademque opera demonstrari, si in solido, seu in cono ex quo secantur, considerentur.*

DEFINITIO XXXIII.

388. *Parabola* est curva, in qua $ax = y^2$; hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex abscissa in rectam constantem, quæ axis *Parameter*, ab aliis *Latus rectum* dicitur.

SCHOLION.

389. *Hanc proprietatem Parabolæ competere assumimus respectu axis: quod vero etiam ipsi competere debeat respectu cujuslibet diametri, inferius demonstrabitur.*

COROLLARIUM I.

390. Est ergo Parabola curva primi generis, & crescentibus abscissis crescunt semiordinatæ; consequenter curva in se non redit.

COROLLARIUM II.

391. Et in ea $x = y^2 : a$ atque $a = y^2 : x$, hoc est, abscissa est tertia proportionalis ad parametrum & semiordinatam, parameter vero tertia proportionalis ad abscissam & semiordinatam.

COROLLARIUM III.

392. Porro $\sqrt{ax} = y$, hoc est, semiordinata est media proportionalis inter parametrum & abscissam.

COROLLARIUM IV.

393. Data itaque parametro AB describi potest Parabola. Continuetur enim pa- Tab.
rameter AB in C, & in B erigatur perpen- III.
dicularis infra lineam AC continuanda in *Fig.* 39.
N. Ex centris ad libitum assumtis, circino usque ad A aperto, ducantur arcus rectam BV in I, II, III, IV, V, &c. rectam vero BC in 1, 2, 3, 4, 5, &c. intersecantes: erunt B1, B2, B3, B4, B5, &c. abscissæ; BI, BII, BIII, BIV, BV, &c. semiordinatæ (§. 327 *Geom.*). Quare si lineæ B1, B2, B3, &c. ex recta BC in BN transferantur, & in punctis 1, 2, 3 &c. normales applicentur 1I = BI, 2II = BII, 3III = BIII, &c. curva per puncta I, II, III &c. transiens Parabola est: BN vero ejus axis (§. 392). Elegantius Pa- Tab.
rabola describitur, si sumto AX pro axe XII.
Parabolæ & puncto A pro vertice, fiat AB *Fig.*
parametro æqualis, & ducta recta CD, quæ 118.
rectam BX ad angulos rectos secet, describantur pro arbitrio circuli quotcunque transeuntes per B & axem secantes in P, P, P &c. erunt enim AP, AP, AP &c. abscissæ, PI = A1, PII = A2, PIII = A3, &c. semiordinatæ Parabolæ (§. 327 *Geom.*).

COROL-

COROLLARIUM V.

Tab. III. Fig. 39. 394. Quodlibet etiam punctum Parabolæ geometrice determinari potest. Ex. gr. quæritur, utrum punctum M sit in Parabola, necne? Demittatur ex M ad BN perpendicularis PM, & fiat PN parametro AB æqualis. Super BN describatur semicirculus. Quodsi enim is transeat per M; erit punctum M in Parabola (§. 327 *Geom.* & §. 392 *Analys.*).

DEFINITIO XXXIV.

Tab. III. Fig. 40. 395. *Focus* est punctum axis F, in quo semiordinata FN æquatur semiparametro.

PROBLEMA CLXXIV.

396. *Invenire distantiam Foci a vertice* AF.

Sit AF $= x$, parameter $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}a$ (§. 395); consequenter

$$\frac{1}{4}a^2 = ax \quad (\text{§. } 388)$$

$$\frac{1}{4}a = x \qquad a \text{ div.}$$

Theorema. In Parabola distantia foci a vertice AF est ad parametrum in ratione subquadrupla, seu quarta pars parametri.

COROLLARIUM I.

397. Quoniam $y^2 = ax$ (§. 388): quadratum semiordinatæ PM est quadruplum rectanguli ex distantia foci a vertice in abscissam $\frac{1}{4}ax$, sive AF. AP.

COROLLARIUM II.

398. Invenitur adeo distantia foci a vertice AF, si ad abscissam quamcunque AP & dimidiam semiordinatam $\frac{1}{2}$PM quæratur tertia proportionalis (§. 327 *Geom.*). Est enim $\frac{1}{4}\text{PM}^2 = \text{AP. AF}$ (§. 377 *Geom.*); consequenter $\text{PM}^2 = 4\,\text{AF. AP}$.

PROBLEMA CLXXV.

399. *Determinare quantitatem rectæ* FM *ex foco* F *ad extremitatem semiordinatæ* M *ductæ.*

Sit AP $= x$. Quoniam AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396) erit PF $= x - \frac{1}{4}a$, vel $\frac{1}{4}a - x$, si AF > PA; consequenter Tab. III. Fig. 40.

$$\text{PF}^2 = x^2 - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{16}a^2$$

$$\text{PM}^2 = \quad ax \quad (\text{§. } 388)$$

$$\text{FM}^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{16}a^2 \quad (\text{§. } 417\ \textit{Geom.})$$

$$\text{FM} = x + \tfrac{1}{4}a.$$

Theorema. Recta FM ex foco F ad extremitatem semiordinatæ Parabolæ ducta æquatur aggregato ex abscissa AP & distantia foci a vertice AF.

COROLLARIUM I.

400. Si quarta pars parametri ex A in f & F transfertur, & per AD parallelæ quotcunque, ipsi in punctis P normales, MM aguntur, tandemque ex F intervallo Pf puncta M determinantur; curva per hæc puncta transiens est Parabola. Tab. III. Fig. 41.

COROLLARIUM II.

401. Potest ergo Parabola etiam continuo motu describi. Nimirum assumta recta pro axe fiat $f\text{A} = \text{AF} = \frac{1}{4}a$. In A firmetur regula DB secans axem fD ad angulos rectos. Extremitati regulæ alterius EC alligetur filum, altero sui extremo in foco F fixum, quod sit $=$ AD $+$ AF. Quodsi stylo ad regulam EC applicato regula EC juxta ductum alterius DB dextrorsum & dein sinistrorsum promoveatur; stylus Parabolam designabit. Est enim constanter $\text{FM} = \text{EM} = \text{P}f = x + \frac{1}{4}a$; consequenter punctum M in Parabola (§. 399).

PROBLEMA CLXXVI.

402. *Invenire rationem semiordinatarum in Parabola.*

Sint abſciſſæ x & v, ſemiordinatæ y & z; erit $y^2 = ax$ & $z^2 = av$ (§. 388); conſequenter

$$y^2 : z^2 = ax : av$$

$$y^2 : z^2 = x : v \quad (\text{§. } 124)$$

$$y : z = \sqrt{x} : \sqrt{v}$$

Theorema. Quadrata ſemiordinatarum ſunt inter ſe ut abſciſſæ: ipſæ autem ſemiordinatæ in ratione ſubduplicata abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXVII.

Tab. III. Fig. 40. 403. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſumma duarum ſemiordinatarum* PM + *pm in differentiam earundem* R*m.*

$$pm + \text{PM} = \sqrt{av} + \sqrt{ax} \quad (\text{§. } 292)$$

$$m\text{R} = \sqrt{av} - \sqrt{ax}$$

$$(\text{PM}+pm)m\text{R} = av - ax = a(v-x) = a.\ \text{P}p$$

Theorema. Rectangulum ex ſumma duarum ſemiordinatarum in differentiam earundem æquatur rectangulo ex parametro in differentiam abſciſſarum.

COROLLARIUM.

404. Eſt ergo parameter ad ſummam duarum ſemiordinatarum, ut earundem differentia ad differentiam abſciſſarum. (§. 299 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXVIII.

405. *Determinare quantitatem rectanguli ex ſemiordinata in abſciſſam.*

Tab. III. Fig. 40. Quoniam PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392); erit PM. AP $= x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3}$ (§. 61). Quare cum ſit $ax : \sqrt{ax^3} = \sqrt{ax^3} : x^3$, hoc eſt, $ax : x\sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$; erit $a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax^3} : x^2$ (§. 124) hoc eſt a : PM = PM. AP : AP².

Theorema. In Parabola eſt rectangulum ex ſemiordinata in abſciſſam ad quadratum abſciſſæ ut parameter ad ſemiordinatam.

PROBLEMA CLXXIX.

406. *Determinare quantitatem rectanguli ex abſciſſa una in alteram.*

Sit abſciſſa una $= x$, altera $= v$; ſemiordinata una $= y$, altera $= z$; erit $x = y^2 : a$ & $v = z^2 : a$ (§. 391), conſequenter $xv = y^2 z^2 : a^2$, adeoque $a^2 : y^2 = z^2 : xv$.

Theorema. In Parabola quadratum parametri eſt ad quadratum ſemiordinatæ unius, ut quadratum ſemiordinatæ alterius ad rectangulum abſciſſarum.

PROBLEMA CLXXX.

407. *Determinare quantitatem chordæ* AM. Tab. III.

Sit parameter $= a$, AP $= x$, erit PM² $= ax$ (§. 388). Quare cum AP² $= x^2$; erit AM² $= ax + x^2$ (§. 417 *Geom.*), $= (a + x)x = (a +$ AP$)$. AP. Fig. 41.

Theorema. In Parabola chorda eſt media proportionalis inter abſciſſam & compoſitam ex parametro & abſciſſa.

DEFINITIO XXXV.

408. Si TM curvam tangit in M, ducatur MR ad tangentem normalis; recta PT inter tangentem TM & ſemiordinatam PM intercepta *Subtangens* vocatur: quæ vero inter ſemiordinatam & normalem intercipitur PR, *Subnormalis* audit. Tab. III. Fig. 42.

COROLLARIUM.

409. Eſt adeo TMR triangulum rectangulum (§. 91 *Geom.*); adeoque ob PM ad AR normalem (§. 329, 267 *Geom.*), PR : PM = PM : PT, & PM : PT = MR : TM, hoc eſt, in omni curva ſubnormalis eſt tertia proportionalis ad ſubtangentem & ſemiordinatam, & normalis eſt ad tangentem ut ſemiordinata ad ſubtangentem.

PRO-

PROBLEMA CLXXXI.

Tab. III. Fig. 42. 410. *Determinare quantitatem subtangentis* PT *& subnormalis* PR *in Parabola.*

Sit AP $= x$, MR ad tangentem TM perpendicularis $= t$, RA $= v$, erit PR $= v - x$, PM$^2 = ax$ (§. 388) & (§. 417 *Geom.*)

$$ax = t^2 - v^2 + 2vx - x^2$$

hoc est

$$x^2 - 2vx + v^2 = 0$$
$$+ ax - t^2$$

Eadem æquatio provenit, si recta TM Parabolam secet, & quidem ad utrumque sectionis punctum. Quoniam itaque in puncto contactus duo illa puncta coincidunt; æquatio duas radices æquales habere debet, coincidentibus nimirum etiam abscissis per x designatis. Quare si fiat $x = z$ seu $x - z = 0$ & inde formetur æquatio $x^2 - 2zx + z^2 = 0$, duas æquales radices continens (§. 329); hæc cum antea inventa eadem esse debet; consequenter

$$-2z = -2v + a$$

Ergo ob $z = x$) $x = v - \frac{1}{2}a$

$$\tfrac{1}{2}a = v - x = \text{PR}$$

Porro (§. 409) PR : PM = PM : PT

hoc est, $\frac{1}{2}a : \sqrt{ax} = \sqrt{ax}$: PT

Ergo PT $= ax : \frac{1}{2}a = 2x$.

Theorema. In Parabola subtangens PT est abscissæ AP dupla; subnormalis vero PR parametri subdupla, adeoque constans.

COROLLARIUM I.

411. Quoniam TA $= x$, & distantia foci a vertice AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396); erit TF $= \frac{1}{4}a + x$. Ergo recta FM ex foco F ad punctum contactus M ducta æquatur rectæ TF (§. 399); consequenter TFM triangulum æquicrurum.

COROLLARIUM II.

412. Quoniam PA $= x$, & AF $= \frac{1}{4}a$ (§. 396), erit PF $= x - \frac{1}{4}a$; consequenter cum sit PR $= \frac{1}{2}a$ (§. 410), FR $= x + \frac{1}{4}a$, adeoque FR = FM (§. 399) = TF (§. 411). Tab. III. Fig. 42.
Circulus igitur, ex foco Parabolæ F per punctum ejus M ductus, subtangentem PT & subnormalem PR determinat; consequenter punctum T, ex quo ducitur tangens TM.

COROLLARIUM III.

413. Quodsi MN ducatur parallela axi AR, erit angulus NMT = FTM (§. 233 *Geom.*). Cumque sit TF = FM (§. 411); erit FTM = FMT (§. 184 *Geom.*); consequenter FMT = NMT (§. 87 *Arithm.*).

PROBLEMA CLXXXII.

414. *Ducta* ON *tangenti* TM, *&* MG *axi* AQ *parallela; determinare rationem segmentorum* HF *&* FN. Tab. III. Fig. 43.

Sit AP = AT (§. 410) $= x$, parameter $= a$, erit PM $= \sqrt{ax}$ (§. 392), PT = IO (ob TO = MI = PI, (§. 257 *Geom.*) $= 2x$ (§. 410). Sit MF = PI $= v$, erit TI $= v + 2x$, IA $= v + x$. Sit denique IQ = FG $= t$, erit OQ = OI + IQ $= 2x + t$, QA $= x + v + t$, & hinc QN$^2 = ax + av + at$ (§. 388). Porro (§. 268 *Geom.*)

OI : IF = OQ : QN

hoc est, OI^2 : IF^2 = OQ^2 : QN^2 (§. 124)

$$4x^2 : ax = (2x + t)^2 : \text{QN}^2$$

$$4x : a = (2x + t)^2 : \frac{a(2x+t)^2}{4x}$$

Est itaq; $a(x + v + t) = a(2x + t)^2 : 4x$

$$4x^2 + 4xv + 4tx = 4x^2 + 4tx + t^2$$

$$4xv = t^2$$

Tab. III. Fig. 43. Quodsi LI dicatur t; reperietur eodem modo $t^2 = 4xv$, reliquis manentibus iisdem. Unde patet, esse LI = IQ. Est vero (§. 268 *Geom.*). OH:OL = HN:LQ & OH:OL = HF:LI, adeoque HN : HF = LQ : LI (§. 167, 173 *Arithm.*). Sed LI = ½ LQ = IQ, *per demonstrata.* Ergo HF = ½ HN = FN (§. 149. *Arith.*).

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MG ex puncto contactus M cum axe parallela ducta eam bifariam secat in F.

COROLLARIUM I.

415. Est ergo MG diameter, HN ejus ordinata, MF abscissa (§. 368, 370, 371).

COROLLARIUM II.

416. Quoniam anguli recti ad G & I *per constr.* aequales sunt (§. 145 *Geom.*) & ob parallelismum rectarum FG & OQ *per construct.* anguli F & O in △△ FNG & OFI aequales sunt (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$$OI : FI = FG : GN$$
$$2x : \sqrt{ax} = \sqrt{4vx} : \sqrt{av}$$

Et quia (§. 417 *Geom.*) $FN^2 = FG^2 + GN^2$ erit $FN^2 = 4vx + av = (a + 4x)v$. Jam cum FM = v, & x respectu puncti M constans; $a + 4x$ est parameter diametri, & quadratum etiam ad diametrum applicatae aequale rectangulo ex parametro in abscissam.

COROLLARIUM III.

417. Recta ex foco ad verticem diametri M ducta est $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399); diameter ergo parametri est rectae illius quadrupla.

PROBLEMA CLXXXIII.

Tab. XII. Fig. 119. 418. *Si* TM *Parabolam tangit in* M & MR *fuerit ad eam normalis, & ex foco* F *ducatur recta* FM *atque* FO *ad* TM *normalis; demittatur etiam ex* R *ad rectam* FM *normalis* RH; *determinare quantitatem segmentorum* MH & FH, *itemque recta* OF.

Sit parameter a, AP = x, erit FM = $\frac{1}{4}a + x$ (§. 399), PR = $\frac{1}{2}a$, & TP = $2x$ (§. 410). Cum TFM sit triangulum aequicrurum (§. 411), erit TO = OM (§. 184 *Geom.*). Quoniam itaque $TM^2 = TP^2 + PM^2$ (§. *cit.*); erit $TM^2 = 4x^2 + ax$ (§. 388); consequenter $OM^2 = x^2 + \frac{1}{4}ax$, quod ex $FM^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}ax + x^2$ subductum relinquit $FO^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ax = (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a$ (§. 417 *Geom.*). Porro $MR^2 = PR^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}a^2 + ax = (\frac{1}{4}a + x)a$. Jam cum in Triang. OFM & HMR anguli ad O & H recti *per hypoth.* sint inter se aequales (§. 145 *Geom.*), & ob parallelismum rectarum MR & FO (§. 256 *Geom.*) anguli F & M aequales (§. 233 *Geom.*); erit (§. 267 *Geom.*).

$$FM : OF = MR : MH$$

adeoq; $FM^2 : OF^2 = MR^2 : MH^2$ (§. 124)
$(\frac{1}{4}a + x)^2 : (\frac{1}{4}a + x)\frac{1}{4}a = (\frac{1}{4}a + x)a : MH^2$
$\frac{1}{4}a + x : \frac{1}{4}a = (\frac{1}{4}a + x)a : MH^2$ (§. 124)
$1 : \frac{1}{4}a = a : MH^2$ (§. *cit.*)

$$MH^2 = \frac{1}{4}a^2$$
$$MH = \frac{1}{2}a = PR$$

Ergo HF = FM − HM = $x - \frac{1}{4}a$ = FP.

Theorema 1. Recta OF ex foco Parabolae F ad tangentem TM ducta est media proportionalis inter quartam partem parametri & rectam FM ex foco F ad punctum Parabolae M ductam.

Theorema

Tab. XII. Fig. 119. *Theorema* 2. Si MR fuerit ad Parabolam in puncto M normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Parabolæ punctum M ductam normalis RH; erit MH subnormali PR & HF portioni axis inter focum F & semiordinatam PM interceptæ æqualis.

PROBLEMA CLXXXIV.

Tab. III. Fig. 42. 419. *Invenire æquationem ad Parabolam externam; hoc est, punctis Parabolæ* M *ad rectam* AO, *quæ ad axem* AR *in vertice* A *perpendicularis, relatis.*

Sit abscissa $AN = x$, semiordinata $NM = y$, parameter $= a$. Quoniam AN *per hypoth.* & PM (§. 368) perpendiculares ad AR; erit AN ipsi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Cum ex eadem ratione NM sit parallela ipsi AR; erit $AN = PM$ & $NM = AP$ (§. 257 *Geom.*); consequenter $PM = x$, $AP = y$, atque ideo $x^2 = ay$ (§. 388).

DEFINITIO XXXVI.

Tab. III. Fig. 44. 420. *Ellipsis* est linea curva, in qua quadratum semiordinatæ PM est ad rectangulum ex segmentis axis AP & PB ut parameter ad axem; hoc est, si $AB = a$, parameter $= b$, $PM = y$, $AP = x$, erit $b : a = y^2 : ax - x^2$, adeoque $ay^2 = abx - bx^2$.

COROLLARIUM I.

421. Est ergo $y^2 = bx - bx^2 : a$, hoc est, quadratum semiordinatæ æquatur rectangulo ex parametro in abscissam, demto tamen alio rectangulo ex eadem abscissa in quartam proportionalem ad axem, parametrum & abscissam.

COROLLARIUM II.

422. Fiat $y = 0$, erit $bx - bx^2 : a = 0$, adeoque $abx = bx^2$, consequenter $a = x$. Patet adeo curvam secare AB in A & B, consequenter in se redire. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM III.

423. Fiat $x = \frac{1}{2}a$. Erit $y^2 = \frac{1}{2}ab - a^2 b : 4a = \frac{1}{4}ab$; consequenter $y = CD = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$. Ergo $DE = 2\sqrt{\frac{1}{4}ab} = \sqrt{ab}$, hoc est, axis minor ED est medius proportionalis inter majorem AB & parametrum; consequenter parameter tertia proportionalis ad axem majorem & minorem.

COROLLARIUM IV.

424. Quia $ay^2 = abx - bx^2$

erit $bx^2 = abx - ay^2$

$bx^2 : (bx - y^2) = a$

Invenitur ergo axis, parametro, abscissa & semiordinata datis; si fiat, 1° $b : y = y : \frac{y^2}{b}$

2° $x - \frac{y^2}{b}$ seu $\frac{bx - y^2}{b} : x = x : a$. Nimirum sit axis AB positione datus, & parameter AL ad eum perpendicularis. Datis abscissa AP & semiordinata PM, fiat $AN = AQ = PM$; ducta NF ipsi LQ parallela, erit $AF = y^2 : b$, consequenter $FP = x - y^2 : b$. Continuetur LA in G, factaque $AH = FP$ & $AG = AP$, ducatur GB ipsi HP parallela: erit $AB = bx^2 : (bx - y^2)$; adeoque axis quæsitus. Tab. XII. Fig. 120.

COROLLARIUM V.

425. Quia $ay^2 = abx - bx^2$ Tab. IV.

erit $ay^2 : (ax - x^2) = b$; Fig. 45.

consequenter 1° $x : y = y : \frac{y^2}{x}$ & 2° $a - x : \frac{y^2}{x} = a : b$. Datis ergo axe AB, abscissa AP & semiordinata PM, ita invenitur parameter AG. 1°. Fiat $AI = PM$, & ex A per M ducatur recta AL. 2°. In I erigatur perpendicularis LI; erit (§. 268 *Geom.*) ob $AP : PM = AI : LI$; $LI = y^2 : x$. 3°. Producatur PM in O, donec $PO = LI = y^2 : x$, & ex B per O ducatur recta BG. 4°. In A excitetur per-

Tab. IV. perpendicularis AG = [ob BP : PO = BA : GA] $ay^2 : (ax - x^2)$: quæ erit parameter AG.

Fig. 45. COROLLARIUM VI.

426. $y = \sqrt{(\frac{abx - bxx}{a})} = \sqrt{(\frac{bx}{a}(a-x))}$.

Datis itaque axe AB & parametro AG, cuilibet abscissæ BP semiordinata PN assignatur, si parametro AG axi AB ad angulos rectos juncta ducatur GB, & erecta perpendiculari PN, fiat PL = PH, tandemque super AL semicirculus describatur. Est enim AB (a) : AG (b) = BP (x) : PH $(bx : a)$, & PN $= \sqrt{}$(AP. PL) $= \sqrt{}$(AP. PH) $= \sqrt{((a-x) \times (bx : a))} = \sqrt{(bx - bx^2 : a)}$.

PROBLEMA CLXXXV.

Tab. III. 427. *Invenire distantiam foci a vertice* AF.

Fig. 44. Sit AB $= a$, parameter $= b$, AF $= x$, erit FR $= \frac{1}{2} b$ (§. 395) &

$$\frac{1}{4} ab^2 = abx - bx^2 \quad (§. 420)$$
$$\frac{1}{4} ab = ax - x^2$$
$$x^2 - ax = -\frac{1}{4} ab$$
$$\frac{1}{4} a^2 \qquad \frac{1}{4} a^2$$
$$x^2 - ax + \frac{1}{4} a^2 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab$$
$$\frac{1}{2} a - x = \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$$
$$\frac{1}{2} a - \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b)} = x$$

Constructio. Ex B in L transferatur dimidia parameter, erit CL $= \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$. In centro C erigatur perpendicularis CK occurrens semicirculo super AL descripto in K, erit CK $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$. Fiat itaque CF = CK; erit in F focus.

Tab. IV. Fig. 46. *Aliter.* Quoniam $\sqrt{\frac{1}{4} ab}$ = CD, (§. 423) si intervallo DF $= \frac{1}{2} a$ intersecetur AB in F, erit in F focus. Nam CD² $= \frac{1}{4} ab$ & DF² $= \frac{1}{4} a^2$. Ergo CF $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$, ut ante.

Æquatio secunda sequens suppeditat *Theorema.* Si axis AB in foco F secetur; erit rectangulum ex segmentis axis AF. FB subquadruplum rectanguli ex parametro in axem, seu quadrato axis dimidii minoris CD æquale. Tab. III. Fig. 44.

COROLLARIUM.

428. Distantia foci a centro est $= \sqrt{(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} ab)}$, hoc est quadratum ejus est differentia quadratorum DC & AC.

PROBLEMA CLXXXVI.

429. *Invenire rationem ordinatarum* PM *&* pm *in Ellipsi.*

Sit AB $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = z$, $pm = v$; erit

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= bx - bx^2 : a \\ v^2 &= bz - bz^2 : a \end{aligned}\right\} (§. 421).$$

Ergo $y^2 : v^2 = bx - \frac{bx^2}{a} : bz - \frac{bz^2}{a}$

h. e. $y^2 : v^2 = ax - x^2 : az - z^2$

seu PM² : pm^2 = AP. BP : Ap. pB

Theorema. In Ellipsi quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex axis segmentis.

COROLLARIUM I.

430. Est igitur etiam DC² : PM² = CB² : AP. PB, consequenter DC² : CB² = PM² : AP. PB (§. 173 *Arithm.*), hoc est, quadratum axis minoris est ad quadratum majoris ut quadratum semiordinatæ ad rectangulum ex axis segmentis.

COROLLARIUM II.

431. Sit CP $= x$; erit AP $= \frac{1}{2} a - x$, & PB $= \frac{1}{2} a + x$; consequenter AP. PB $= \frac{1}{4} a^2 - x^2$. Habemus adeo (§. 430)

$$\frac{1}{4} ab : \frac{1}{4} a^2 = y^2 : \frac{1}{4} a^2 - xx$$
hoc est $b : a =$
$$ay^2 = \frac{1}{4} a^2 b - bx^2$$
$$y^2 = \frac{1}{4} ab - bx^2 : a$$

En æquationem aliam, quæ naturam Ellipsis definit, abscissis a centro C computatis.

COROL-

COROLLARIUM III.

Tab. III. Fig. 44. 432. Sit $CD = d$, $AC = r$, $PC = x$; erit $AP = r - x$ & $PB = r + x$; consequenter $AP.PB = r^2 - x^2 = AC^2 - PC^2$. Habemus ergo, ut ante

$$d^2 : r^2 = y^2 : r^2 - x^2$$

unde
$$r^2 y^2 = d^2 (r^2 - x^2)$$
$$y^2 = d^2 (r^2 - x^2) : r^2$$

En æquationem adhuc aliam, quæ itidem Ellipsis naturam definit, abscissis denuo a centro C computatis, & qua in subsequentibus ob commoditatem utemur.

COROLLARIUM IV.

433. Crescentibus adeo abscissis x, semiordinatæ decrescere debent. Quodsi tandem fiat $x = r$; erit $r^2 - x^2 = 0$; consequenter $y^2 = 0$, adeoque Ellipsis cum axe tandem concurrit. Unde porro intelligitur, Ellipsin esse lineam in se redeuntem.

PROBLEMA CLXXXVII.

Tab. IV. Fig. 46. 434. *Determinare quantitatem rectarum* FM *&* fM *ex utroque foco* F *&* f *ad idem peripheriæ punctum* M *ductarum.*

Sint $FC = fC = c$, reliqua ut ante: erit $PC = \frac{1}{2}a - x$, $Pf = c + \frac{1}{2}a - x$, $PF = c - \frac{1}{2}a + x$, adeoque $PF^2 = c^2 - ac + \frac{1}{4}a^2 + 2cx - ax + x^2$, $= (\frac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + x^2$; $Pf^2 = c^2 + ac + \frac{1}{4}a^2 - 2cx - ax + x^2 = (\frac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + x^2$. Est vero (§.430),

$$CB^2 : DC^2 = AP.PB : PM^2$$
$$\tfrac{1}{4}a^2 : \tfrac{1}{4}a^2 - c^2 = ax - xx : PM^2$$

Habemus adeo

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$PF^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - ax + xx$$
$$FM^2 = (\tfrac{1}{2}a - c)^2 + 2cx - \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$

Porro

Tab. IV. Fig. 46.

$$PM^2 = ax - xx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4ccxx}{aa}$$
$$Pf^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - ax + xx$$
$$fM^2 = (\tfrac{1}{2}a + c)^2 - 2cx - \frac{4ccx}{a} + \frac{4c^2x^2}{aa}$$
$$fM = \tfrac{1}{2}a + c - 2cx : a$$
$$FM = \tfrac{1}{2}a - c + 2cx : a$$
$$fM + FM = a = AB$$

Theorema. Summa rectarum FM & fM ex utroque foco F & f ad idem peripheriæ punctum M ductarum æquatur axi majori AB.

COROLLARIUM I.

435. Datis ergo axibus conjugatis, Ellipsis facillime describitur. Determinatis enim focis F & f (§.427), clavi in iis defigantur & his filum circumligetur FMf axi majori AB æquale. Quodsi immisso stylo filum extendatur & circa clavos circumducatur, Ellipsis designabitur.

COROLLARIUM II.

436. Immo eodem modo geometrice determinatur quodlibet punctum Ellipseos M. Axis enim AB dividatur pro arbitrio utcunque in duas partes, & parte una ex foco F, altera ex foco f describuntur arcus: duo enim hi arcus se mutuo secabunt in puncto M. Possunt autem una eademque opera quatuor simul determinari puncta, singula nempe in singulis quadrantibus AD, DB, BE & EA.

PROBLEMA CLXXXVIII.

Tab. III. Fig. 44. 437. *Determinare quantitatem rectæ* MR *ex quovis Ellipsis puncto* M *ad axem conjugatum* DC *perpendicularis.*

Sit $MR = PC = v$, $AC = r$; erit $AP = r - v$, & $PB = r + v$. Sit $DR = z$, $DC = c$; erit $RC = PM = c - z$; consequenter (§.430)

DC²:

Tab. III. Fig. 44.

$DC^2 : CB^2 = PM^2 : AP.\ PB$

$cc : rr = z^2 - 2cz + c^2 : r^2 - v^2$

$c^2 : z^2 - 2cz + c^2 = r^2 : r^2 - v^2$ (§.173 *Arith.*)

$2cz - z^2 : c^2 = v^2 : r^2$ (§.193 *Arithm.*)

$2cz - z^2 : v^2 = c^2 : r^2$ (§.173 *Arithm.*)

$DR.\ RE : RM^2 = DC^2 : AC^2$.

Theorema. Rectangulum ex segmentis axis conjugati est ad quadratum semiordinatæ ipsius, ut quadratum axis conjugati ad quadratum axis majoris.

COROLLARIUM I.

438. Habent ergo ad axem conjugatum coordinatæ eandem relationem, quæ inter coordinatas ad axem majorem intercedit.

COROLLARIUM II.

439. Quoniam $v^2 = \frac{2r^2z}{c} - \frac{r^2z^2}{c^2}$ (§.437); si fiat $2r^2 : c = p$, erit $v^2 = pz - pz^2 : 2c$. Est adeo p parameter axis conjugati (§.420). Quare parameter axis conjugati tertia proportionalis ad $2c$ & $2r$, seu ad axem conjugatum & axem majorem.

PROBLEMA CLXXXIX.

Tab. IV. Fig. 47.

440. *Determinare subtangentem* PT *& subnormalem* PR *in Ellipsi.*

Eadem prorsus methodo utendum, qua in Parabola usi sumus. Nimirum sit parameter $= b$, axis major $= a$, AP $= x$, PM $= y$, MR $= t$, RA $= z$; erit PR $= z - x$, consequenter $PM^2 = t^2 - z^2 + 2zx - x^2$. Est vero etiam $PM^2 = bx - bx^2 : a$ (§.421). Quare

$t^2 - z^2 + 2zx - x^2 = bx - bx^2 : a$

$at^2 - az^2 + 2azx - ax^2 = abx - bx^2$

$ax^2 - bx^2 + abx - 2azx + az^2 - at^2 = 0$

$$x^2 + \frac{ab - 2az}{a - b}x + \frac{az^2 - at^2}{a - b} = 0$$

Cum ex superioribus constet, æquationem hanc duas habere debere radices æquales; ponatur ut supra (§.410) $x - v = 0$, erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, æquatio eadem cum anteriore, consequenter

Tab. IV. Fig. 47.

$(ab - 2az) : (a - b) = -2v$

$ab - 2az = -2av + 2bv$

$ab + 2av - 2bv = 2az$

$\frac{1}{2}b + v - bv : a = z$

Est vero $v = x$, *per hypoth.* Quare si x pro v substituatur, prodibit $z = \frac{1}{2}b + x - bx : a =$ AR. Ergo PR $= \frac{1}{2}b + x - bx : a - x = \frac{1}{2}b - bx : a = (\frac{1}{2}ab - bx) : a$, quæ expressio hanc suppeditat analogiam:

$a : b = \frac{1}{2}a - x :$ PR

Theorema. In Ellipsi est ut axis primus ad parametrum, ita distantia semiordinatæ a centro ad subnormalem.

Porro PR : PM = PM : PT (§.409).

$$\frac{\frac{1}{2}ab - bx}{a} : y = y : \frac{ay^2}{\frac{1}{2}ab - bx}$$

Est vero $ay^2 = abx - bx^2$ (§.420). Ergo PT $= (abx - bx^2) : (\frac{1}{2}ab - bx) = (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x)$. Habemus adeo

$\frac{1}{2}a - x : x = a - x :$ PT

PC : AP = PB : PT

Ergo PB. AP = CP. PT

Theorema. In Ellipsi rectangulum ex segmentis axis æquatur rectangulo ex distantia semiordinatæ a centro in subtangentem.

Tandem AT = PT − AP $= (ax - x^2) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - x^2 - \frac{1}{2}ax + x^2) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$. Quare

$\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a = x :$ AT

PC : AC = AP : AT

Theo-

Tab. IV. Fig. 47. *Theorema.* Ut distantia semiordinatæ a centro ad axem dimidium, ita abscissa ad portionem subtangentis inter verticem Ellipsis & tangentem interceptam.

COROLLARIUM I.

441. Quia PC : AC = AP : AT; erit etiam PC : AP = AC : AT (§. 173 *Arithm.*); consequenter PC : PC + PA = AC : CA + AT (§. 190 *Arithm.*), hoc est, PC : AC = AC : CT.

COROLLARIUM II.

442. Est ergo AC^2 = PC. CT (§. 377 *Geom.*), hoc est quadratum dimidii axis AC æquatur rectangulo ex CT in PC.

COROLLARIUM III.

443. Crescentibus abscissis x, decrescit $\frac{1}{2}a - x$; consequenter ratio $\frac{1}{2}a - x : \frac{1}{2}a$ minuitur (§. 203 *Arithm.*). Abscissa igitur major ad AT rationem minorem habet quam minor (§. 440).

COROLLARIUM IV.

444. Si $x = \frac{1}{2}a$, hoc est, quando AC fit abscissa, $\frac{1}{2}a - x = 0$; consequenter abscissa rationem infinitam habet ad AT, adeoque tangens TM cum subtangente TP nunquam concurrit. Est igitur axi parallela.

COROLLARIUM V.

445. Hinc vero ulterius liquet, quantitatem finitam AC respectu infinitæ pro nihilo habendam esse.

PROBLEMA CXC.

446. *Determinare quantitatem rectanguli ex subtangente* PT *in abscissam* CP.

Sit PC $= x$, PT $= t$, AC $= r$; erit AP $= r - x$, & PB $= r + x$, CT $= t + x$. Quoniam (§. 441)

PC : AC = AC : CT

$$x : r = r : t + x$$

erit $$tx + xx = r^2$$

$$tx = r^2 - x^2 = \text{AP. PB}$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente PT in abscissam CP æquatur rectangulo ex segmentis axis. Tab. IV. Fig. 47.

PROBLEMA CXCI.

447. *Determinare valorem subtangentis* PT, *abscissis a centro computatis.*

Sit AC $= r$, PC $= v$, erit PB $= r + v$, AP $= r - v$; consequenter (§. 440)

PC : PB = AP : PT

$$v : r + v = r - v : t$$

$$tv = r^2 - v^2$$

Theorema. Rectangulum ex subtangente & distantia ordinatæ a centro æquatur differentiæ quadrati hujus distantiæ a quadrato semiaxis transversi.

PROBLEMA CXCII.

448. *Determinare quantitatem subtangentis* KE *in axe conjugato.*

Si tangens TM continuetur, donec axi conjugato continuato in E occurrat, & ex M demittatur perpendicularis MK = PC (§. 226 *Geom.*), erit ob parallelismum rectarum KM & CT (§. 256) angulus T = EMK (§. 233 *Geom.*). consequenter (§. 267 *Geom.*)

TP : PM = MK : KE

$$\frac{r^2 - v^2}{v} : y = v : \frac{v^2 y}{r^2 - v^2}$$

Quodsi fiat DC $= c$, DK $= z$, erit KC = PM $= y = c - z$ & $v^2 = \frac{2r^2 z}{c} - \frac{r^2 z^2}{c^2}$ (§. 437). Hinc $r^2 - v^2 = (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) : c^2$, & $v^2 y (= 2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : c^2$. Quare $v^2 y : (r^2 - v^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2)(c - z) : (c^2 r^2 - 2r^2 cz + r^2 z^2) = (2r^2 cz - r^2 z^2) : (cr^2 - r^2 z) = (2cz - z^2) : (c - z)$.

Expressio itaque subtangentis in axe conjugato eadem, quæ in transverso (§. 440).

PROBLEMA CXCIII.

Tab. IV. Fig.48.

449. *Si recta* HN *tangenti* TM *parallela ducatur, & punctum contactus* M *atque centrum* C *jungantur recta* MC, *quæ secat* HN *in* G; *determinare rationem rectarum* HG *&* GN.

Sit AB $= a$, PM $= y$, PC $= c$, FG $=$ KD $= t$, GI $=$ KS $= z$, erit IF $=$ HL $=$ DS $= t - z$, HL$^2 = t^2 - 2tx + z^2$. Opera nunc danda, ut HL^2 alia adhuc ratione exprimatur. Est itaque (§. 268 *Geom.*)

PM : PC $=$ FG : FC

$y : c = t : (tc : y)$

Et quia △ TMP ∽ FOG (§. 233 & 267 *Geom.*), & GIH ∽ FOG (§. 268 *Geom.*); erit etiam TMP ∽ GIH; consequenter (§. 267 *Geom.*)

PM : PT $=$ GI : HI

$$y : \frac{ax - x^2}{c} = z : \frac{(ax - x^2)z}{cy} \text{ (§. 440)}$$

Ponamus brevitatis gratia $ax - x^2 = v$; erit FL $=$ HI $= vz : cy$. Ergo CL $=$ FL $+$ FC $= tc : y + vz : cy = (tc^2 + vz) : cy$. Hinc AL $=$ AC $-$ CL $= \frac{1}{2}a - (tc^2 + vz) : cy = (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy$ & BL $=$ AB $-$ AL $= a - (\frac{1}{2}acy - tc^2 - vz) : cy = (\frac{1}{2}acy + tc^2 + vz) : cy$. Est vero (§. 429)

AP. PB : LA. LB $=$ PM^2 : HL

$$x^2 : \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2}{c^2y^2} = y^2 : \text{HL}^2$$

Hinc HL$^2 =$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z}{c^2v} = t^2 - 2tz + z^2$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - 2tc^2vz - v^2z^2 = t^2c^2v - 2tc^2vz + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - v^2z^2 = t^2c^2v + z^2c^2v$$

$$\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v = v^2z^2 + c^2vz^2$$

$$\frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^2 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v} = z^2$$

Quodsi jam KN dicatur z, reliqua maneant ut ante; reperietur eodem modo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}a^2c^2y^2 - t^2c^4 - t^2c^2v}{v^2 + c^2v}$, consequenter KN$^2 =$ KS^2, adeoque & KN $=$ KS. Tab. IV. Fig.48.

Est vero (§. 268 *Geom.*) KN : KS $=$ GN : HG. Ergo GN $=$ HG.

Theorema. Si recta HN tangenti TM parallela ducatur, recta MC per contactum M & centrum Ellipsis C transiens eam bifariam secat.

COROLLARIUM I.

450. Est ergo MQ diameter, HN ejus ordinata (§. 368, 370). Tab. IV. Fig.49.

COROLLARIUM II.

451. Cum vero parallelæ HN quamcunque aliam, & rectæ MQ itidem quamcunque aliam substituere liceat; omnes rectæ per centrum transeuntes & in peripheria utrinque terminatæ sunt diametri, ipsisque coordinatæ sunt tangentibus parallelæ.

COROLLARIUM III.

452. Est ergo etiam ECV ordinatæ HN parallela & per centrum C transiens diameter, consequenter MQ & EV sunt diametri conjugatæ (§. 374).

PROBLEMA CXCIV.

453. *Si ex diametri* VE *tangenti* TM *parallelæ extremitate* V *perpendicularis* VR *demittatur in axem* AB; *determinare quantitatem rectæ* RC.

Sit CA $= r$, CR $= v$, PT $= t$, PC $= x$; erit AR $= r - v$, RB $= r + v$; consequenter AP. PB $= tx$ (§. 446), AR. RB $= r^2 - v^2 = tx + x^2 - v^2$ (§. 447). Quoniam VE ipsi TM parallela, *per hypoth.* erit MTC $=$ TCV (§. 233 *Geom.*). Quare cum anguli ad P & R sint recti,

per

Tab. IV. *Fig.* 49. *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*), PM : RV = TP : RC. Hinc $PM^2 : RV^2 = TP^2 : RC^2$ (§. 124). Est vero etiam $PM^2 : RV^2 = AP.PB : AR.RB$ (§. 429). Ergo (§. 167 *Arithm.*)

$$AP.PB : AR.RB = TP^2 : RC^2$$

$$tx : tx + x^2 - v^2 = t^2 : v^2$$

$$tv^2 x = t^2 x + t^2 x^2 - t^2 v^2$$

$$v^2 x = t^2 x + tx^2 - tv^2$$

$$tv^2 + xv^2 = t^2 x + tx^2$$

$$v^2 = tx$$

hoc est, $CR^2 = AP.PB$.
consequenter $AP : CR = CR : PB$.

PROBLEMA CXCV.

454. *Determinare quantitatem semiordinatae* GH *ad diametrum Ellipsis* MQ.

Ductis KI ipsi FD & KG ipsi AB parallelis, fiat $CP = x$, $AC = r$, $PT = t$, $PM = y$, $KG = IL = m$, $LC = n$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : PM = CL : LG$$

$$x : y = n : \frac{ny}{x}$$

Porro ob parallelas TM & HN *per constr.* ang. TSI = KHG (§. 233 *Geom.*) adeoque ob rectos ad I & K *per constr.* T = HGK (§. 246 *Geom.*), & hinc (§. 267 *Geom.*).

$$TP : PM = KG : KH$$

$$t : y = m : \frac{my}{t}$$

$$HI = KI - KH = \frac{ny}{x} - \frac{my}{t}$$

$$CI = CL + LI = n + m$$

$$HI^2 = \frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2}$$

$$CI^2 = n^2 + 2mn + m^2$$

$AI.IB = AC^2 - CI^2 = r^2 - n^2 - 2mn - m^2$ (§. 432). Tab. IV. *Fig.* 49.

Est vero (§. 429)

$$AP.PB : AI.IB = PM_2 : HI^2$$

$$r^2 - x^2 : r^2 - n^2 - 2mn - m^2 = y_2 : HI^2$$

Unde elicitur $HI^2 = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$

Quare

$$\frac{n^2y^2}{x^2} - \frac{2mny^2}{tx} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - 2mny^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

Sed $\frac{2mny^2}{tx} = \frac{2mny^2}{r^2 - x^2}$ (§. 446). Ergo

$$\frac{n^2y^2}{x^2} + \frac{m^2y^2}{t^2} = \frac{r^2y^2 - n^2y^2 - m^2y^2}{r^2 - x^2}$$

$$\overline{}\, y^2$$

$$\frac{n^2}{x^2} + \frac{m^2}{t^2} = \frac{r^2 - n^2 - m^2}{r^2 - x^2}$$

$$\overline{}\, x^2$$

$$n^2 + \frac{m^2x^2}{t^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2}{r^2 - x^2} - n^2$$

$$\frac{m^2x^4}{t^2x^2} = \frac{r^2x^2 - n^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2 + n^2x^2}{r^2 - x^2}$$

$$= \frac{r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2}{r^2 - x^2}$$

hoc est, ob $t^2x^2 = (r^2 - x^2)^2$ (§. 446)

$$m^2x^4 = (r^2x^2 - m^2x^2 - r^2n^2)(r^2 - x^2)$$

$$= r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + m^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^4x^2 - r^2m^2x^2 - r^4n^2 - r^2x^4 + r^2n^2x^2$$

$$0 = r^2 - m^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} - x^2 + n^2$$

$$m^2 = r^2 + n^2 - x^2 - \frac{r^2n^2}{x^2} = KG^2.$$

Sit jam $CM = v$, erit (§. 268 *Geom.*)

$$CP : CM = CL : CG$$

$$x : v = n : (vn : x)$$

Ergo $MG = MC - CG = v - vn : x$, & GQ = GC

Tab. IV. Fig. 49. $= GC + MC = v + vn : x$, MG. GQ $= v^2 - v^2 n^2 : x^2$

Quodsi $v^2 - v^2 n^2 : x^2 = MG.GQ$ multiplices per $r^2 - x^2 = CR^2$ (§. 453) & $r^2 + n^2 - x^2 - r^2 n^2 : x^2 = KG^2$ per $v^2 = CM^2$; utrobique prodit $r^2 v^2 + n^2 v^2 - x^2 v^2 - r^2 n^2 v^2 : x^2$. Est itaque MG. QG. $CR^2 = KG^2$. CM^2, adeoque (§. 299 *Arithm.*) $KG^2 : CR^2 = MG.\ QG : CM^2$. Jam ob parallelas EV & HN, *per hypoth.* MCV $=$ MGH (§. 233 *Geom.*), & ob parallelas KG & RC, *per constr.* MGK $=$ MCR (§. *cit.*). Ergo KGH $=$ RCV (§. 91 *Arith.*), consequenter $KG^2 : CR^2 = HG^2 : CV^2$ (§. 267 *Geom.* & §. 260 *Arithm.*). Unde tandem habetur (§. 167 *Arithm.*) MG. QG : $CM^2 = HG^2 : CV^2$.

Theorema. In Ellipsi est quadratum semiordinatæ ad quadratum semidiametri conjugatæ ut rectangulum ex segmentis diametri ad quadratum semidiametri.

COROLLARIUM.

455. Sit MQ $= a$, EV $= c$, MG $= x$, HG $= y$, erit GQ $= a - x$; consequenter (§. 454)

$$ax - x^2 : \tfrac{1}{4}a^2 = y^2 : \tfrac{1}{4}c^2$$

$$\tfrac{1}{4}c^2 ax - \tfrac{1}{4}c^2 x^2 = \tfrac{1}{4}a^2 y^2 \qquad \tfrac{1}{4}a$$

$$c^2 x - \frac{c^2 x^2}{a} = ay^2$$

Fiat $\dfrac{c^2}{a} = b$, erit $c^2 = ab$.

Hinc $abx - bx^2 = ay^2$.

Eadem ergo est relatio semiordinatarum ad diametros, quæ ad axem (§. 420), & diametri parameter est tertia proportionalis ad diametros a & c.

SCHOLION.

456. *Cum ex hac æquatione fundamentali reliquas Ellipsis proprietates respectu axis deduxerimus; evidens est, omnes quoque istas proprietates Ellipsi competere intuitu diametri.*

PROBLEMA CXCVI.

457. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem Ellipsis* TM *perpendicularis.* Tab. XII. Fig. 119.

Sit RM ad tangentem TM normalis: erunt MR & OF inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*); adeoque TR : RM $=$ TF : FO (§. 268 *Geom.*). Porro cum in triangulo rectangulo TMR semiordinata PM sit ad hypothenusam TR perpendicularis (§. 368, 370); erit $\triangle$ PMR $\backsim$ $\triangle$ TMR (§. 329 *Geom.*), adeoque TR : RM $=$ RM : PR (§. 267 *Geom.*). Est ergo RM : PR $=$ TF : FO (§. 167 *Arithm.*); consequenter FO. RM $=$ PR. TF (§. 378 *Geom.*).

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari FO.

PROBLEMA CXCVII.

458. *Si in* F *fuerit focus Ellipsis &* MR *ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco ad punctum contactus ductam; determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF. Tab. XII. Fig. 119.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit FM $= \frac{1}{2}a - c + 2cx : a$ (§. 434), PR $= (\frac{1}{2}ab - bx) : a$ (§. 440), AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ (§. *cit.*) & AF $= \frac{1}{2}a - c$, consequenter TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x) + \frac{1}{2}a - c = ax : (a - 2x) + \frac{1}{2}a - c = (\frac{1}{2}a^2 - ac + 2cx) : (a - 2x)$. Ducatur FO ad tangentem TM normalis, erit OF parallela ipsi MR (§. 256 *Geom.*); adeoque angulus OFM ipsi HMR æqualis (§. 233 *Geom.*) & hinc

Tab. XII. *Fig.* 119. & hinc, ob rectos ad O & H æquales (§.145 *Geom.*), reperitur (§.267 *Geom.*) FM: FO = MR: MH, hoc est, FM: $\frac{PR.TF}{MR}$ = MR : MH (§.457). Est itaque MH = (PR. TF) : FM; consequenter FM : TF = PR : MH. Quare

$$\tfrac{1}{2}a-c+\frac{2cx}{a}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=\frac{ab-2bx}{2a}:MH$$

$$a^2-2ac+4cx:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=ab-2bx:MH$$

(§.184 *Arith.*)

$$\frac{a^2-2ac+4cx}{a-2x}:\frac{\frac{1}{2}a^2-ac+2cx}{a-2x}=b:MH$$

(§.183 *Arith.*)

Est ergo MH $=\frac{1}{2}b$ (§.149 *Arith.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Ellipsin normalis, & ex R ducatur ad rectam FM ex foco F in idem Ellipseos punctum M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XXXVII.

459. *Hyperbola* est linea curva, in qua $ay^2 = abx + bxx$, hoc est, $b:a = y^2 : ax + x^2$, seu quadratum semiordinatæ est ad rectangulum ex abscissa in rectam compositam ex eadem abscissa & recta quadam constante, quæ *Axis transversus*, *vel Latus transversum* audit, ut recta alia constans, quæ *axis Parameter* dicitur, ad axem transversum.

COROLLARIUM.

460. Est ergo etiam hic ut in Ellipsi $y^2 = bx + bx^2 : a$, $b = ay^2 : (ax + xx)$, $a = bxx : (y^2 - bx)$ &c. nisi quod hic contraria signa occurrant (§.421 & seqq.).

DEFINITIO XXXVIII.

461. In Hyperbola *Axis conjugatus* dicitur media proportionalis inter axem transversum & parametrum, quia talis est axis conjugatus in Ellipsi (§.423).

DEFINITIO XXXIX.

462. Si axis transversus AB axi AX in directum jungitur & in C bifariam dividitur; punctum C *Centrum* appellatur. Tab. III. Fig. 37.

PROBLEMA CXCVIII.

463. *Datis parametro & axe transverso* AB, *invenire distantiam foci a vertice* AF.

Sit parameter $= b$, AB $= a$, erit FN $= \frac{1}{2}b$ (§.395) & (§.459),

$$b : a = \tfrac{1}{4}bb : ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}abb = abx + bxx$$

$$\tfrac{1}{4}ab = ax + xx$$

$$\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab = \tfrac{1}{4}aa + ax + xx$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} = \tfrac{1}{2}a + x$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}ab)} - \tfrac{1}{2}a = x$$

Invenitur adeo x quærendo inter $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ mediam proportionalem, ac inde auferendo $\frac{1}{2}a$. Vel, quia $\sqrt{\frac{1}{4}ab}$ = CE (§.461), si fiat AG = EC, erit GC $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)}$. Quare cum sit AC $= \frac{1}{2}a$, si ex centro C radio CG describatur arcus GF axem secans in F, erit AF $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}ab)} - \frac{1}{2}a$, adeoque in F focus.

COROLLARIUM I.

464. Est adeo distantia foci a centro FC $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}ab)}$. Quare si FC$^2 = c^2$, erit CE$^2 = c^2 - \frac{1}{4}a^2$.

COROLLARIUM II.

465. Quia $ax + xx = \frac{1}{4}ab$ & $ax + xx$ = AF. FB, $\frac{1}{4}ab$ vero quadratum semiaxis conjugati (§.461), rectangulum ex AF in FB huic quadrato æquale est.

PROBLEMA CXCIX.

Tab. III. Fig. 40. 466. *Invenire rationem semiordinatarum* PM *&* *pm.*

Sit axis transversus $= a$, parameter $= b$, AP $= x$, PM $= y$, A$p = v$, $pm = z$; erit (§.460)

$$y^2 : z^2 = bx + \frac{bxx}{a} : bv + \frac{bv^2}{a}.$$

$$= ax + xx : av + v^2 \text{ (§.124).}$$

$$= (a + x)x : (a + v)v$$

Theorema. In Hyperbola quadrata semiordinatarum sunt inter se ut rectangula ex abscissa in rectam quandam compositam ex abscissa & axe transverso.

COROLLARIUM.

467. Crescentibus adeo abscissis x, crescunt quoque rectangula $ax + x^2$, consequenter & quadrata semiordinatarum y^2, adeoque semiordinatae ipsae. Hyperbola igitur continuo ab axe recedit.

PROBLEMA CC.

468. *Invenire rationem axis transversi ad axem conjugatum.*

Si axis transversus $= a$, parameter $= b$, erit quadratum axis conjugati $= ab$ (§.461). Hoc ergo ad quadratum transversi, ut ab ad aa, hoc est, ut b ad a (§.124).

Theorema. Quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi, ut parameter ad axem transversum.

COROLLARIUM.

Tab. III. Fig. 37. 469. Quoniam $b : a = PM^2 : AP . PB$ (§. 459); quadratum axis conjugati est ad quadratum transversi ut quadratum semiordinatae ad rectangulum ex abscissa in compositam ex abscissa & axe transverso.

PROBLEMA CCI.

Tab. III. Fig. 37. 470. *Sint duae Hyperbolae aequales, eandem parametrum, eundem axem transversum atque conjugatum habentes, quarum axes* AN *&* BY *cum axe transverso communi* AB *in directum jacent. Ex focis* F *&* f *ad punctum* M *Hyperbolae unius ducantur rectae* fM *&* FM: *determinare quantitatem harum rectarum.*

Sit FC $= f$C $= c$, reliqua ut in praecedentibus: erit AF $= c - \frac{1}{2}a$, A$f = c + \frac{1}{2}a$, PF $= x - c + \frac{1}{2}a$, P$f = c + \frac{1}{2}a + x$

$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2,$$

$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2.$$

Jam (§.464) quadratum semiaxis conjugati CE $= cc - \frac{1}{4}aa$. Porro (§.469)

$$AC^2 : CE^2 = AP . BP : PM^2$$

$$\tfrac{1}{4}aa : cc - \tfrac{1}{4}aa = ax + xx : PM^2$$

Est itaque

$$PM^2 = -ax - xx + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$PF^2 = x^2 - 2cx + c^2 + ax - ac + \tfrac{1}{4}a^2$$

$$FM^2 = c^2 - ac + \tfrac{1}{4}a^2 - 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

Similiter

$$PM^2 = -ax - x^2 + 4c^2x : a + 4c^2x^2 : a^2$$

$$Pf^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + ax + x^2$$

$$fM^2 = c^2 + ac + \tfrac{1}{4}a^2 + 2cx + \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a}$$

$$fM = c + \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$FM = c - \tfrac{1}{2}a + 2cx : a$$

$$fM - FM = a = AB$$

COROLLARIUM I.

Tab. IV. Fig. 50. 471. Datis ergo axe transverso & distantia a vertice, Hyperbola motu continuo ita describitur. Scilicet in focis F & f defigantur clavi aut paxilli, quorum alteri in F annectatur filum FMC, altero sui extremo C regulae Cf alligatum, quae ipsum superet axe transverso AB. Altera regulae extremitas perforata clavo f injiciatur, & stilo ad filum applicato regula emoveatur.

COROL-

COROLLARIUM II.

Tab. IV. Fig. 50. 472. Iisdem datis, puncta quotcunque Hyperbolæ determinantur, si ex foco f intervallo quocunque AB majore describatur arcus, facto $fb =$ AB, intervallo residuo bm ex F ducatur arcus alius priorem in m intersecans, erit enim ob $fm - Fm =$ AB, m punctum hyperbolæ (§. 470) Vel commodius hyperbola ita describitur: Fiat AB axi transverso æqualis, determinenturque foci f & F (§. 463.). Jungatur ipsi fO recta fK sub angulo acuto quocunque, & ex centro f radiis ipsa fA majoribus describantur arcus quotcunque concentrici secantes rectam fK in I, II, III, &c. Fiat fL = AB, & ex foco F intervallis LI, LII, LIII &c. intersecentur arcus isti utrinque in 1, 2, 3; erunt puncta 1, 2, 3 &c. in Hyperbola. Est enim fI = f1, fII = f2, fIII = f3 &c. (§. 40 *Geom.*). Sed F1 = LI, F2 = LII, F3 = LIII &c. *per constr.* Ergo $f1 - F1 = fI - LI =$ AB, $f2 - F2 = fII - LII =$ AB, $f3 - F3 = fIII - LIII =$ AB &c. consequenter puncta 1, 2, 3, &c. in Hyperbola (§. 470).

Tab. XII. Fig. 121.

PROBLEMA CCII.

Tab. IV. Fig. 51. 473. *Determinare situm rectæ* DE, *quæ per verticem* A *ipsi ordinatæ* Mm *parallela ducitur.*

Sit AP $= x$, PM $= y$, parameter $= b$, axis transversus $= a$: erit $y^2 = bx + bx^2 : a$ (§. 460). Quoniam in vertice A sit $x = 0$; erit etiam $y = 0$; consequenter DE tota extra Hyperbolam cadit, eamque adeo tangit.

Theorema. Si recta DE per verticem A ordinatis Mm parallela ducatur; Hyperbolam in A tangit.

DEFINITIO XL.

Tab. IV. Fig. 51. 474. Si recta DE per verticem Hyperbolæ A ordinatis Mm parallela ducatur, fiatque axi conjugato æqualis, nempe pars DA & AE semiaxi; præterea ex centro C per D & E agantur rectæ CF & CG: rectæ hæ dicuntur *Asymptotæ Hyperbolæ*.

COROLLARIUM I.

475. Quoniam (§. 268 *Geom.*) CA : AE = CP : Pr, & CA : (DA) AE = CP : PR; erit Pr = PR (§. 177 *Arithm.*). Quare cum sit PM = Pm (§. 370); erit quoque MR = mr (§. 91 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

476. Si AI ducatur parallela ipsi DC & AH ipsi CE; erit EA : ED = AI : DC (§. 268 *Geom.*). Sed EA = $\frac{1}{2}$ ED (§. 474). Ergo AI = $\frac{1}{2}$DC = $\frac{1}{2}$CE. Et quoniam porro EA : AD = EI : IC (§. 268 *Geom.*); erit EI = CI = $\frac{1}{2}$EC; consequenter AI = CI (§. 87).

DEFINITIO XLI.

477. Quadratum rectæ CI vel AI dicitur *Potentia Hyperbolæ*.

PROBLEMA CCIII.

478. *Determinare potentiam Hyperbolæ.*

Sit CA $= \frac{1}{2}a$, AE $= \frac{1}{2}c$, erit CE $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$ (§. 417 *Geom.*); adeoque CI $= \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$. Ergo CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + cc)$.

Theorema: Potentia Hyperbolæ est decima sexta pars quadratorum axium conjugatorum, vel quarta pars quadratorum semiaxium conjugatorum.

COROLLARIUM.

479. Quoniam $cc = ab$ (§. 461); erit CI^2 $= \frac{1}{16}(aa + ab) = \frac{1}{4}a(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b)$; hoc est potentia Hyperbolæ æquatur rectangulo ex quarta parte axis transversi in quartam partem aggregati ex axe transverso & parametro.

PROBLEMA CCIV.

480. *Determinare differentiam quadratorum* PM & PR.

Quoniam

Tab. IV. Fig. 51. Quoniam $DA = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$ (§. 461), & $CP = \frac{1}{2}a + x$; praeterea (§. 268 *Geom.*)

$$CA : AD = CP : PR$$

$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR$$

erit $PR = (\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}) : \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + 2x\sqrt{\frac{1}{4}ab} : a$. Quare

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + bx^2 : a$$

$$PM^2 \qquad bx + bx^2 : a \text{ (§. 460)}$$

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = DA^2$$

Theorema. Si in Hyperbola semiordinata PM producatur, donec asymptoto in R occurrat; erit differentia quadratorum PM & PR aequalis quadrato semiaxis conjugati DA.

COROLLARIUM.

481. Crescente adeo semiordinata PM, decrescit recta MR, adeoque Hyperbola ad asymptotum propius accedit. Nunquam tamen cum ea concurrere potest, quia cum sit $PR^2 - PM^2 = DA^2$, fieri nequit, ut $PR^2 - PM^2 = 0$ evadat.

SCHOLION.

482. *En rationem, cur lineas CF & CG* ἀσυμπτώτους *seu non coincidentes vocaverint Veteres.*

PROBLEMA CCV.

483. *Determinare quantitatem rectanguli ex* MR *in* Mr.

Sit $PR = z$, $PM = y$; erit $MR = z - y$, $Mr = z + y$, consequenter $MR \cdot Mr = z^2 - y^2 = PR^2 - PM^2$.

Theorema. In Hyperbola rectangulum ex MR & Mr aequatur differentiae quadratorum PR^2 & PM^2.

COROLLARIUM.

484. Idem ergo rectangulum aequale est quadrato semiaxis conjugati DA (§. 480), consequenter omnia rectangula eodem modo formata aequalia sunt.

PROBLEMA CCVI.

485. *Si QM & sm cum asymptoto* CG, *qm & SM cum altera* CF *parallelae ducantur; determinare rationem rectangulorum* $QM \cdot MS$ *& qm. ms.*

Tab. IV. Fig. 51. Sit $MR = mr = a$, $Rm = rM = b^2 QM = v$, $mq = z$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$

$$a : v = b : (bv : a)$$

$$rm : mq = rM : MS$$

$$a : z = b : (bz : a)$$

Est ergo $MQ \cdot MS = bvz : a$, & $mq \cdot ms = bvz : a$; consequenter $MQ \cdot MS = mq \cdot ms$.

Theorema. Si QM & *ms* cum asymptoto CG; *qm* vero & MS cum altera CF parallelae ducantur; rectangula ex QM in MS & *qm* in *ms* aequalia sunt.

COROLLARIUM.

486. Quoniam $Cq = sm$ & $CQ = MS$ (§. 257 *Geom.*); etiam rectangula ex Cq in qm & ex CQ in QM aequalia sunt.

PROBLEMA CCVII.

487. *Determinare rationem rectanguli ex qm in ms ad potentiam Hyperbolae, seu* AI^2.

Sit $mr = z$, $qm = y$, $AE = c$: erit, ob parallelas AE & Pr, ang. $E = r$, & ob parallelas AI & qm, ang. $I = q$ (§. 233 *Geom.*); consequenter (§. 267 *Geom.*).

$$mr : qm = AE : AI$$

$$z : y = c : (cy : z)$$

Porro ob $mR \cdot mr = AE^2$ (§. 484) erit (§. 299 *Arithm.*)

$$mr : AE = AE : mR$$

$$z : c = c : (cc : z)$$

Denique ob parallelas *sm* & MQ (§. 268 *Geom.*)

$$RM : MQ = Rm : ms$$

$$z : y = (cc : z) : (ccy : zz)$$

Est enim $mr = RM$ (§. 475); cumque

Tab. IV. *Fig.* 51. que sit $mr : qm = AE : AI$, & $MR : QM = DA : HA = AE : AI$, *per demonstr.*, etiam $MQ = mq$ (§. 177 *Arith.*).

Quare $sm.\,qm = Cq.\,qm = ccyy : zz$. Est vero etiam $AI^2 = c^2y^2 : z^2$. Ergo $sm.\,qm = AI^2$.

Theorema. Si qm asymptoto CF parallela ducatur, rectangulum ex Cq in qm æquatur potentiæ Hyperbolæ.

Corollarium I.

488. Quare si fiat $CI = AI = a$, $Cq = x$ & $qm = y$; erit $a^2 = xy$: quæ est æquatio naturam Hyperbolæ intra asymptotos declarans.

Corollarium II.

489. Datis ergo asymptotis positione & latere potentiæ Hyperbolæ CI vel AI, si in una asymptotorum CG sumantur abscissæ quotcunque, invenientur totidem semiordinatæ & per eas puncta quotlibet Hyperbolæ determinabuntur, quærendo ad abscissas & latus potentiæ CI tertias proportionales (§. 272 *Geom.*). Nimirum sint AB

Tab. XIII. *Fig.* 123. & AC asymptoti, $AD = DI = a$ latus potentiæ Hyperbolæ. Sit $AP = x$. Ducatur FG parallela ipsi AC, & PN parallela ipsi DI; erit $PN = DI$ (§. 257 *Geom.*) $= a$. Ducatur AN secans DI in H: erit (§. 268 *Geom.*)

$$AP : PN = AD : DH$$
$$x : a = a : DH$$

adeoque $DH = a^2 : x$. Quare si fiat PM $(= y) = DH$: erit $y = a^2 : x$; consequenter $yx = a^2$, adeoque punctum M in Hyperbola (§. 488).

Corollarium III.

Tab. IV. *Fig.* 51. 490. Quodsi abscissæ non computentur a centro C, sed ab alio quovis puncto L, dicaturque $CL = b$; erit $Cq = b + x$; consequenter $a^2 = by + xy$.

Problema CVIII.

491. *Determinare in Hyperbola subtangentem* PT *& subnormalem* PR. Tab. III. *Fig.* 42.

Sit parameter $= b$, axis transversus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $RM = z$, $RA = t$, erit $PR = t - x$, $PM^2 = z^2 - t^2 + 2tx - x^2$ (§. 417 *Geom.*). Quare (§. 460)

$$z^2 - t^2 + 2tx - x^2 = bx + bx^2 : a$$
$$az^2 - at^2 + 2atx - ax^2 = abx + bx^2$$
$$bx^2 + ax^2 + abx + at^2 = 0$$
$$- 2atx - az^2 \qquad b + a$$
$$x^2 + \frac{ab - 2at}{b + a}\,x + \frac{at^2 - az^2}{v + a} = 0$$

Fiat jam, ob rationes supra (§. 410) allatas, $x - v = 0$: erit $x^2 - 2vx + v^2 = 0$, & quia hæc æquatio eadem cum præcedente, habetur

$$(ab - 2at) : (b + a) = -2v \qquad b + a$$
$$ab - 2at = -2bv - 2av$$
$$ab + 2bv + 2av = 2at \qquad 2a$$
$$\tfrac{1}{2}b + \frac{bv}{a} + v = t$$

hoc est, quia $x = v$,

$\tfrac{1}{2}b + bx : a + x = t = RA$.

Ergo $PR = \tfrac{1}{2}b + bx : a + x - x = \tfrac{1}{2}b + bx : a = (\tfrac{1}{2}a + x)\,b : a$.

Theorema. In Hyperbola est ut axis transversus ad parametrum, ita aggregatum ex semiaxe transverso & abscissa ad subnormalem.

Porro (§. 409)

$$PR : PM = PM : PT$$
$$\frac{\tfrac{1}{2}a + x}{a}\,b : \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} = \sqrt{\left(bx + \frac{bx^2}{a}\right)} : PT$$

Repéritur ergo $PT = (abx + bx^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)\,b = (ax + x^2) : (\tfrac{1}{2}a + x)$.

 Theo-

Tab. III. Fig. 42. *Theorema.* In Hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita aggregatum ex integro axe transverſo & abſciſſa ad ſubtangentem.

Denique $AT = (ax + x^2) : (\frac{1}{2}a + x) - x = (ax + x^2 - \frac{1}{2}ax - x^2) : (\frac{1}{2}a + x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$.

Theorema. In Hyperbola eſt ut aggregatum ex ſemiaxe transverſo & abſciſſa ad abſciſſam, ita ſemiaxis transverſus ad rectam AT inter verticem & tangentem interceptam.

PROBLEMA CCIX.

Tab. V. Fig. 52. 492. *Ducta* NO *tangenti* TM *parallela, & ex centro* C *per contactum* M *recta* CQ *quæ* NO *ſecat in* G; *determinare rationem ſegmentorum* GN *&* GO.

Demittatur ex N perpendicularis NS ad axem AS continuanda in D, donec rectæ OD axi AS parallelæ occurrat in D. Ducantur porro HG ad ND & GF, MP, OL ad axem AS perpendiculares: erit GI ipſi PM parallela (§. 256 *Geom.*). Sit AB axis transverſus $= a$, $AP = x$, $PM = y$, $PC = \frac{1}{2}a + x = p$, $GI = HS = v$, $GF = HD = z$, erit $IF = DS = LO = z - v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$PM : PC = GI : IC$$

$$y : p = v : \frac{pv}{y}$$

Ob parallelas TM & GO (§. 233 *Geom.*) angulus $GKI = PTM$ & ob parallelas KI & OF *per conſtr.* angulus $GKI = GOF$; conſequenter $GOF = PTM$. Quare, cum præterea F & P ſint recti; erit (§. 267 *Geom.*)

$$PM : PT = GF : FO$$

$$y : \frac{ax + xx}{\frac{1}{2}a + x} = z : \frac{(ax + xx)z}{(\frac{1}{2}a + x)y}$$

Ponatur, brevitatis gratia, $ax + xx = q$ & $\frac{1}{2}a + x = p$, ut ante, erit $FO = qz : py$. Ergo $LC = IC - FO = pv : y - qz : py = (p^2v - qz) : py$, & $LA = LC - AC = (p^2v - qz - \frac{1}{2}apy) : py$, $LB = LC + CB = (p^2v - qz + \frac{1}{2}apy) : py$. Eſt vero (§. 466)

Tab. V. Fig. 52.

$$AP . PB : AL . LB = PM^2 : OL^2$$

$$q : \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2y^2} = y^2 : OL^2$$

Quare

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}a^2p^2y^2}{p^2q}$$

Jam $yy = (ax + xx)b : a$ (§ 459). Cum itaque poſuerimus $ax + xx = q$; $yy = bq : a$. Hoc valore in expreſſione ipſius OL^2 ſubſtituto, habetur

$$OL^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{2}ap^2bq}{p^2q}.$$

Enim vero $OL^2 = z^2 - 2zv + v^2$. Habemus adeo

$$z^2 - 2zv + v^2 = \frac{p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq}{p^2q}$$

$$p^2qz^2 - 2p^2qzv + p^2qv^2 = p^4v^2 - 2p^2qzv + q^2z^2 - \frac{1}{4}ap^2bq$$

$$\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2 = q^2z^2 - p^2qz^2$$

$$z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$$

Quodſi HN dicatur z, & calculus eodem modo inſtituatur; reperietur denuo $z^2 = \frac{\frac{1}{4}ap^2bq + p^2qv^2 - p^4v^2}{q^2 - p^2q}$. Unde liquet eſſe $HN^2 = GF^2 = HD^2$; conſequenter $HN = HD$. Quoniam igitur (§. 268 *Geom.*) $HN : HD = NG : GO$; erit $NG = GO$.

Theorema. Recta CQ ex centro C per contactum M ducta dividit rectas NO tangenti TM parallelas bifariam.

COROLLARIUM.

493. Eſt itaque CQ diameter, NO ordinatim ad eam applicata (§. 368); MC vero eſt ſemidiameter transverſa.

PRO-

PROBLEMA CCX.

Tab.V. Fig.53. 494. *Ductis duabus rectis* Hm *&* mK *ex eodem Hyperbolæ puncto m, utrinque in asymptotis* CQ *&* CT *terminatis, itidemque duabus aliis* LN *&* NO *prioribus parallelis; determinare rationem rectangulorum* Hm. mK *&* LN. NO.

Ducantur ordinatæ ad axem utrinque usque ad asymptotos continuandæ Rr & QT.

Sit $Rm = y$, $QN = z$, $TN = t$. Quoniam $Rm. mr = QN. NT$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$Rm : QN = TN : mr$

$y : z = t : \frac{tz}{y}$

Sit porro $Hm = a$, $mK = b$. Quoniam, ob parallelas mr & NT, angulus $r = T$; &, ob parallelas Km & NO, $K = O$ (§. 233 *Geom.*), erit (§. 267 *Geom.*)

$mr : Km = TN : NO$

$\frac{tz}{y} : b = t : \frac{by}{z}$

Ob similem rationem, nempe similitudinem △△ QLN & RHm

$Rm : Hm = QN : LN$

$y : a = z : \frac{az}{y}$

Ergo $LN. NO = abzy : zy = ab$. Est vero etiam $Hm. mK = ab$. Sunt igitur duo ista rectangula æqualia.

Theorema. Si intra asymptotos Hyperbolæ, ex ejus puncto *m* ducantur utcunque duæ rectæ *Hm* & *mK*, & iis aliæ duæ parallelæ LN & NO; erit *Hm. mK* = LN. NO.

Idem invenitur, si ductæ rectæ H*mk* agatur parallela LN*o*. Nempe in hoc etiam casu $Hm. mk = LN. No$.

COROLLARIUM.

495. Omnia igitur rectangula ex rectis eidem Hk vel duabus Hm & mK parallelis eodem modo formata inter se æqualia sunt. Tab.V. *Fig.53.*

PROBLEMA CCXI.

496. *Si recta* Hk *utcunque intra asymptotos* CQ *&* CT *ducatur; determinare rationem segmentorum* HE *&* mk *inter Hyperbolam & asymptotos interceptorum.*

Ducantur per E & *m* rectæ IG & R*r* ad axem normales, fiatque $Rm = a$, $IE = b$, $EG = c$, $Hm = x$, $mk = y$. Quia $IE. EG = Rm. mr$ (§. 484); erit (§. 299 *Arithm.*)

$mR : IE = EG : mr$

$a : b = c : \frac{bc}{a}$

Porro, ob IG ipsi R*r* parallelam, (§. 268 *Geom.*)

$mR : Hm = IE : EH$

$a : x = b : \frac{bx}{a}$

$mr : km = EG : Ek$

$\frac{bc}{a} : y = c : \frac{ay}{b}$

Est itaque $Ek. EH = abxy : ab = xy = Hm. mk$. Quare

$Ek : mk = mH : HE$

$Ek - mk : mk = mH - HE : HE$ (§. 193 *Arithm.*)

h. e. $Em : mk = Em : HE$.

consequenter $mk = HE$ (§. 177 *Arithm.*).

Theorema. Si inter asymptotos recta Hk utcunque ducatur, segmenta HE & mk inter Hyperbolam & asymptotos utrinque intercepta æqualia sunt.

COROLLARIUM I.

497. Quando fit $Em = 0$; recta Hk Hyperbolam tangit. Tangens adeo FD inter asymptotos intercepta in contactu V bifariam dividitur.

COROLLARIUM II.

Tab.V. Fig.53. 498. Rectangulum itaque ex segmentis *Hm* & *mk* rectæ tangenti FD parallelæ æquatur quadrato tangentis dimidiæ DV (§. 495).

PROBLEMA CCXII.

Tab.V. Fig.54. 499. *Determinare relationem semiordinatæ* PM *ad diametri abscissam* AP.

Sit AB diameter transversa, DE diameter conjugata, adeoque ordinatæ NM parallela, C centrum Hyperbolæ & CQ atque CR sint ejus asymptotæ. Fiat $DA = c$, $CA = r$, $PM = y$, $CP = v$ & $CB = AC$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$CA : DA = CP : PR$$

$$r : c = v : \frac{cv}{r}$$

Quare $RM = \frac{cv}{r} - y = \frac{cv - ry}{r}$, & $MQ = \frac{cv + ry}{r}$, consequenter $RM.MQ = (c^2v^2 - r^2y^2) : r^2$. Est vero $RM.MQ = DA^2 = c^2$ (§. 498). Habemus itaque

$$(c^2v^2 - r^2y^2) . r^2 = c^2 \quad r^2$$

$$c^2v^2 - r^2y^2 = r^2c^2$$

$$c^2v^2 - r^2c^2 = r^2y^2$$

quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam,

$$y^2 : v^2 - r^2 = c^2 : r^2$$

$$PM^2 : AP.PB = DA^2 : AC^2$$

Est nimirum $BP = BC + CP = r + v$ & $AP = CP - CA = v - r$, adeoque $AP.PB = (v - r)(v + r) = v^2 - r^2$.

Theorema. Quadratum semiordinatæ in Hyperbola est ad rectangulum ex abscissa & aggregato ex diametro transversa AB & abscissa AP, ut quadratum semidiametri conjugatæ AD ad quadratum semidiametri transversæ CA.

COROLLARIUM.

500. Quodsi fiat $AP = x$, & $2r = AB = a$, erit $v^2 - r^2 = ax + x^2$, consequenter $y^2 = (c^2ax + c^2x^2) : \frac{1}{4}aa = \frac{4c^2x}{a} + \frac{4c^2x^2}{a^2}$. Tab.V. Fig.54.

Fiat $4c^2 : a = b$; erit $y^2 = bx + bx^2 : a$. Eadem ergo æquatio Hyperbolæ naturam definit respectu diametri, quæ eam exprimit respectu axis, estque parameter tertia proportionalis ad diametros conjugatas DE & AB. Unde liquet easdem proprietates Hyperbolæ competere respectu diametri, quæ superius ex æquatione fundamentali respectu axis deduximus.

PROBLEMA CCXIII.

501. *Ductis* AF & TN *asymptoto* CR *parallelis, determinare rationem rectanguli ex* TN *in* TC *ad rectangulum ex* AF *in* FC.

Sit $CF = a$, $AF = b$; $AD = c$, $RN = z$, erit ob $AE = DA$, etiam $EF = FC = a$ (§. 268 *Geom.*). Et quoniam $RN.NQ = DA^2$ (§. 498), erit (§. 299 *Arith.*).

$$RN : DA = DA : NQ$$

$$z : c = c : \frac{c^2}{z}$$

Porro, ob parallelas AF & NT, angulus F = T, & ob parallelas AE & GN, angulus E = Q (§. 133. *Geom.*), ideoque (§. 267 *Geom.*)

$$AE : AF = QN : TN$$

$$c : b = \frac{c^2}{z} : \frac{bc}{z}$$

$$AE : FE = QN : TQ$$

$$c : a = \frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z}$$

Et $QN : QT = RN : TC$ (§. 263. *Geom.*)

$$\frac{c^2}{z} : \frac{ac}{z} = z : \frac{az}{c}$$

Ergo $TC.TN = \frac{azbc}{cz} = ab = CF.AF$.

Theo-

Tab.V. Fig.54. *Theorema.* Si ex vertice A & quocunque Hyperbolæ puncto N ducantur AF & TN cum asymptoto CR parallelæ; erit rectangulum ex TN in TC æquale rectangulo ex FA in FC.

COROLLARIUM.

502. Quodsi adeo fiat TC $= x$, TN $= y$; æquatio Hyperbolæ naturam inter asymptotos respectu diametri declarans erit $xy = ab$.

PROBLEMA CCXIV.

Tab. XII. Fig. 119. 503. *Determinare quantitatem rectæ* FO *ex foco* F *ad tangentem Hyperbolæ* TM *perpendicularis.*

Eodem prorsus, quo supra (§.457), modo reperitur FO. RM $=$ PR.TF, ut verba singula huc transcribere liceat.

Theorema. Rectangulum ex subnormali PR in differentiam distantiæ foci a semiordinata atque subtangentis TF æquale est rectangulo ex normali MR & recta ex foco ad tangentem perpendiculari.

PROBLEMA CCXV.

504. *Si in* F *fuerit focus hyperbolæ & MR ad eam normalis*, HR *vero normalis ad* FM *ex foco* F *ad punctum contactus* M *ductam; determinare quantitatem segmentorum* MH *&* HF.

Sit parameter $= b$, axis $= a$, distantia foci a centro $= c$, erit FM $= c - \frac{1}{2}a + 2cx : a$ (§. 470), PR $= (\frac{1}{2}ab + bx) : a$ & AT $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x)$ (§. 491), AF $= c - \frac{1}{2}a$, TF $= \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a + x) + c - \frac{1}{2}a$ $= ax : (a + 2x) + c - \frac{1}{2}a = (ac - \frac{1}{2}a^2 + 2cx) : (a + 2x)$. Ducta FO ad Tangentem TM perpendiculari, reperitur, prorsus ut supra, iisdem retentis verbis, FM : TF $=$ PR : MH (§. 458). Quare

$$c - \frac{1}{2}a + \frac{2cx}{a} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = \frac{\frac{1}{2}ab + bx}{a} : \text{MH}$$ Tab. XII. Fig. 119.

Hoc est

$$2ac - a^2 + 4cx : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = ab + 2bx : \text{MH}$$

(§.184 *Arith.*)

$$\frac{2ac - a^2 + 4cx}{a + 2x} : \frac{ac - \frac{1}{2}aa + 2cx}{a + 2x} = b : \text{MH}$$ (§. 183 *Arith.*)

Est ergo MH $= \frac{1}{2}b$ (§.149 *Arithm.*).

Theorema. Si MR fuerit ad Hyperbolam normalis, & ex R ducatur ad FM ex foco F ad punctum contactus M ductam normalis HR; erit MH parametro dimidiæ æqualis.

DEFINITIO XLII.

505. *Hyperbola æquilatera* dicitur, in qua axes conjugati AB & DE sunt æquales. Tab. IV. Fig.51.

COROLLARIUM I.

506. Cum parameter sit tertia proportionalis ad axes conjugatos (§. 461); ipsa etiam axibus æqualis est.

COROLLARIUM II.

507. Quare si in æquatione $y^2 = bx + bx^2 : a$ fiat $b = a$; æquatio $y^2 = ax + x^2$ naturam Hyperbolæ æquilateræ declarat.

COROLLARIUM III.

508. Hinc quadrata ordinatarum y^2 & z^2 sunt inter se ut $ax + x^2$ & $av + v^2$, hoc est, ut rectangula ex abscissis in rectas compositas ex abscissis & axe determinato vel parametro.

COROLLARIUM IV.

509. Si sint CP $= x$, CA $= r$, erit AP $= x - r$ & PB $= x + r$ consequenter $y^2 = x^2 - r^2$.

COROLLARIUM V.

510. Quoniam AE $=$ CA (§.505); erit ACE angulus semirectus (§. 241 *Geom.*); consequenter angulus asymptotorum FCG in Hyperbola æquilatera rectus.

PROBLEMA CCXVI.

Tab.V. Fig.55. 511. *Investigare naturam curvæ, quæ oritur, si conus* ABC *ita secetur ut sectionis axis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, ipsum vero planum sectionis* DLN *ad basin sectionis triangularis* AB *perpendicularis.*

Secetur conus plano HMI basi ANB parallelo: erit HMI circulus (§. 468 *Geom.*); consequenter cum uterque circulus HMI & ANB per sectionem triangularem ACB secetur in HI & AB, & a sectione data in pM & LN; erunt cum HI & AB, tum pM & LN inter se parallelæ (§.499 *Geom.*). Quare cum sit EN perpendicularis ad AB *per hypoth.* erit etiam PM perpendicularis ad HI (§ 492 *Geom.*); consequenter cum DE & HI, itemque DE & AB sint in eodem plano sectionis triangularis, EN & PM etiam perpendiculares sunt ad DE (§. 484 *Geom.*); adeoque semiordinatæ ad axem DE applicatæ (§.368, 370). Et quia AH parallela ipsi EP, *per hypoth.* HP parallela ipsi AE, *per demonstr.* erit HP=AE (§.257 *Geom.*). Sit jam AE=HP=v, PI=t, DP=x, DE=z; erit (§. 268 *Geom.*)

$$DP : DE = PI : EB$$

$$x : z = t : \frac{tz}{x}$$

Ergo PM^2=HP. PI (§. 377)=tv & EN^2=AE. EB (§.*cit.*)=$tzv : x$. Est ergo (positis $PM^2=y^2$, $EN^2=q^2$)

$$y^2 : q^2 = tv : \frac{tzv}{x}$$

hoc est $= tvx : tzv$ (§. 124)

$$= x : z$$

Est itaque curva NMDpL Parabola (§. 402).

PROBLEMA CCXVII.

512. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DE *cum diametro basis* AB *continuata in* F *concurrat, & planum sectionis continuatum eam ad angulos rectos secet; invenire naturam curvæ ex hac sectione prodeuntis* DMNELD. Tab.V. Fig.56.

Eodem, quo ante (§.511) modo ostenditur esse PM & QN cum semiordinatas circulorum IMH & LNK, tum curvæ DMNE. Sit jam DE=a, DP=x, DQ=v, PH=t, QL=s; erit PE=$a-x$, QE=$a-v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$DP : PH = DQ : QK$$

$$x : t = v : \frac{vt}{x}$$

$$EQ : QL = EP : PI$$

$$a-v : s = a-x : \frac{sa-sx}{a-v}$$

Quare (§. 377) PM^2=HP. PI= $(tsa-tsx):(a-v)$, & QN^2=KQ. QL $= vts : x$. Est adeo

$$PM^2 : QN^2 = \frac{tsa-tsx}{a-v} : \frac{vts}{x}$$

hoc est, $= tsax - tsx^2 : avts - v^2ts$

(§. 124) $= ax - x^2 : av - v^2$

Est itaque curva DMNELD Ellipsis (§. 429).

PROBLEMA CCXVIII.

513. *Si conus* ABC *ita secetur, ut axis sectionis* DQ *continuatus cum latere coni* AC *continuato in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *secet diametrum basis* AB *ad angulos rectos; invenire naturam curvæ* DMN, *quæ ex hac sectione resultat.* Tab. IV. Fig.57.

Eodem modo, quo paulo ante (§. 511), ostenditur, QN & PM esse semiordinatas cum circulorum HMI atque

Tab. IV. *Fig.* 57. atque ANB, tum curvæ DMN. Sit $ED = a$. $DP = x$, $DQ = v$ $PH = t$, $PI = s$; erit $EP = a + x$, $EQ = a + v$, & (§. 268 *Geom.*)

$$EP : PH = EQ : AQ$$

$$a + x : t = a + v : \frac{at + vt}{a + x}$$

$$DP : PI = DQ : QB$$

$$x : s = v : \frac{sv}{x}$$

Ergo $HP. PI = ts$ & $AQ. QB = (atsv + v^2 ts) : (ax + x^2)$; consequenter ob $PM^2 = HP. PI$, & $QN^2 = AQ. QB$ (§. 377),

$$PM^2 : QN^2 = ts : \frac{astv + vvst}{ax + xx}$$

hoc est, $= 1 : \frac{av + vv}{ax + xx}$

(§. 124) $= ax + xx : av + vv$

Est itaque LDMN Hyperbola (§. 466), DE ejus axis transversus, E vertex Hyperbolæ oppositæ.

SCHOLION.

514. *Hinc intelligimus, quod statim ab initio Parabolam, Hyperbolam atque Ellipsin tanquam ex Cono sectas proponere, & ex indole sectionis æquationem fundamentalem eruere licuisset, nisi nobis constitutum fuisset ostendere, quomodo ex æquationibus utcunque assumtis, vel datis, curvarum proprietates ac descriptiones per Algebram & Arithmeticam speciosam eruere debeamus. Immo potuissent quoque (quod faciunt alii) earundem curvarum per motum continuum descriptiones fundamenti loco assumi & inde æquationes elici: quod ut appareat, unum de Ellipsi exemplum proposuisse suffecerit.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. IV. *Fig.* 58. 59. 515. *Sit descripta curva* ADMB, *circumductu regulæ* GM *in instrumento, cujus structura ex Fig.* 59 *Tab. IV manifesta est, ita ut paxilli in* E *defixi basis mobilis incedat per canalem* ab, *alterius vero in* F *per* cd; *investigare naturam ejus.* Tab. IV. *Fig.* 58. 59.

Ex curvæ descriptione manifestum, esse longitudinem regulæ EM axi majori dimidio CB, partem vero ejus FM axi dimidio minori DC æqualem, consequenter distantiam paxillorum EF differentiam inter semiaxem majorem AC & semiaxem minorem DC.

Assumamus itaque quemcumque regulæ situm EFM (*Fig.* 58) & determinetur curva, in qua sit punctum ejus M. Demittantur ex puncto M ordinatæ ad utrumque axem PM & MR.

Fiat $CP = RM = x$, $PM = y$, $AC = EM = a$, $CD = FM = b$, erit $EF = a - b$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EM : MR = EF : FC$$

$$a : x = a - b : \frac{ax - bx}{a}$$

Ergo $PF = x - x + bx : a = bx : a$

Hinc $PM^2 = FM^2 - FP^2$ (§. 417 *Geom.*) $= b^2 - b^2 x^2 : a^2 = (a^2 b^2 - b^2 x^2) : a^2 = y^2$.

Est adeo curva ADMB Ellipsis (§. 432).

DEFINITIO XLIII.

516. *Circuli superiorum generum* sunt curvæ, in quibus est $AP^m : PM^m = PM : PB$ vel etiam $AP^m : PM^m = PM^n : PB^n$. Tab. III. *Fig.* 38.

COROLLARIUM I.

517. Sit $AP = x$, $PM = y$, $AB = a$: erit $PB = a - x$, consequenter $x^m : y^m = y : a - x$. Hinc æquatio infinitos circulos definiens est $y^{m+1} = ax^m - x^{m+1}$, & alios adhuc infinitos definiens $y^{m+n} = (a - x)^n x^m$.

COR. I.

COROLLARIUM II.

518. Si $m = 1$, erit $y^2 = ax - x^2$, adeoque circulus primi generis sub hac æquatione una continetur. Si $m = 2$, $n = 1$, erit $y^3 = ax^2 - x^3$: quæ æquatio circulum secundi generis definit.

DEFINITIO XLIV.

519. *Parabolæ superiorum generum* sunt curvæ algebraicæ, quæ definiuntur per $a^{m-1} x = y^m$, ex. gr. per $a^2 x = y^3$, $a^3 x = y^4$, $a^4 x = y^5$, $a^6 x = y^6$ &c. Dicuntur a nonnullis *Paraboloides*: speciatim *Paraboloidem cubicalem* vocant, si $a^2 x = y^3$; *Paraboloidem biquadraticalem*, si $a^3 x = y^4$; *surdesolidalem* si $a^4 x = y^5$ &c. Harum curvarum respectu *Parabola* primi generis superius explicata dicitur *Apolloniana*, item *quadratica*. Ad Parabolas quoque referri solent curvæ, in quibus $ax^{m-1} = y^m$, veluti $a^2 x = y^3$, $ax^3 = y^4$: quia a nonnullis *semiparabolæ* appellantur. Omnes comprehenduntur sub communi æquatione $a^m x^n = y^r$, quæ ad alias quoque curvas extenditur, veluti ad eas, in quibus $a^2 x^2 = y^4$, $a^2 x^3 = y^5$, $a^3 x^4 = y^7$.

COROLLARIUM I.

520. Cum in Parabolis superiorum generum sit $y^m = a^{m-1} x$; si alia quæcunque semiordinata dicatur v, abscissa ipsi respondens z, erit $v^m = a^{m-1} z$, consequenter

$$y^m : v^m = a^{m-1} x : a^{m-1} z$$

hoc est, $\quad = \quad x : z$

Communis adeo Parabolarum proprietas est, quod ordinatarum potentiæ rationem abscissarum habeant.

COROLLARIUM II.

521. In semiparabolis vero est $y^m : v^m = ax^{m-1} : az^{m-1} = x^{m-1} : z^{m-1}$, seu potentiæ semiordinatarum sunt ut potentiæ abscissarum uno gradu inferiores; ex. gr. in semiparabolis cubicalibus cubi ordinatarum y^3 & v^3 sunt ut quadrata abscissarum x^2 & z^2. Et in genere in omnibus curvis Parabolæ agnatis $y^{m+n} : v^{m+n} = a^m x^n : a^m z^n = x^n : z^n$.

DEFINITIO XLV.

522. *Ellipses infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a - x)^n$, quæ a nonnullis *Ellipoides* dicuntur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$. Ex. gr. *Ellipoidem cubicalem*, si $ay^3 = bx^2 (a - x)$: *Ellipoidem biquadraticalem* appellant Ellipsin tertii generis, in qua $ay^4 = bx^2 (a - x)^2$. Harum curvarum respectu *Ellipsis* primi generis *Apolloniana* vocatur.

COROLLARIUM I.

523. Si alia quæcunque ordinata dicatur v & abscissa respondens z: erit $av^{m+n} = bz^m (a-z)^n$, consequenter $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a-x)^n : bz^m (a-z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a-x)^n : z^m (a-z)^n$.

COROLLARIUM II.

524. Si fiat $a = b$, erit $y^{m+n} = x^m (a-x)^n$ & si porro fiat $n = 1$, erit $y^{m+1} = x^m (a-x) = ax^m - x^{m+1}$, hoc est, Ellipses superiorum generum degenerant in Circulos superiorum generum.

DEFINITIO XLVI.

525. *Hyperbolas infinitas* definit æquatio $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$, quæ a nonnullis *Hyperboloides* appellantur, si $m > 1$, vel $n > 1$, vel m & $n > 1$ ex. gr. $ay^3 = bx^2 (a+x)$. Et harum curvarum respectu *Hyperbola* primi generis *Apolloniana* salutatur.

COROLLARIUM.

526. Est ergo in infinitis Hyperboloibus $ay^{m+n} : av^{m+n} = bx^m (a+x)^n : bz^m (a+z)^n$ hoc est, $y^{m+n} : v^{m+n} = x^m (a+x)^n : z^m (a+z)^n$.

DEFINITIO XLVII.

527. *Conos superiorum generum* appello, quorum bases & sectiones basibus parallelæ sunt circuli superiorum
Tab.V. Fig. 55. generum. Generatur istiusmodi Conus, si recta linea AC in puncto sublimi C fixa, sed quæ pro re nata magis aut minus extendi posse concipitur, circa peripheriam circuli ANB convertatur.

PROBLEMA CCXX.

Tab.V. Fig. 55. 528. *Investigare naturas curvarum, quæ prodeunt, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DE *sit lateri coni* AC *parallelus, planum vero sectionis* LDN *secet diametrum basis* AB *ad angulos rectos.*

Eodem, quo supra (§. 511) modo ostenditur, esse PM & EN inter se parallelas & cum circulorum HMI atque ANB, tum curvæ LDN semiordinatas. Sit $PM = y$, $EN = q$, $AE = HP = v$, $DP = x$, $DE = z$, $PI = t$; reperietur ut *in Probl.* 216 (§. 511), $EB = tz : x$. Est vero (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM : PI$$
$$v^m : y^m = y : t$$
$$\overline{y^{m+1} = tv^m}$$

Porro $AE^m : EN^m = EN : EB$.

$$v^m : q^m = q : (tz : x)$$
$$\overline{q^{m+1} = tzv^m : x}$$

Quare $y^{m+1} : q^{m+1} = tv^m : \frac{tzv^m}{x}$ Tab.V. Fig. 55.

hoc est $= 1 : \frac{z}{x}$ (§. 124).

seu $= x : z$

Sunt ergo curvæ istæ Parabolæ superiorum generum (§. 520).

Vel sit generaliter (§. 516)

$$HP^m : PM^m = PM^n : PI^n$$
$$v : y^m = y^n : t^n$$
$$\overline{y^{m+n} = t^n v^m}$$
$$AE^m : EN^m = EN^n : EB^n$$
$$v^m : q^m = q^n : \frac{t^n z^n}{x^n}$$
$$\overline{q^{m+n} = \frac{t^n z^n v^m}{x^n}}$$

Quare

$$y^{m+n} : q^{m+n} = t^n v^m : \frac{t z^n v}{x^n}$$
$$= x^n : z^n$$

Sunt itaque curvæ DLN superiorum generum Parabolis agnatæ (§. 521).

PROBLEMA CCXXI.

529. *Investigare naturam curvarum, quæ enascuntur, si coni superiorum generum ita secantur, ut axis sectionis* DE *cum diametro basis* AB *continuata in* F *concurrat, planum vero sectionis continuatum eandem ad angulos rectos secet.* Tab.V. Fig. 56.

Patet, ut supra (§. 511), PM & QN esse inter se parallelas atque semiordinatas cum circulorum HMI & KNL, tum curvæ DMNE. Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $QL = s$, $PM = y$, $QN = z$; erit $PE = a - x$, $QE = a - v$ & reperietur *ut in Probl.* 217 (§. 512) $QK = vt : x$, $PI = (sa - sx) : (a - v)$. Est vero (§. 516)

Tab.V. Fig.56. $IP^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$\frac{s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m (a-x)^m : (a-v)^m$$

Porro $QL^m : QN^m = QN^n : KQ^n$

$$s^m : z^m = z^n : \frac{v^n t^n}{x^n}$$

$$z^{m+n} = t^n v^n s^m : x^n$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = \frac{t^n s^m (a-x)^m}{(a-v)^m} : \frac{v^n t^n s^m}{x^n}$$

hoc est $= (a-x)^m x^n : (a-v)^m v^n$

Sunt adeo curvæ istæ in numero Ellipsium superiorum generum (§.523).

PROBLEMA CCXXII.

Tab. IV. Fig.57. 530. *Investigare naturam curvarum, quæ gignuntur, si coni superiorum generum ita secentur, ut axis sectionis* DQ *cum latere coni continuato* AC, *continuatus & ipse, in* E *concurrat, planum vero sectionis* DLN *diametrum basis* AB *ad angulos rectos secet.*

Patet, ut supra (§.511), PM & QN esse inter se parallelas, atque semiordinatas cum circulorum HMI & ANB, tum curvæ DMN. Sit $DE = a$, $DP = x$, $DQ = v$, $PH = t$, $PI = s$; erit $EP = a+x$, $EQ = a+v$, & reperietur *ut in Probl.* 218 (§. 513) $AQ = t(a+v) : (a+x)$ & $QB = sv : x$. Est vero (§.517)

$PI^m : PM^m = PM^n : PH^n$

$$s^m : y^m = y^n : t^n$$

$$y^{m+n} = t^n s^m$$

Porro $QB^m : QN^m = QN^n : AQ^n$

$$\frac{s^m v^m}{x^m} : z^m = z^n : \frac{t^n (a+v)^n}{(a+x)^n}$$

$$z^{m+n} = \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

Quare

$$y^{m+n} : z^{m+n} = t^n s^m : \frac{t^n s^m v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$$

hoc est (§. 124) $= 1 : \frac{v^m (a+v)^n}{x^m (a+x)^n}$

$$= x^m (a+x)^n : v^m (a+v)^n$$

Sunt adeo curvæ Hyperbolæ superiorum generum (§. 526.)

PROBLEMA CCXXIII.

531. *Diametro semicirculi* AB *jungatur ad angulos rectos recta* AT, *ducanturque ex centro* C *secantes* QC. *Erigantur in* Q *normales* QM *ipsis* QR *æquales. Investigare naturam curvæ* AMP, *quæ est locus omnium punctorum* M *hac ratione inventorum.* Tab.V. Fig.60.

Sit $AQ = PM = y$, $QM = QR = x$, $AB = a$, erit (§. 379 *Geom.*) $y^2 = ax + x^2$.

Est adeo curva AMR Hyperbola æquilatera, cujus axes & parameter diametro circuli AB æquales (§.507).

COROLLARIUM.

532. Habemus adeo facilem Hyperbolæ æquilateræ per innumera puncta M geometrice determinata descriptionem.

PROBLEMA CCXXIV.

533. *Invenire æquationem Hyperbolæ ad axem* CR *ex centro* C *ductæ & ad axem transversum* AB *normalem relatæ.* Tab. XIII. Fig. 124.

Sit $CQ = PM = x$, $CP = QM = y$, $CB = CA = a$, erit $BP = a+y$, $AP = y-a$, adeoque BP. $PA = y^2 - a^2$. Sit porro parameter $= b$, erit (§. 459)

$$b : 2a = x^2 : y^2 - a^2$$

$$2ax^2 = by^2 - a^2 b$$

$$2ax^2 + a^2 b = by^2$$

$$\frac{2ax^2}{b} + a^2 = y^2$$

COROL-

COROLLARIUM.

Tab. XIII. Fig. 124. 534. Quodsi Hyperbola fuerit æquilatera, erit $2a = b$ (§. 506), consequenter $y^2 = x^2 + a^2$, sive $QM^2 = CQ^2 + CB^2$.

DEFINITIO XLVIII.

Tab. VI. Fig. 61. 535. Si ducatur recta BD & alia AC ad ipsam in E perpendicularis, ex puncto autem C agantur rectæ quotcunque CM rectam BD secantes in Q, fiatque $QM = QN = AE = EF$; Curva, in qua sunt puncta M, dicitur a NICOMEDE inventore *Conchilis* seu *Conchois prima*; altera vero, in qua sunt puncta N, *Conchois secunda*; recta BD *regula*; punctum C *Polus*. Excogitavit autem instrumen-
Fig. 62. tum, quo motu continuo Conchois prima describi potest. Nimirum in regula AD excavatus est canalis, ut clavus teres regulæ mobili CB in F firmiter infixus intra eam libere moveri possit. Regulæ EG in K infigitur clavus alius, in fissuram regulæ mobilis CB immittendus. Quodsi regula BC ita moveatur, ut clavus F canalem AD percurrat; stylus in C Conchoidem primam describet.

COROLLARIUM I.

536. Sit $AP = x$, $AE = a$, erit $PE = MR = a - x$. Crescentibus adeo x, decrescit $a - x$ seu MR, adeoque curva continuo ad regulam BD propius accedit. Eodem modo patet, rectam NO continuo decrescere debere, adeoque Conchoidem quoque inferiorem ad regulam continuo propius accedere.

COROLLARIUM II.

537. Quoniam tamen inter Conchoidem utramque & rectam BD semper interjicitur recta QM, vel QN, ipsi AE æqualis (§. 535); neutra Conchoidum cum recta BD concurrere potest, consequenter BD est asymptotus utriusque Conchoidis. Tab. VI. Fig. 61.

PROBLEMA CCXXV.

538. *Invenire æquationem pro Conchoide.*

Sit $QM = AE = a$, $EC = b$, $MR = EP = x$, $ER = PM = y$, erit $CP = b + x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$PE : MQ = EC : CQ$$
$$x : \quad a = b : \frac{ab}{x}.$$

Hinc $CM = a + ab : x = (ax + ab) : x$. Et quoniam $PM^2 + PC^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = (a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2) : x^2$; consequenter $x^4 + 2bx^3 + y^2 x^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 + 2a^2 bx + a^2 x^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis primæ explicans.

Sit $CE = b$, $QN = a$, $EG = ON = x$, $GN = EO = y$; erit $GC = b - x$ & (§. 268 *Geom.*)

$$EG : QN = GC : CN$$
$$x : \quad a = b - x : \frac{ab - ax}{x}$$

Habemus ergo, ob $CN^2 = CG^2 + GN^2$ (§. 417 *Geom.*), $(a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2) : x^2 = b^2 - 2bx + x^2 + y^2$, hoc est, $a^2 b^2 - 2a^2 bx + a^2 x^2 = b^2 x^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2 y^2$: quæ est æquatio naturam Conchoidis inferioris declarans.

COROLLARIUM.

539. Est adeo Conchois utraque linea tertii generis (§. 382).

DEFINITIO XLIX.

540. Aliæ *Conchoidum* species prodeunt, si fiat $CE : CQ = QM : AE$, vel indefinite si $CE^m : CQ^m = QM^m : AE^m$.

COROLLARIUM.

Tab. VI. Fig. 61. 541. Quare si $CE = b$, $AE = a$, $CQ = x$, $QM = y$, erit $ab = xy$ & pro infinitis Conchoidibus $a^n b^m = x^m y^n$.

SCHOLION.

542. *Æquatio hæc videtur eadem cum æquatione Hyperbolæ inter asymptotos* (§. 486); *eadem tamen non est, cum in præsente casu æquatio non exprimat relationem punctorum per rectas parallelas ad eandem rectam positione datam, quemadmodum in Hyperbola.*

PROBLEMA CCXXVI.

543. *Invenire æquationem ad quodlibet punctum Conchoidis, in qua* CE : CQ = QM : AE.

Sit $AE = a$, $CE = b$, $PM = y$, $PE = x$, erit $CP = b + x$, $CP^2 = b^2 + 2bx + x^2$, $CM^2 = y^2 + b^2 + 2bx + x^2$ (§. 417 *Geom.*), & (§. 268 *Geom*) CP : CM = CE : CQ = EP : QM. Quare CE. EP : CQ. QM = $CP^2 : CM^2$ (§. 213 *Arithm.*), hoc est, ob CQ. QM = CE. EA *per hypoth.*

$$CE.\ EP : CE.\ EA = CP^2 : CM^2$$

hoc est (§. 181 *Arith.*),

$$EP : EA = CP^2 : CM^2$$

$$x : a = b^2 + 2bx + x^2 : y^2 + b^2 + 2bx + x^2$$

$$ab^2 + 2abx + ax^2 = y^2 x + b^2 x + 2bx^2 + x^3$$

quæ est æquatio desiderata.

DEFINITIO L.

Tab. VI. Fig. 63. 544. Diametro AB semicirculi AOB jungatur ad angulos rectos recta indefinita BC. Ducatur recta AH, fiatque AM = IH, vel in altero quadrante LC = AN : erit punctum M, itemque L in curva AMOL, quam *Cissoidem* dixit DIOCLES inventor.

COROLLARIUM I.

545. Ducantur rectæ PM & KI ad AB normales; erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*), & (§. 268 *Geom.*) AP : KB = AM : IH. Sed AM = IH (§. 544). Ergo AP = KB (§. 149 *Arithm.*), consequenter AK = PB (§. 88 *Arithm.*), & PN = IK. Tab. VI. Fig. 63.

COROLLARIUM II.

546. Eodem modo patet, Cissoidem AMO semicirculum AOB bifariam dividere. Est enim AO : OF = AG : GB (§. 268 *Geom.*). Sed AO = OF (§. 544). Ergo AG = GB (§. 149 *Arithm.*). Est itaque ANO quadrans.

COROLLARIUM III.

547. AK : KI = KI : KB (§. 327 *Geom.*), hoc est, AK : PN = PN : AP (§. 545). Porro AK : (KI) PN = AP : PM (§. 268 *Geom.*). Ergo PN : AP = AP : PM (§. 167 *Arithm.*). Sunt adeo AK, PN, AP & PM quatuor lineæ continue proportionales &, si fiat $PN = v$, $AP = x$, $PM = y$, $x^2 = vy$. Eodem modo ostenditur esse AP, PN, AK, KL continue proportionales.

PROBLEMA CCXXVII.

548. *Invenire æquationem, quæ naturam Cissoidis* AMOL *declarat.*

Sit $AB = a$, $AP = x$, $PM = y$; erit $AK = PB$ (§. 545) $= a - x$, $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$ & (§. 547, 124)

$$AK^2 : PN^2 = AP^2 : PM^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 : ax - x^2 = x^2 : y^2$$

$$a^2 y^2 - 2axy^2 + x^2 y^2 = ax^3 - x^4$$

($a - x$ div.

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

hoc est, $(a - x) y^2 = x^3$

Theorema. In Cissoide DIOCLIS cubus abscissæ AP æquatur solido ex quadrato semiordinatæ PM in complementum diametri circuli genitoris PB.

COROL-

COROLLARIUM I.

Tab. VI. Fig. 63. 549. Quando punctum P cadit in B, tum fit $x = a$ & $BC = y$, consequenter $y^2 = \frac{a^3}{o}$ Quare $o : 1 = a^3 : y^2$, hoc est, valor ipsius y fit infinitus, adeoque Cissois AMOL cum BC nunquam concurrit. Est ergo BC Cissoidis asymptotus.

COROLLARIUM II.

550. Cissois est linea secundi generis (§. 382).

SCHOLION.

551. *Veteres tam Conchoide, quam Cissoide usi sunt ad inveniendas duas medias continue proportionales inter duas rectas datas, quemadmodum docet* PAPPUS.

DEFINITIO LI.

Tab. VI. Fig. 64. 552. Si recta AX dividatur in partes quotcunque æquales ipsique in punctis divisionum A, P, p &c. jungantur rectæ AN, PM, pm &c. continue proportionales, puncta N, M, m &c. in curva existunt, quæ *Logistica*, itemque *Logarithmica* vocari solet.

COROLLARIUM I.

553. Sunt ergo abscissæ AP, Ap &c. semiordinatarum PM, pm &c. logarithmi (§. 334 *Arithm.*).

COROLLARIUM II.

554. Hinc si $AP = x$, $Ap = v$, $PM = y$, $pm = z$, & logarithmi ipsorum y & $z = ly$ & lz; erit $x = ly$ & $v = lz$; consequenter $x : v = ly : lz$, hoc est, denominatores rationum AN : PM & AN : pm sunt inter se ut abscissæ AP & Ap.

COROLLARIUM III.

555. Quamobrem infinitas alias logisticas excogitare licet, si fiat $x^m : v^m = ly : lz$, ut nempe abscissarum potestates aut radices quæcunque (m nempe numerum fractum denotante) sint semiordinatarum logarithmi.

COROLLARIUM IV.

556. Cum semiordinatæ pm continuo decrescant, ratione AN ad pm cum abscissis continuo crescente (§. 552 *Analys.* & §. 205 *Arithm.*) curva ad axem AX continuo propius accedit. Quodsi pm ponatur fieri nihilo æqualis, ratio ipsius AN in infinitum augetur, consequenter & abscissa AP (§. 554.). Quare logistica nonnisi infinito intervallo cum axe concurrit, adeoque AX est ejus asymptotus. Tab. VI. Fig. 64.

DEFINITIO LII.

557. Si quadrans circuli in partes quotcunque æquales in punctis P, p, p, &c. dividatur & ex radiis CP, Cp, Cp, &c. resecentur CM, Cm, Cm &c. continue proportionales; puncta M, m, m, &c. erunt in *Logistica spirali*. Tab. VI. Fig. 65.

COROLLARIUM I.

558. Sunt ergo arcus AP, Ap &c. logarithmi ordinatarum CM, Cm &c.

COROLLARIUM II.

559. Unde liquet, infinitas logisticas spirales excogitari posse (§. 555).

DEFINITIO LIII.

560. Si quadrans BGD bifariam dividatur in G & arcus BG, GD denuo subdividantur bifariam in E & F, atque ita porro; axis AC arbitrariæ longitudinis assumtus eodem modo dividatur in partes æquales Ab, bi, ik, kC, tandemque in punctis b, i, k, C applicentur normales eb, ig, kf, Cd ipsis HE, IG, KF, CD æquales; puncta A, e, g, f, d erunt in Linea, a LEIBNITIO inventore *Linea Sinuum* dicta. Tab. VI. Fig. 66.

COROLLARIUM.

561. Cum HE, IG, KF, CD sint sinus arcuum BE, BG, BF, BD (§. 2 *Trigon.*) erunt abscissæ Ab, Ai, Ak, AC ut arcus seu anguli, semiordinatæ eb, ig, kf, Cd, ut sinus eorundem arcuum seu angulorum.

Definitio LIV.

Tab. VI. Fig. 66. 562. Iisdem factis, quæ in definitione præcedente fieri præcipimus, fiant *eh*, *ig*, *kf* &c; tangentibus BL, BM, BN &c. vel secantibus CL, CM, CN &c. æquales; Curvæ adhuc aliæ gignentur, quas *Lineas Tangentium* & *Secantium* appellare libet.

Corollarium.

563. In linea tangentium abscissæ sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem tangentes: in secantium vero linea abscissæ itidem sunt ut arcus seu anguli, semiordinatæ ut eorundem secantes.

Definitio LV.

Tab. VI. Fig. 67. 564. Quadrans arcus ANB dividatur in partes quotcunque æquales in N, *n* &c. per continuam bisectionem; in totidem dividatur radius AC per puncta P, *p* &c. Ducantur radii CN, *cn* &c. denique ex punctis P, *p* &c. erigantur perpendiculares PM, *pm* &c. istis in punctis M, *m* &c. occurrentes: erunt puncta M, *m* &c. in curva, quam Dinostrates inventor *Quadratricem* appellavit.

Corollarium.

565. Est ergo ANB : AN = AC : AP. Quare si fiat ANB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP $= y$; erit $ay = bx$.

Definitio LVI.

Tab. VI. Fig. 68. 566. Si quadrans ANB & ejus radius in partes æquales dividantur, ut in definitione præcedente, & ex punctis P, *p* &c. agantur rectæ PM. *pm* &c. ipsi CB; ex punctis N *n* &c. rectæ NM, *nm* &c. ipsi AC parallelæ: puncta M, *m*, &c. sunt in *Quadratrice Tschirnhusiana* a D^no^ de Tschirnhausen ad imitationem alterius excogitata (*a*).

(*a*) In *Medicina Mentis* part. II. p. 114.

Corollarium I.

567. Cum etiam hic ANB : AN = AC : AP; Quadratrix quoque *Tschirnhusiana* continetur sub æquatione $ay = bx$. Tab. VI. Fig. 68.

Corollarium II.

568. Quoniam PM = QN, erit PM Sinus arcus AN (§. 2. *Trigon.*). Quare cum sit AP : A*p* = AN : A*n* (§. 566); abscissæ Quadratricis hujus sunt ut arcus & semiordinatæ ut sinus eisdem respondentes, quemadmodum in linea sinuum (§. 561).

Definitio LVII.

569. Peripheria circuli AP*p* A dividatur in partes quotcunque æquales in punctis, P, *p*, per continuam bisectionem. In totidem partes dividatur radius CA, fiatque CM parti uni, C*m* vero duabus &c. partibus radii æqualis. Erunt puncta M, *m*, *m*, &c. in linea curva, quam ab inventore Archimede dicunt *Spiralem* vel *Helicem Archimedeam*. Dicitur autem *Spiralis prima*, quia continuari potest, circulo duplo radio descripto: immo *secunda* continuatur, descripto radio circulo triplo & ita porro in infinitum. Tab. VII. Fig. 69.

Corollarium I.

570. Est ergo AP ad peripheriam ut CM ad radium. Quare si peripheria dicatur p, radius AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$, erit CM $= r - y$, consequenter ob $p : r = x : r - y$; habebimus $pr - py = rx$.

Corollarium II.

571. Si CM $= y$; erit $rx = py$: quam æquationem cum Quadratrice tam Dinostratis, quam Tschirnhusii, communem habet spiralis.

Co-

COROLLARIUM III.

572. Quare pro infinitis ſpiralibus & quadratricibus erit $r^{r} x^{m} = p^{r} y^{m}$.

DEFINITIO LVIII.

Tab. VII. Fig. 70. 573. *Cyclois* vel *Trochois* eſt curva, quam deſcribit punctum *a* in peripheria circuli, ſi circulus ſuper recta AC rotatur.

COROLLARIUM I.

574. Recta igitur AC peripheriæ; AD ſemiperipheriæ circuli æqualis eſt, & in quocumque circuli genitoris ſitu *Ad* arcui *Pd*.

COROLLARIUM II.

575. Si PL ducatur cum AD parallela; erit PM arcui BM circuli genitoris æqualis. Eſt enim $Pd = Ad$ & hinc $Pb = dD$ (§. 574). Quare cum $NL = Dd$ (§. 226 *Geom.*) & ob $Pb = MB$ etiam $PN = ML$ (§. 12 *Trigon.*); erit etiam $PN + NM = PM = ML + NM = NL = Dd$; conſequenter ob $Dd = Pb = MB$, *per demonſtr.* $PM = MB$. Sumto igitur arcu MB pro abſciſſa, PM pro ſemiordinata, ſi $BM = x$, $PM = y$; erit $x = y$.

DEFINITIO LIX.

576. *Epicyclois* deſcribitur, ſi circulus non ut in præcedente definitione ſuper recta, ſed ſuper peripheria alterius circuli incedat. Dicitur *Epicyclois ſuperior*, ſi circulus genitor per peripheriæ convexitatem rotatur: *Epicyclois inferior*, ſi ejus concavitatem emetitur.

SCHOLION I.

577. *Logarithmica*, *Logiſtica ſpiralis*, *Linea ſinuum*, *Linea tangentium*, *Linea ſecantium*, *Quadratrix* DINOSTRATIS, *Quadratrix* Tſchirnhuſiana, *Spiralis* Archimedea, *Cyclois*, *Epicyclois ſunt lineæ transcendentes*; *neque enim per æquationes algebraicas explicari poſſunt. Tradidimus equidem pro aliquibus earum æquationes; veruntamen cum in his aſſumſerimus arcus circulares in numerum indeterminatarum, æquationes algebraicæ non ſunt. Suppoſuimus enim ſuperius, æquationes algebraicas relationem, quam habent puncta curvarum ad axem vel diametros, per ſolas lineas rectas explicare debere.*

SCHOLION II.

578. *Innumeræ autem curvæ aliæ tam algebraicæ, quam transcendentes excogitari poſſunt & actu excogitatæ ſunt a Geometris. Sed de his omnibus agere minime conſultum eſt. Trademus autem in Analyſi infinitorum methodos generales, quibus non modo curvarum hactenus explicatarum, ſed etiam aliarum quarumcunque ſymptomata, ſi quando iis opus habemus, erui poſſunt. Ut tamen appareat, quomodo plures excogitari poſſint; unum alterumque exemplum addere lubet.*

PROBLEMA CCXXVIII.

§. 579. *Invenire naturas curvarum, quæ prodeunt, ſi ſemiordinatæ* PM *continuentur in* N, *donec fiant chordis* AM *æquales.* Tab. XIII. Fig. 125.

Facile apparet, curvas infinitas, immo infinitas earum ſeries conſtrui poſſe. Æquatio igitur in dato caſu ſpeciali eruenda ex æquatione curvæ genetricis ABC. Sit ea circulus, cujus diameter *a*. Sit in omni caſu $AP = x$, $PN = y$; erit $PM^2 = ax - x^2$ (§. 377). Quare cum $AP^2 = x^2$, & $AM^2 = AP^2 + PM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $AM^2 = ax$, conſequenter æquatio ad curvam genitam AND, $y^2 = ax$. Eſt itaque curva AND Parabola (§. 388).

Sit curva genetrix AMC Parabola: erit $PM^2 = ax$ (§. 388); conſequenter $AM^2 = PN^2 = ax + x^2$. Quoniam itaque

Tab. XIII. *Fig.* 125. itaque æquatio ad curvam AND, $y^2 = ax + x^2$; erit ea Hyperbola æquilatera, cujus axis transversus $= a$ (§. 507).

Sit curva genetrix AMC Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, consequenter $AM^2 = PN^2 = ax + 2x^2$. Æquatio itaque ad curvam AND, $y^2 = ax + 2x^2$, adeoque eadem Hyperbola scalena, cujus parameter a, axis transversus vero $= \frac{1}{2}a$ (§. 459).

Sit AMC Parabola secundi generis, erit $PM = \sqrt[3]{a^2x}$ (§. 519), adeoque $PM^2 = \sqrt[3]{a^4x^2}$ & $PN^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$. Cum itaque æquatio ad curvam sit $y^2 = x^2 + \sqrt[3]{a^4x^2}$; erit $(y^2 - x^2)^3 = a^4x^2$, seu $y^6 - 3x^2y^4 + 3x^4y^2 - x^6 = a^4x^2$.

SCHOLION.

580. *Patet per Problema præsens plurimarum curvarum descriptiones facillimo negotio detegi posse: quod idem per sequentia quoque Problemata intelligitur. Nec minus liquet, eodem modo ad axem* AB *applicari posse tangentes, subtangentes, normales, subnormales, & quascunque alias lineas eodem modo determinatas. Hoc pacto subinde Theoremata non inelegantia reperiuntur, qualia in ipsa resolutione Problematis præsentis continentur*, v. gr. *Quod, si Parabola circa diametrum circuli describatur, chordæ circuli* AM *sint semiordinatis Parabolæ* PN *æquales.*

PROBLEMA CCXXIX.

Tab. XIII. *Fig.* 126. 581. *Investigare naturas curvarum, quæ gignuntur, si ad chordam* AM *curvæ genetricis* AMC *erigatur perpendicularis* AN *semiordinatam* PM *ultra axem* AB *continuatam secans in* N.

Sit curva genetrix AMC: Quoniam MAN angulus rectus *per hypothesin*; erit PM : AP = AP : PN (§. 327 *Geom.*); consequenter $PM^m : AP^m = AP^m : PN^m$ (§. 124), adeoque $PN^m = AP^{2m} : PM^m$; consequenter si AP $= x$, PN $= y$; $y^m = x^{2m} : PM^m$. Valor igitur ipsius PM & exponens m ex æquatione curvæ genetricis AMC determinantur. Tab. XIII. *Fig.* 126.

Sit AMC circulus; erit $PM^2 = ax - x^2$, adeoque æquatio ad curvam ANR, $y^2 = x^4 : (ax - x^2) = x^3 : (a - x)$. Est igitur curva ANR Cissois DIOCLIS (§. 548).

Sit curva genetrix Parabola *Apolloniana*: erit $PM^2 = ax$, adeoque $y^2 = x^4 : ax = x^3 : a$, hoc est, $ay^2 = x^3$. Est igitur ANR Parabola secundi generis (§. 519).

Sit in genere curva genetrix quædam ex Parabolis infinitis, quæ definiuntur per æquationem $PM^m = ax^{m-1}$, adeoque $y^m = x^{2m} : ax^{m-1} = x^{m+1} : a$ hoc est, $ay^m = x^{m+1}$. Est igitur ANR Parabola proxime superior genetrice. Unde patet modus describendi omnes Parabolas in infinitum, quæ continentur sub æquatione $y^m = ax^{m-1}$.

Sit curva genetrix Hyperbola æquilatera: erit $PM^2 = ax + x^2$, adeoque $y^2 = x^4 : (ax + x^2) = x^3 : (a + x)$. Est igitur ANR curva secundi generis affinitatem quandam habens cum Cissoide; sed quæ peculiari nomine destituitur.

Sit curva genetrix Ellipsis: erit $PM^2 = (abx - bx^2) : a$, adeoque $y^2 = ax^4 : (abx - bx^2)$ hoc est $by^2 = ax^3 : (a - x)$.

SCHO-

SCHOLION I.

582. *Si Circuli superiorum generum sumuntur pro genetrice, Cissoides superiorum generum erunt genitæ.*

PROBLEMA CCXXX.

Tab. XIII. Fig. 127. 583. *Sit curva genetrix* AMK, *recta* AT *ad axem* AX *normalis*, AS *magnitudinis constantis; investigare naturam curvæ, in qua est punctum* N, *quod determinatur, demissa ex* S *perpendiculari* SR *ad semiordinatam genetricis* PM *& ducta recta* QN *par punctum curvæ genetricis* M *axi* AX *parallela, recta* AN *ex vertice* A *per punctum* R *ducta occurrente in* N.

Sit AS $= a$, AQ $= x$, QN $= y$, erit ob parallelas SR & QN (§. 268 *Geom.*)

AS : (SR) QM = AQ : QN Tab. XIII. Fig. 127.

$$a : QM = x : y$$

adeoque $\frac{QM.\,x}{a} = y$

Sit AMK Parabola *Apolloniana*, erit QM $= x^2 : a$. Est igitur

$$y = x^3 : a^2$$

$$a^2 y = x^3$$

quæ est æquatio ad Parabolam secundi generis (§. 519).

Sit AMK quædam ex infinitis Parabolis, erit QM $= x^m : a^{m-1}$ (§. *cit.*), adeoque $y = x^{m+1} : a^m$; consequenter $a^m y = x^{m+1}$. Est igitur curva genita Parabola proxime superior genetrice, patetque simul modus describendi Parabolas omnes in infinitum, quæ continentur sub æquatione $a^{m-1} x = y^m$.

CAPUT VII.

De Locis Geometricis.

DEFINITIO XL.

584. *Locus Geometricus* est linea, per quam construitur Problema indeterminatum. In specie *Locus ad rectam* dicitur, si linea recta æquationi construendæ sufficit; *Locus ad circulum*, si circulo utendum & ita porro.

DEFINITIO XLI.

385. Loca ad lineam rectam & circulum Veteres dixere *Loca plana*: quæ vero sunt ad parabolam, ellipsin aut hyperbolam, *Loca solida*. Commodius Loca in ordines distinguuntur secundum numerum dimensionum, ad quem assurgunt quantitates indeterminatæ. Sic *Locus primi ordinis* est, si æquatio $x = ay : c$. *Locus secundi seu quadratici ordinis*, si ex. gr. $y^2 = ax$, vel $y^2 = a^2 - x^2$ &c. *Locus tertii seu cubici ordinis*, si ex. gr. $y^3 = a^2 x$, vel $y^3 = ax^2 - x^3$ &c.

PROBLEMA CCXXXI.

585. *Construere loca ad rectam.* Tab. VII. Fig. 71.

Si $y = ax : b$; $y = ax : b + c$, $y = ax : b - c$, vel $y = c - ax : b$; Locus semper est ad rectam. Sit enim angulus datus CAB, in quo fiat AI $= b$, IE $= a$:

Tab. VII. Fig. 71. ductis ipsi EI parallelis quibuscunque PM, *pm* &c. erit AP$=x$, PM$=y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

$$AI : IE = AP : PM$$
$$b : a = x : y$$

Ergo $ax : b = y$

Quodsi EI continuetur in G, ita ut sit IG $= c$, per G agatur DF ipsi AB, & ex A, AD ipsi EI parallela, erit AP$=$DQ $= x$, QM, $= y$. Est enim PM$=ax:b$, *per demonstr.* PQ$=c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo QM$=ax: b+c=y$.

Si LG$=b$, GE$=a$ & LQ$=x$: erit QM$=ax:b$, *per demonstr.* Fiat IG$=c$ & per I ducatur ipsi DF parallela AB, erit PQ$=c$ (§. 257 *Geom.*), consequenter PM$=ax : b - c$.

Tab. VII. Fig. 72. Denique sit AC$=c$ & AD$=b$; ducatur per D recta EF ipsi AC parallela fiatque DE$=a$. Ducatur recta AL & per C ipsi AL parallela CB. Quodsi alia parallela MN ad EF agatur: erit AP$=x$, PM$=y$. Est enim (§. 268 *Geom.*)

$$AD : DE = AP : PN$$
$$b : a = x : \frac{ax}{b}$$

Sed MN$=$AC$=c$ (§. 257 *Geom.*). Ergo PM$=c - ax : b$.

PROBLEMA CCXXXII.

587. *Invenire Theoremata generalia construendi omnes aequationes ad Parabolam.*

Duo Theoremata nobis investiganda: in quorum altero y refertur ad concavitatem, in altero autem ad convexitatem Parabolae.

Tab. VII. Fig. 75. Sint KP & DL, itemque KD & QM inter se parallelae, & LDH angulus quicunque. Sit porro KA$=p$, DH$=q$, LH$=r$, DK$=$PN (§. 257 *Geom.*)$=n$, DL$=f$, & parametro t describatur Parabola AM, cujus axis vel diameter AP. Sit porro DQ$=x$, QM$=y$: erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN \ (=PK)$$
$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Ergo AP$=$PK$-$KA$=fx : q - p$ & PM$=$QM$-$PN$-$QN$=y - \frac{rx}{q} - n$

Quare cum sit PM$^2 = t$. AP (§. 388), erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tfx}{q} - tp$$

hoc est,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tfx}{q} + tp$$

Tab. VII. Fig. 76. Sit denuo in casu altero, ubi IM parallela ipsi DQ & DI ipsi QM, KA$=p$, DH$=q$, LH$=r$, DK$=$PN (§. 257 *Geom.*)$=n$, DI$=f$, IM$=$DQ $=y$, QM$=x$. Parabola AM denuo parametro t describatur.

Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : f = y : \frac{fy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Ergo AP$=$DN$-$AK$=fy : q - p$ & PM $=$ QM

Tab. VII. Fig. 76. $= QM - QN - PN = x - ry : q - n$. Quare cum ſit $PM^2 = t . AP$; erit (§. 388, 419),

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q_2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = \frac{tſy}{q} - tp$$

hoc eſt,

$$x^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2y^2}{q^2} - 2nx + \frac{2nry}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tſy}{q} + tp$$

Tab. VII. Fig. 75. Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit $- \frac{2r}{q} = 0$, adeoque $\frac{r^2}{q^2} = 0$, & $ſ = q$; porro $n = 0$ & $tſ : q = a$, hoc eſt, $a = t$. Cadit ergo punctum D in A & Q in P, nec alia re opus eſt, quam ut parametro a Parabola AM deſcribatur: erit enim $AP = x$, $PM = y$.

Sit $y^2 + ay - bx + \frac{1}{4}aa = 0$; erit $2r : q = 0$, conſequenter H cadit in L, adeoque $ſ = q$. Porro $a = -2n$: ergo $- \frac{1}{2}a = n$. Item $-t = -b$, adeoque $t = b$. Denique $n^2 + tp = \frac{1}{4}aa$, hoc eſt, $\frac{1}{4}a^2 + bp = \frac{1}{4}a^2$, adeoque $p = 0$. Cadit adeo punctum K in A. Parametro itaque b deſcribenda Parabola AM & in A erigenda perpendicularis $AB = \frac{1}{2}a$. Ducta enim BS axi AB parallela, erit ob $n = \frac{1}{2}a$, $MS = y$ & $BS = x$. Tab. VII. Fig. 74.

Sit $yy - ay - bx + cc = 0$, erit $\frac{2r}{q} = 0$, adeoque $q = ſ$

$$\frac{-2n = -a}{n = \frac{1}{2}a} \qquad \frac{-t = -b}{t = b} \qquad \frac{n^2 + tp = -cc}{tp = -c^2 - \frac{1}{4}aa}$$
$$p = (-c^2 - \tfrac{1}{4}a^2) : b$$

Parametro ergo b deſcribenda Parabola AHM, & quia KA, ſive p, eſt quantitas negativa, auferenda eſt ex AP, ita ut origo indeterminatæ x ſtatuatur in R vel N. Denique ob $n = \frac{1}{2}a$; fiat $AD = \frac{1}{2}a$ & ducatur DQ parallela axi AP, erit $NQ = RP = x$, & $QM = y$.

Tab. VII. Fig. 74. Sit $x^2 - ay + bb = 0$: erit, vi Theorematis ſecundi, $r : q = 0$, adeoque $q = ſ$. Porro $n = 0$ &

$$\frac{-t = -a}{t = a} \qquad \frac{\frac{tp = bb}{ap = bb}}{p = \frac{bb}{a}}$$

Conſtruitur adeo Parabola AHM parametro a, factaque $AK = bb : a$; erit $KP = y$, $PM = x$.

Sit $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, erit

$$- \frac{2r}{q} = - \frac{a}{b} \quad 2n = 0 \quad - \frac{tſ}{q} = -c$$
$$\frac{r}{q} = \frac{a}{2b} \quad n = 0 \quad t = \frac{qc}{ſ} = \frac{2bc}{ſ}$$
$$n^2 + tp = 0$$
$$p = 0$$

Conſtruatur itaque parametro $2bc : ſ$ Parabola AHM, & factis $AO = 2b$, atque RO ad AP normalis $= a$, ducatur recta AT; erit TM ipſi OR parallela $= y$, $AT = x$.

Ceterum loca eſſe rite conſtructa patet, ſi aſſumtis valoribus, prout per regulam determinantur, quæratur æquatio ad curvam, eademque cum propoſita reperiatur. Etenim ſi in exemplo ultimo $AO = 2b$, $RO = a$, parameter $= 2bc : ſ$, $AT = x$, $TM = y$, cum ſit

$$AO : AR = AT : AP$$
$$2b : ſ = x : \frac{ſx}{2b}$$

erit $t . AP = 2bcſx : 2bſ = cx$.

Et quia $AO : OR = AT : TP$

$$2b : a = x : \frac{ax}{2b}$$

erit $PM = TM - TP = y - \frac{ax}{2b}$

adeoque $PM^2 = y^2 - \frac{axy}{2b} + \frac{a^2x_2}{4b^2}$

Quare $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} = cx$, conſequenter $y^2 - \frac{axy}{b} + \frac{a^2x^2}{4b^2} - cx = 0$, quæ eſt æquatio ad conſtruendum propoſita.

PROBLEMA CCXXXIII.

588. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad Ellipſin.*

Tab. VII. Fig. 78. Circa diametrum AB deſcripta ſit Ellipſis AMB, ſintque KD & LH ſemiordinatæ PM, DL diametro AB parallelæ. Sit KD = PN = n, KC = p, DH = q, LH = r, DL = f, ſemidiameter AC vel CB = m, parameter = t, DQ = x, QM = y. Erit (§. 257 *Geom.*) KP = DN, & (§. 268 *Geom.*)

DH : HL = DQ : QN

$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

DH : DL = DQ : DN

$$q : f = x : \frac{fx}{q}$$

Quare CP = DN — KC = $fx : q - q$ & PM = QM — QN — PN = $y - rx : q - n$. Jam ex natura Ellipſis (§. 420),

$$t : 2m = PM^2 : AP.\ PB.$$

Eſt vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$, $AP = m + \frac{fx}{q} - p$ & $PB = m - \frac{fx}{q} + p$, adeoque $AP.\ PB = m^2 - p^2 + \frac{2pfx}{q} - \frac{f^2x^2}{q^2}$. Ergo (§. cit.) $y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = \frac{tm^2 - tp^2}{2m} + \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tf^2x^2}{2mq^2}$

Unde tandem habetur

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$+ \frac{tf^2x^2}{2mq^2} \quad - \frac{2tpfx}{2mq} - \frac{tm^2}{2m}$$
$$+ \frac{tp^2}{2m}$$

Sit ex. gr. $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy, y & x: erunt $r : q = 0$, $q = f$, $n = 0$, $p = 0$; hinc $t : 2m = c : b$, hoc eſt, $c : b$ exprimit rationem parametri ad diametrum. Erit porro $-\frac{tm^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ſubſtituto pro $t : 2m$ valore ipſius ante invento $c : b$, $\frac{m^2c}{b} = \frac{aac}{b}$. Quare $m^2 = aa$, & hinc ſemidiameter $m = a$. Jam quoniam $2m : t = b : c$, erit $t = \frac{2ac}{b}$. Parametro igitur $\frac{2ac}{b}$ & axe $2a$ conſtruatur Ellipſis AMB; erit CP = x, PM = y.

Sit $y^2 + \frac{cx^2}{b} - \frac{cdx}{b} - \frac{aac}{b} = 0$. Quia in æquatione non habentur xy & y, erit $r : q = 0$, $n = 0$; conſequenter $f = q$. Quare $\frac{t}{2m} = \frac{c}{b}$, adeoque ratio diametri AB ad parametrum eſt = $b : c$. Porro $\frac{2tp}{2m} = \frac{cd}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $2p = d$, ſeu $p = \frac{1}{2}d$. Denique $-\frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{aac}{b}$, hoc eſt, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 - p^2 = aa$, ſeu $m^2 = aa + \frac{1}{4}dd$. Eſt itaque ſemidiameter $\surd(aa + \frac{1}{4}dd)$. Quodſi ergo ſemidiametro $\surd(aa + \frac{1}{4}dd)$ & parametro $2c\surd(aa + \frac{1}{4}dd) : b$ deſcribatur Ellipſis, fiatque KC = $\frac{1}{4}d$; erit KP = x, PM = y.

Sit $y^2 - dxy : f + bx^2 : c - aa = 0$. Erit $2r : q = d : f$, adeoque $r : q = d : 2f$. Porro $r^2 : q^2 + tf^2 : 2mq^2 = b : c$, hoc eſt $d^2 : 4f^2 + tf^2 : 2m.4f^2 = b : c$, conſequenter $t : 2m = (4bf^2 - cd^2) : cf^2$. Eſt denique $n = 0$, $p = 0$ & $-tm^2 : 2m = -aa$, conſequenter $m^2 = a^2cf^2 : (4bf^2 - cd^2)$, adeoque $m = \surd a^2cf^2 : \surd(4bf^2 - cd^2)$. Hinc vero porro ad datam rationem $2m : t$ reperitur parameter t. Quare ſi parametro t & diametro $2m$ Ellipſis conſtruatur, fiatque CF = $2f$, DF = d, ducta recta CQ ex C per F ſemiordinatæ PM continuatæ in Q occurrente, erit QM = y, CQ = x. Tab. VII. Fig. 77.

Locum rite eſſe conſtructum, eodem modo quo in Parabola oſtenditur. Etenim

Tab. VII. *Fig.* 77.

$$CF : DF = CQ : QP$$
$$2f : d = x : \frac{dx}{2f}$$

Quare $PM = y - \frac{dx}{2f}$, consequenter $PM^2 = y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$.

Porro $CF : CD = CQ : CP$
$$2f : f = x : \frac{fx}{2f}$$

Quare $AP = \sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)}} + \frac{fx}{2f}$ & $PB = \sqrt{\frac{aacf^2}{(4bf^2 - cd^2)}} - \frac{fx}{2f}$, consequenter $AP.PB = \frac{aacf^2}{4bf^2 - cd^2} - \frac{f^2x^2}{4f^2}$. Est itaque $\frac{t}{2m}.AP.PB = (4bf^2 - cd^2)\, a^2 cf^2 : cf^2\, (4bf^2 - cd^2) - (4bf^2 f^2 x^2 - cd^2 f^2 x^2) : 4cf^2 f^2 = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$; consequenter cum sit in Ellipsi $\frac{t}{2m}. AP.PB = PM^2$ (§.420), $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{d^2x^2}{4f^2} = a^2 - \frac{bx^2}{c} + \frac{d^2x^2}{4f^2}$. Ergo $y^2 - \frac{dxy}{f} + \frac{bx^2}{c} - a^2 = 0$.

COROLLARIUM.

589. Cum in Ellipsi sit $b : a = y^2 : ax - x^2$ (§.420); si $b = a$, hoc est, si parameter diametro æqualis, erit $y^2 = ax - x^2$, seu $y^2 - ax + x^2 = 0$, quæ est æquatio ad Circulum (§. 377). Æquatio itaque localis ad Ellipsin degenerat in æquationem localem ad Circulum: si ponatur $t = 2m$ & angulus ad P rectus: quo facto erit

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0.$$
$$+ \frac{f^2x^2}{q^2} \qquad - \frac{2pfx}{q} \quad \begin{matrix} -m^2 \\ +p^2 \end{matrix}$$

Ceterum cum ex comparatione formulæ propositæ cum generali demum intelligatur, num $t = 2m$; eadem formula pro construendis locis ad Ellipsin atque ad Circulum sufficit.

Ponamus ex. gr. $y^2 + x^2 - by - cx = 0$. Quoniam xy deest, erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Locus adeo planus est ad Circulum. Porro

$$\frac{-2n = -b}{n = \tfrac{1}{2}b} \qquad \frac{-2tp : 2m = -c}{2p = c,\ \text{ob } t = 2m.}$$
$$p = \tfrac{1}{2}c$$

Denique $\frac{n^2 - m^2 + p^2 = 0}{n^2 + p^2 = m^2}$

h. e. $\frac{\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2 = m^2}{m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)}}$

Quare ducta linea recta AB & in ea assumta $CN = GD = \frac{1}{2}c$, si porro fiat $GN = CD$, & ad AB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$, atque ex centro C radio CG describatur circulus; erit $GR = NP = x$ & $RM = y$. Tab. VII. *Fig.* 73.

Cum enim sit $CG^2 = CD^2 + GD^2$ (§. 417 *Geom.*), erit $CG = \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2)}$. Porro, ob $PR = GN$ (§. 257 *Geom.*) $= \frac{1}{2}b$, est $PM = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}bb$. Similiter $CP = PN - NC = x - \frac{1}{2}c$, adeoque $CP^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}cc$. Quare cum sit $CP^2 + PM^2 = CM^2$ (§. 417 *Geom.*); erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 + x^2 - cx + \frac{1}{4}cc = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}c^2$, adeoque $y^2 + x^2 - by - cx = 0$: quæ est æquatio localis ad construendum proposita.

PROBLEMA CCXXXIV.

590. *Invenire Theorema generale construendi omnia loca ad Hyperbolam circa diametrum descriptam.* Tab. VIII. *Fig.* 80.

Diametro transversa $AB = 2m$ & parametro t descripta sit Hyperbola AM, cujus centrum in C, ductisque KD & LH cum QM, DL vero cum BP parallelis, fiat $KD = PN = n$, $KC = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = f$, $DQ = x$, $QM = y$, erit (§. 257 *Geom.*) $KP = DN$ & (§. 268 *Geom.*)

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$

Tab. VIII. Fig. 80.

$DH : DL = DQ : DN$

$q : f = x : \frac{fx}{q}$

Quare $CP = DN - KC = \frac{fx}{q} - p$ & $PM = QM - QN - PN = y - rx : q - n$. Jam (§. 459)

$t : 2m = PM^2 : AP. PB$

Est vero $PM^2 = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$ & $AP. PB = (CP - CA)(CP + CA) = CP^2 - CA^2$ (§. 499) $= \frac{f^2x^2}{q^2} - \frac{2pfx}{q} + p^2 - m^2$. Unde habetur $\frac{tf^2x^2}{2mq^2} - \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tp^2}{2m} - \frac{tm^2}{2m} = y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2$.

Quare æquatio generalis pro quovis loco hyperbolico,

$$y^2 - \frac{2rxy}{q} + \frac{r^2x^2}{q^2} - 2ny + \frac{2nrx}{q} + n^2 = 0$$
$$- \frac{tf^2x^2}{2mq^2} \qquad + \frac{2tpfx}{2mq} + \frac{tm^2}{2m}$$
$$- \frac{tp^2}{2m}$$

Quando contingit, reperiri $t = 2m$, Hyperbola est æquilatera (§. 505).

Eadem formula reperitur, si Hyperbola ad diametrum conjugatam refertur, nisi quod $tm^2 : 2m$ signo — afficiatur.

Sit ex. gr. $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{aac}{b} = 0$. Cum in æquatione non habeantur xy, y & x; erit $r : q = 0$, $n = 0$, $p = 0$, $f = q$; consequenter $-t : 2m = -c : b$, adeoque ratio parametri t ad diametrum $2m = c : b$. Porro $tm^2 : 2m = aac : b$, hoc est, ob $t : 2m = c : b$, $m^2 = aa$. Diameter adeo Hyperbolæ $2a$: unde ob rationem diametri ad parametrum datam reperiri diameter potest. Quare si datis diametro & parametro Hyperbola AML construatur; erit $CP = x$, $PM = y$. Est enim $AC = CB = a$, adeoque $BP = a + x$ & $AP = x - a$, consequenter $AP. PB = x^2 - a^2$. Quare $c : b = y^2 : x^2 - a^2$ (§. 459). Est itaque $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{a^2c}{b} = 0$. Tab. VIII. Fig. 79.

Sit $y^2 - \frac{cx^2}{b} + \frac{acx}{b} = 0$. Quoniam in æquatione desiderantur xy, y & quantitas pure cognita; erit $r : q = 0$, $n = 0$ & quia (ob $r = 0$), DL coincidit cum DH, $f = q$. Quamobrem $-t : 2m = -c : b$, hoc est, ratio parametri t ad diametrum $2m$ denuo $= c : b$. Porro $2tp : 2m = ac : b$, hoc est, (ob $t : 2m = c : b$,) $2p = a$ seu $p = \frac{1}{2}a$: Denique quia ultimus terminus deficit, erit $n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$ seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}aa$, adeoque $m = \frac{1}{2}a$. Fig. 80.

Quare cum ob rationem diametri ad parametrum datam detur etiam parameter $= \frac{ac}{b}$; constructa Hyperbola AML, erit $BP = x$, $PM = y$: quod ostenditur ut ante. Fig. 79.

Sit $y^2 - x^2 + by - ax = 0$. Quia xy desideratur; erit $r : q = 0$, consequenter $f = q$. Quare $-t : 2m = 1$, hoc est, $t = 2m$. Est itaque locus ad Hyperbolam æquilateram (§. 505). Porro

$$-2n = +b \qquad 2tp : 2m = -a$$
$$n = -\tfrac{1}{2}b \qquad 2p = -a, \text{ob } t = 2m$$
$$p = -\tfrac{1}{2}a.$$
$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} = \frac{tp^2}{2m}$$
$$n^2 + m^2 = p^2$$
$$m^2 = p^2 - n^2$$

hoc est, $m^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$

Diametro itaque $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ construatur Hyperbola æquilatera AML, fiatque CR =

Tab. VIII. Fig. 79. $CR = \frac{1}{2}a$, $KR = GP = \frac{1}{2}b$; erit $KG = RP = x$, $GM = y$. Eſt enim $PB = CB + CR + RP = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + \frac{1}{2}a + x$ & $AP = AR + RP = CR - CA + RP = \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)} + x$, adeoque $AP.PB = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = GM + GP = y + \frac{1}{2}b$: adeoque $PM^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507); erit $y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 = ax + x^2 + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 + by = ax + x^2$, conſequenter $y^2 - x^2 + by - ax = 0$.

Sit $y^2 - x^2 - by + ax = 0$. Quia xy deſideratur, erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & $q = s$. Quare $t : 2m = 1$, ſeu $t = 2m$. Eſt itaque locus ad Hyperbolam æquilateram. Porro

$$\frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \quad \frac{2p = a}{p = \frac{1}{2}a} \quad \begin{aligned} n^2 + m^2 - p^2 &= 0 \\ \hline m^2 &= p^2 - n^2 \\ &= \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2 \\ \hline m &= \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2)} \end{aligned}$$

Diametro $2\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$ conſtruatur Hyperbola æquilatera AML, factaque CF ex centro $C = \frac{1}{4}a$ & FH ad FP perpendiculari $= \frac{1}{2}b$, ductisque HN ipſi FP & NM ipſi FH parallelis; erit $HN = x$, $NM = y$. Eſt enim $BP = FP - BF = x - \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, $AP = FP - FA = x - \frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}b^2)}$, adeoque $AP.PB = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$. Porro $PM = MN - PN = y - \frac{1}{2}b$, adeoque $PM^2 = y^2 - by + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum ſit $PM^2 = AP.PB$ (§. 507), erit $y^2 - by + \frac{1}{4}b^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}b^2$, adeoque $y^2 - x^2 - by + ax = 0$.

PROBLEMA CCXXXV.

Tab. VIII. Fig. 81. 591. *Invenire Theorema generale conſtruendi omnia loca ſolida ad Hyperbolam intra aſymptotos.*

Sint SA & AR aſymptoti Hyperbolæ MI. Ducatur DL uni earum AR parallela & huic jungatur utcunque recta DH. Sint denique KD, QM, IR, LH alteri aſymptotorum SA parallelæ. Ponamus denuo $KD = PN = n$, $KA = p$, $DH = q$, $LH = r$, $DL = s$, $DQ = x$, $QM = y$, $RI = m$, $AR = DL = s$: erit (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. Fig. 81.

$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = x : \frac{rx}{q}$$
$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = x : \frac{sx}{q}$$

Ergo $AP = DN - AK = \frac{sx}{q} - p$ & $PM = QM - PN - NQ = y - n - rx : q$.

Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502).

$$ms = \frac{syx}{q} - \frac{srx^2}{q^2} - py - \frac{snx}{q} + \frac{prx}{q} + pn$$

$$msq = syx - \frac{srx^2}{q} - pqy - snx + prx + pnq$$
$$mq = xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} - nx + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s}$$
$$xy - \frac{rx^2}{q} - \frac{pqy}{s} + \frac{prx}{s} + \frac{pnq}{s} = 0.$$
$$- nx - mq$$

Tab. VIII. Fig. 82. Invenitur adhuc regula alia pro locis ad Hyperbolam intra aſymptotos, ſi valor ipſius x ponatur eſſe QM.

Sit nimirum IM Hyperbola, cujus aſymptoti RA & AS. Ducantur DT, HL & QM cum aſymptoto AS, DL vero cum altera KR, & TM ipſi DH utcunque ductæ parallela. Sit ut ante $AK = p$, $KD = PN = n$, $DH = q$, $DL = AR = s$, $HL = r$, $RI = m$, $QM = x$, $DQ = TM = y$. Erit (§. 268 *Geom.*)

$$DH : DL = DQ : DN$$
$$q : s = y : \frac{sy}{q}$$
$$DH : HL = DQ : QN$$
$$q : r = y : \frac{ry}{q}$$

Er-

Tab. VIII. Fig. 82. Ergo $AP = DN - AK = fy : q - p$ & $PM = QM - QN - NP = x - ry : q - n$. Quare ob $AR.RI = AP.PM$ (§. 502)

$$mf = \frac{fxy}{q} - \frac{rfy^2}{q^2} - \frac{fny}{q} - px + \frac{pry}{q} + pn.$$

Unde tandem eodem modo, quo ante usi sumus, reperitur.

$$xy - \frac{ry^2}{q} - \frac{pqx}{f} + \frac{pry}{f} + \frac{pnq}{f} = 0.$$
$$- ny - mq$$

Sit ex. gr. $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$: erit $r : q = 0$, adeoque $r = 0$ & hinc $q = f$, quia L cadit in H, $-pq : f = + fd : c$, hoc est,
Fig. 81. ob $q = f$, $p = -fd : c$. Porro $+ pr : f - n = 0$, quia x in æquatione præsente deficit, & hinc, ob $r = 0$, $n = 0$. Denique $pnq : f - mq = -abd : c$. Sed $pnq : f = 0$; ergo $mq = mf = abd : c$. Quare si $f = ab : c$; erit $m = d$. Fiat igitur $AR = ab : c$, & $IR = d$, atque constructa Hyperbola intra asymptotos, porro $OA = fd : c$; erit $OP = x$, $PM = y$. Nam $AP = x + fd : c$ adeoque $AP.PM = xy + fdy : c$. Quare cum sit $AR.RI = abd : c$, erit

$$xy + fdy : c = abd : c$$

adeoque $xy + \frac{fdy}{c} - \frac{abd}{c} = 0$.

Sit $xy - \frac{bxx}{a} - cy = 0$. Erit $-r : q = -b : a$, hoc est, $r = b$, $q = a$. Porro $-pq : f = -c$. Ergo $p = fc : a$. Cum x in æquatione desit; $pr : f - n = 0$, seu $pr : f = n$, hoc est, $bc : a = n$. Denique quoniam terminus ultimus itidem deficit, $pnq : f - mq = 0$, seu $pnq : f = mq$, vel $pn : f = m$, hoc est, $bc^2 : a^2 = m$. Cognitis valoribus rectarum AK, KD, DH, HL, AR, RI; constructio loci manifesta est. Est enim $AK = fc : a$, $KD = bc : a$, $DH = a$, $HL = b$, $DL = AR = f$, $RI = bc^2 : a^2$, $DQ = x$, $QM = y$: His enim positis, erit $AR.RI = fbc^2 : a^2$. Porro (§. 268 *Geom.*).

$$DH : DL = DQ : DN$$

Tab. VIII. Fig. 81.

$$a : f = x : \frac{fx}{a}$$

Quare cum sit $KA = fc : a$, erit $AP = (fx - fc)\, a$. Est vero etiam

$$DH : LH = DQ : QN$$
$$a : b = x : \frac{bx}{a}$$

Quare cum sit $KD = PN = bc : a$, & $QM = y$, erit $PM = y - bx : a - bc : a$. Habemus adeo $AP.PM = \frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2}$.

Quoniam itaque $AR.RI = AP.PM$, erit $\frac{fxy}{a} - \frac{fcy}{a} - \frac{bfx^2}{a^2} + \frac{bfc^2}{a^2} = \frac{bfc^2}{a^2}$: unde reperitur $xy - cy - \frac{bx^2}{a} = 0$.

SCHOLION.

592. *Ut usus hujus doctrinæ appareat, exempla aliquot Problematum indeterminatorum in medium afferenda. Antequam tamen id fiat, tradenda sunt criteria, unde judicium fieri possit, cum quanam formularum antecedentium comparanda sit æquatio ad construendum proposita. Nimirum duo occurrere possunt casus: aut enim in æquatione proposita habetur* xy, *aut minus. Si in priori casu quadratorum indeterminatorum neutrum occurrat, vel saltem alterutrum, locus est Hyperbola intra asymptotos; si quadrata indeterminatarum* x^2 & y^2 *diversis signis afficiuntur, locus est Hyperbola circa diametrum descripta; si eadem quadrata eodem signo afficiuntur, sitque coëfficiens dimidius facti* xy *æqualis radici coefficientis quadrati* x^2, *locus est Parabola; si minor, Hyperbola; si major, Ellipsis. In casu posteriori, si unum tantum quadratorum indeterminatorum adsit, locus est Parabola; si utrumque eodem signo afficiatur, Ellipsis vel Circulus; si signis diversis gaudeant, Hyperbola. Nempe in casu ultimo Hyperbola est æquilatera, in penultimo Circulus, si terminus* x^2 *a fractione liber. Quæ omnia manifesta sunt ex accurata formularum generalium inter se collatarum contemplatione.*

Quod

Quod si quantitatis alicujus valor per regulam generalem eruitur negativus, quantitas ista ex parte opposita sumenda est, quemadmodum in exemplis propositis a nobis factum.

PROBLEMA CCXXXVI.

593. *Construere Rhomboidem ea conditione, ut rectangulum ex lateribus sit aquale quadrato dato.*

Tab. IV. Fig. 51. Sit quadratum datum a^2, sint latera rhomboidis x & y: erit per conditionem Problematis $xy = a^2$. Construenda itaque est Hyperbola intra asymptotos CG & CR, cujus potentia AI $= a$. Erit CQ latus unum rhomboidis, QM alterum (§ 488).

PROBLEMA CCXXXVII.

594. *Quadratum construere, quod sit aquale rectangulo, cujus latera differunt recta data.*

Sit recta data $= b$, latus unum rectanguli $= x$, erit alterum $= b + x$. Unde per conditionem problematis $y^2 = bx + x^2$: qui est locus ad Hyperbolam æquilateram, cujus parameter $= b$ (§. 507).

Id etiam ex formula generali elicitur. Quoniam enim $y^2 - x^2 - bx = 0$, erit (§. 590) $2r : q = 0$, adeoque $r = 0$, $q = f$, $r^2 : q^2 = 0$; porro $2n = 0$ & hinc $2nr : q = 0$, $n^2 = 0$. Est vero $-tf^2 : 2mq^2 = -1$, hoc est, ob $q^2 = f$. $t : 2m = 1$ seu $t = 2m$. Unde apparet, locum esse ad Hyperbolam æquilateram. Est præterea $2tpf : 2mq = -b$, hoc est, ob $t = 2m$ & $f = q$ $2p = -b$, unde $p = -\frac{1}{2}b$. Denique $tm^2 : 2m - tp^2 : 2m = 0$, quia quantitas mere cognita in formula data non habetur, hoc est, $m^2 - p^2 = 0$, seu $m^2 = p^2 = \frac{1}{4}bb$. Unde $m = \frac{1}{2}b$. Constructio ex constructione generali haud difficulter elicitur. Nimirum pro diametro transversa AB $= 2m$, pone b. Quia KC $= -\frac{1}{2}b$, punctum K cadet in partem contrariam & quidem in A, quia semidiametro in hoc casu æqualis. Unde origo indeterminatæ x erit in A, nam ob DK $=$ PN $= 0$, punctum D in K, consequenter in nostro casu in A cadit. Porro, ob HL $= 0$, puncta H & L adeoque & puncta Q & N, & ob PN $= 0$, puncta N & P, consequenter Q & P coincidunt: unde origo alterius indeterminatæ y est in P. Tab. VIII. Fig. 80.

Est enim BP $= b + x$, adeoque AP. PB $= bx + x^2$. Quare cum PM$^2 = y^2$; erit $y^2 = bx + x^2$.

PROBLEMA CCXXXVIII.

595. *Super data recta AB triangulum construere, ita ut quadrata laterum AC & CB sint in ratione data.* Tab. VIII. Fig. 83.

Sit ratio data $= b : c$ DB $= x$
AB $= a$ DC $= y$
erit AD $= a - x$

Quoniam (§. 417 *Geom.*) AC$^2 = y^2 + a^2 - 2ax + x^2$, & CB$^2 = x^2 + y^2$; erit, per conditionem Problematis,

$$b : c = y^2 + a^2 - 2ax + x^2 : x^2 + y^2$$
$$bx^2 + by^2 = cy^2 + a^2c - 2acx + cx^2$$
$$by^2 - cy^2 + bx^2 - cx^2 + 2acx - a^2c = 0$$
$$y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$$

Hæc æquatio comparanda est cum æquatione generali locorum ad Ellipsin, quia deest xy, & y^2 atque x^2 eodem signo afficiuntur (§. 592). Reperitur adeo (§. 588),

$\frac{2r}{q} = 0$ hinc: $r = 0$ & $q = f$ $\quad -2n = 0$ $\quad 2nr : q = 0$ $\quad r^2 : q^2 + tf^2 : 2mq^2 = 1$ $\quad t : 2m = 1$ h. e. $t = 2m$

Tab. VIII. Fig. 83. Cum diameter $2m$ parametro æqualis ſit; locus ad conſtruendum propoſitus eſt Circulus.

Porro

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tpf}{2mq} = \frac{2ac}{b-c} \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$\text{h. e. } 2p = -\frac{2ac}{b-c} \qquad p^2 - m^2 = -\frac{a^2c}{b-c}$$

$$p = -\frac{ac}{b-c} \qquad p^2 + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\frac{a^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{a^2c}{b-c} = m^2$$

$$\text{h. e. } \frac{a^2c^2 + a^2bc - a^2c^2}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a^2bc}{(b-c)^2} = m^2$$

$$\frac{a\sqrt{bc}}{b-c} = m$$

Eſt ergo radius circuli $= a\sqrt{bc} : (b-c)$. Quodſi igitur AL $= ac : (b-c)$, & radio CL $= a\sqrt{bc} : (b-c)$ deſcribatur circulus ECF; erit AD $= x$, DC $= y$. Nam ponatur brevitatis gratia AL $= p$, LF $= m$; erit DL $= p - x$, ED $= m - p + x$ & DF $= m + p - x$, conſequenter, ob ED. DF $=$ DC^2, $m^2 - p^2 + 2px - x^2 = y^2$.

$$y^2 + x^2 - 2px + p^2 - m^2 = 0$$

hoc eſt, ſubſtitutis valoribus p & $p^2 - m^2$ erit $y^2 + x^2 + \frac{2acx}{b-c} - \frac{a^2c}{b-c} = 0$.

PROBLEMA CCXXXIX.

Tab. VIII. Fig. 84. 596. *Duas rectas* AB *&* CD *ita ſecare in* E *&* F, *ut* AE. EB $=$ CF. FD.

Sit AB $= a$, AE $= x$ Tab. VIII. Fig. 84.

CD $= b$, CF $= y$

erit EB $= a - x$

FD $= b - y$

Quare $ax - xx = by - yy$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

Hæc æquatio comparanda cum æquatione locali pro Hyperbola. Eſt nempe

$$\frac{2r}{q} = 0 \text{ \& hinc } \frac{q = f}{q^2 = f^2} \quad \frac{r^2}{q^2} = 0 \quad \frac{2nr}{q} = 0$$

$$-\frac{tf^2}{2mq^2} = -1 \qquad \frac{-2n = -b}{n = \frac{1}{2}b} \qquad \frac{2tpf}{2mq} = a$$

$$t : 2m = 1 \qquad\qquad 2p = a$$

$$t = 2m \qquad\qquad p = \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + \frac{tm^2}{2m} - \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = 0$$

$$m^2 = p^2 - n^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$$

$$m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}bb)}$$

Quoniam $t = 2m$, hoc eſt, parameter diametro æqualis, Hyperbola eſt æquilatera (§. 505), diametro $= 2\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$ conſtruenda. Cum diametro determinata AB agatur parallela HN & cum MN altera FH, ita ut ſit FH $=$ PN $= \frac{1}{2}b$ & CF $= \frac{1}{2}a$, erit HN $= x$ & MN $= y$. Eſt enim CP $= x - \frac{1}{2}a$; PM $= y - \frac{1}{2}b$, & AC $= \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb)}$. Tab. VIII. Fig. 79. Quare, ob AP. PB $=$ CP^2 $-$ AC^2 $=$ PM^2,

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb$$

$$x^2 - ax = y^2 - by$$

$$y^2 - x^2 - by + ax = 0$$

PRO-

PROBLEMA CCXL.

Tab. VIII. Fig. 85. 597. *Super recta* AB *descriptus sit semicirculus* ANB, *& alius minor* ERD. *Ex puncto quocunque* N *demittatur ad* AB *perpendicularis* PN, *ductoque radio* CN, *ex puncto* R *perpendicularis alia* RM. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo determinata.*

Sit $AB = a$, $ED = d$, $AP = x$, $PM = y$: erit $PB = a - x$, $PN = \sqrt{(ax - x^2)} = v$ (§. 377), $PC = \frac{1}{2}a - x$, $NR = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d$ & (§. 268 *Geom.*)

$$NC : NP = NR : NM$$

$$\tfrac{1}{2}a : v = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}d : \frac{(a-d)v}{a}$$

Quare $PM = v - \frac{av - dv}{a} = \frac{av - av + dv}{a} = \frac{dv}{a}$; consequenter $PM^2 = y^2 = d^2 v^2 : a^2$. Unde habetur $a^2 y^2 = d^2 (ax - x^2)$, substituto nimirum valore ipsius v^2, quae aequatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$y^2 : ax - x^2 = d^2 : a^2$$

h. e. $PM^2 : PA . PB = CF^2 : AC^2$

Unde intelligitur locum punctorum M esse Ellipsin, cujus axes conjugati AB & ED (§. 430).

SCHOLION.

598. *Apparet adeo curvam, quam fornicibus construendis aptam praedicat* SERLIUS (k) *esse Ellipsin.*

COROLLARIUM.

599. Quoniam $PN = v$, $PM = \frac{1}{2}dv : \frac{1}{2}a$, erit $PN : PM = v : \frac{\frac{1}{2}dv}{\frac{1}{2}a}$ hoc est (§. 124) $= \frac{1}{2}av : \frac{1}{2}dv = \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}d = CG : CF$

(k) *Architect.* lib. 1. c. 1. f. m. 9. b.

PROBLEMA CCXLI.

600. *Super recta* HI *describatur semicirculus* HGI. *Sit recta quacunque* AB *bifariam divisa in* C *& ex* C *erecta perpendicularis* $CD = GF$. *Erecta perpendicularis* LN *fiat* $DC : AC = HL : AP$ *& in* P *erigatur perpendicularis* $PM = NL$. *Determinare locum, in quo sunt omnia puncta* M *eodem modo inventa.* Tab. VIII. Fig. 86.

Sit $HF = GF = DC = d$, $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$: erit, ex hypothesi,

$$AC : DC = AP : HL$$

$$a : d = x : \frac{dx}{a}$$

Quare $LI = 2d - dx : a = (2ad - dx) : a$, & hinc $LN^2 = (2addx - ddxx) : aa$ (§. 367). Habemus itaque ex hypothesi,

$$y^2 = (2addx - ddxx) : aa$$

adeoque, $aa : 2ax - xx = dd : y^2$.

Est igitur locus quaesitus Ellipsis, cujus semiaxes conjugati AC & CD (§. 430).

SCHOLION.

601. *Evidens adeo est, curvam, quam* Albertus DURERUS *& cum ipso* Daniel HARTMANNUS (l) *fornicibus construendis aptam praedicant, esse Ellipsin* Apollonianam.

PROBLEMA CCXLII.

602. *Rectam* DB *ita secare in* P *simulque invenire aliam rectam* y, *ita ut rectangulum ex* y *in datam* CA *sit aequale rectangulo ex segmentis partium* DP *&* PB. Tab. VIII. Fig. 87.

Sit $DB = a$, $AC = b$, $DP = x$, erit $PB = a - x$, consequenter, per conditionem Problematis,

 $ax -$

(l) *In der Bürgerlichen Bau-Kunst*, f. 7. & seqq.

Tab. VIII. Fig. 87.

$$ax - xx = by$$

$$x^2 - ax + by = 0.$$

Est itaque locus ad Parabolam (§. 592).

Quodsi cum æquatione locali ad Parabolam generali modo inventam compares; erit (§. 587)

$-\frac{2r}{q} = 0$ hinc $q = f$ $\quad -2n = -a$, $n = \frac{1}{2}a$ $\quad -tf : q = b$, $t = -b$

$$nn + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa - bp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}aa = bp$$

$$\tfrac{1}{4}aa : b = p$$

Est adeo parameter $= -b$. Quare parametro b describenda est Parabola deorsum tendens AMB, cujus pars altera AD, seu quod perinde est, describitur Parabola circa axem AK (§. 393) & in eo fit $AK = \frac{1}{4}aa : b$, erit $KB = \frac{1}{2}a$ (§. 388) $= \frac{1}{2}DB$, adeoque DB linea ad secandum proposita. Ducta igitur PM ipsi AK parallela, erit $PB = x$, $PM = y$. Nam $KP = RM = \frac{1}{2}a - x$ & $AR = \frac{1}{4}aa : b - y$. Quare (§. 388) $\frac{1}{4}aa - ax + xx = \frac{1}{4}aa - by$, consequenter $x^2 - ax + by = 0$.

PROBLEMA CCXLIII.

Tab. VIII. Fig. 88.

603. *Datam rectam* MN *in tres partes continue proportionales secare.*

Sit $MN = a$, pars prima $= x$, secunda $= y$, erit tertia $= yy : x$ &, per conditionem Problematis,

$$x + y + yy : x = a$$

$$xx + xy + yy = ax$$

$$yy + xy + xx - ax = 0$$

Cum locus sit ad Circulum (§. 592); æquatio comparanda est, cum formula generali ad Circulum.

Erit ergo $-\frac{2r}{q} = 1$, hoc est, $\frac{r}{q} = -\frac{1}{2}$, nempe $r = -1$ & $q = 2$.

Porro

$\frac{r^2}{q^2} + \frac{f^2}{q^2} = 1$ $\qquad 2n = 0.$

$\frac{1}{4} + \frac{f^2}{4} = 1$ $\qquad$ hinc $\frac{2nr}{q} = 0$

$\qquad n^2 = 0$

$1 + f^2 = 4$ $\qquad -\frac{2pf}{q} = -a$

$f^2 = 3$ $\qquad \frac{2p\sqrt{3}}{2} = a$

$f = \sqrt{3}$ $\qquad p = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$$m^2 = n^2 + p^2 = p^2$$

$$m = p = a : \sqrt{3}$$

Describatur ergo radio $AC = a : \sqrt{3}$ semicirculus, fiat (ob valorem negativum ipsius r) $HL : AL = 1 : \sqrt{3}$, ob valorem scilicet ipsius r negativum triangulum ALH contraria ratione construendum, ita ut angulus rectus sit in L, qui in formula generali supponitur in H: ita enim prodit $f = \sqrt{3}$, quemadmodum ex regula eruitur per Theorema *Pythagoricum*. Ducatur porro recta AHR. Quodsi inter C & B erigatur perpendicularis PM: erit $AQ = x$, $QM = y$. Nam (§. 268 *Geom.*) Tab. VIII. Fig. 88.

$$AH : HL = AQ : QP$$

$$2 : 1 = x : \tfrac{1}{2}x$$

Unde $PM = y + \frac{1}{2}x$ & $PM^2 = y^2 + xy + \frac{1}{4}x^2$.

Porro $AH : AL = AQ : AP$

$$2 : \sqrt{3} = x : \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Tab. VIII. Fig. 38. Unde $PB = AB - AP = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \frac{x\sqrt{3}}{2}$ & $AP . PB = ax - \frac{3}{4}x^2$. Habemus adeo (§. 377),

$$y^2 + xy + \tfrac{1}{4}xx = ax - \tfrac{3}{4}x^2$$

$$y^2 + xy + x^2 - ax = 0.$$

S C H O L I O N.

604. *Eodem modo æquationes locales inveniri possunt pro Curvis superiorum generum, ad construenda loca hypersolida. Primus formulas generales computavit* Joannes CRAIGIUS (*a*), *earumque usum deinde uberius exposuit* HOSPITALIUS (*b*).

C A P U T VIII.

De Constructione Æquationum superiorum.

P R O B L E M A CCXLIV.

605. *Æquationem quamcunque geometrice construere.*

1. Introducatur in æquationem datam nova indeterminata, &
2. Hujus ope æquatio in alias locales ad diversas curvas transformetur, in quibus nempe sint duæ indeterminatæ.
3. Construantur duæ æquationes locales. Communis enim intersectio radices determinabit.

S C H O L I O N.

606. *Genuinum hoc æquationes construendi artificium primus aperuit* Renatus Franciscus SLUSIUS, *Canonicus* Leodiensis (*c*): *quem postea secuti sunt alii de hac materia commentati. Ut autem methodi vim intelligamus, eam exemplis cubicarum imprimis & quadrato-quadraticarum æquationum illustrabimus, quoniam ad has construendas sufficiunt, quæ de locis planis & solidis in capite præcedente tradidimus.*

(*a*) In *Tractatu de Figurarum curvilinearum Quadraturis & Locis geometricis* p. 62. & seqq.

(*b*) *Traité analytique des Sect. coniq.* lib. 3. p. 206. & seqq.

(*c*) *Mesolabo* Part. 2. integra.

P R O B L E M A CCXLV.

607. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + aby = aac$.

Æquatio proposita $y(y^2 + ab) = aac$ in hanc resolvitur analogiam

$$a : y = y^2 + ab : ac.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & ejus ope æquationes locales ad diversas curvas eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = yy + ab : ac$ (§. 167 *Arithm.*)

hoc est, $= ax + ab : ac$

seu (§. 124.) $= x + b : c$

II. $x^2 + bx = cy$

$ax = y^2$

$x^2 + bx = cy$

III. $ax - x^2 - bx = y^2 - cy$

$ax = y^2$

$x^2 + bx = cy$

IV. $x^2 + ax + bx = y^2 + cy$

$x^2 + bx = cy$

$x^2 + \frac{by_2}{a} = cy$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$y^3 + aby = aac$

$\frac{y^3}{a} + by = ac$

VI. $xy + by = ac$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy + bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad - ax$

IV. $y^2 - x^2 + cy - ax = 0$
$\qquad\qquad\qquad - bx$

V. $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$

VI. $xy + by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Ellipsin; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Equidem constructio æquationis absolvi potest, duobus quibuscunque locis combinatis; præstat tamen nonnisi Circulum cum una ex Sectionibus conicis combinari, non tam quod Circulus sit locus planus (ut vulgo cum CARTESIO sentiunt;) sed quia facilius describitur Sectionibus coni.

Agedum itaque, construamus æquationem propositam primum ope æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$

Locus prior construitur, si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe AP Tab.
$= x$, PM $= y$ (§. 587). IX.

Pro Circulo erit, vi Theorematis ge- Fig. 89.
neralis (§. 589),

$\frac{2r}{q} = 0 \qquad 2n = c \qquad -2p = b - a$

& hinc $q = s \qquad n = \frac{1}{2}c \qquad -p = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$

$(r^2 + s^2) : q^2 = 1$

seu $s = q$

$n^2 + p^2 = m^2$

$\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb = m^2$

$\sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)} = m$

Quodsi ergo radio AL $= m$ semicir- Tab.
culus AMB describatur, sumaturque IX.
LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ deorsum, quia valor ipsius Fig. 90.
p negativus, & KD $= \frac{1}{2}c$, atque DQ ipsi AB, QM vero inter K & A, ob valorem ipsius p negativum, si $b > a$, ipsi KD parallela ducatur: erit (§. 588, 589) origo indeterminatæ x in D, nempe DQ $= x$ & QM $= y$.

Si jam Circulus cum Parabola com- Fig. 90.
binandus, quo eadem sit indetermina- & 89.
tarum origo; punctum D in A & DQ super AP cadere debet. Quare si fiat perpendicularis AK $= \frac{1}{2}c$ & altera KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit centrum Circuli L & radius LA. Quodsi is describatur, secabit Parabolam in unico puncto M. Dico, semiordinatam Parabolæ PM esse radicem veram æquationis, radices duas reliquas nonnisi imaginarias.

Est nimirum AK $=$ PR $= \frac{1}{2}c$, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, adeoque LA $= \sqrt{(\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc)}$, qui est radius circuli per superius demonstrata, &, si PM $= y$, MR $= y - \frac{1}{2}c$. Porro AP $=$ KR $= yy : a$ (§. 391), consequenter LR $= y^2 : a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$ & hinc ob LM^2 seu $LA^2 = LR^2$

Tab. IX. *Fig.* 89. & 90. $= LR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + \frac{1}{4}bb - y^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = 0$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = 0$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Quodsi fuerit $a > b$, erit $p = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, consequenter cum valor ipsius p sit positivus, punctum K cadet ultra centrum L versus B, & $KL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $KD = \frac{1}{2}c$ ut ante. Cetera fiunt ut ante. Cadit vero tum centrum L infra AK.

Construamus porro eandem æquationem combinato Circulo cum Ellipsi. Quoniam locus ad Ellipsin est $y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$; erit (§.588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \qquad 2n = \frac{ac}{b}$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad\qquad n = \frac{ac}{2b}$$

$$\& \; q = s$$

$$\frac{2nr}{q} - \frac{2tps}{2mq} = 0 \qquad n^2 - \frac{tm^2}{2m} + \frac{tp^2}{2m} = 0$$

$$-\frac{2tp}{2m} = 0 \qquad n^2 = \frac{tm^2}{2m}$$

$$p = 0 \qquad \frac{a^2c^2}{4b^2} = \frac{am^2}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} = m^2$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac^2}{b}} = m$$

Est itaque ratio parametri t ad diametrum $2m$ ut a ad b. Ellipsis diametro $AB = \sqrt{(ac^2 : b)}$ & parametro t describenda & in centro C erecta perpendiculari $CF = ac : 2b$, ductisque FQ ipsi AC & QM ipsi CF parallelis, erit $FQ = x$ & $QM = y$, origo nempe indeterminatæ x in F. Circulus itaque ita combinandus cum Ellipsi, ut punctum D in F & DK super FC cadat, hoc est, $FC = \frac{ac}{2b}$ continuetur in K, donec fiat $FK = \frac{1}{2}c$ (est enim $b > a$, hinc $bc > ac$, consequenter $c > ac : b$) & in K erigatur perpendicularis $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$: erit enim per præcedentia L centrum, LF radius Circuli, qui descriptus Ellipsin in M secabit. Dico QM esse radicem æquationis. Tab. IX. *Fig.* 91.

Ponamus enim $QM = y$. Quoniam $CF = PQ = ac : 2b$ & $FQ = CP = x$, $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)}$; erit $PM = QM - PQ = y - ac : 2b$, $AP = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} - x$, $PB = \frac{1}{2}\sqrt{(ac^2 : b)} + x$, $PM^2 = y^2 - acy : b + a^2c^2 : 4b^2$ & $AP . PB = ac^2 : 4b - x^2$, & ex natura Ellipsis (§.420),

$$b : a = \frac{ac^2}{4b} - x^2 : y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{ax^2}{b} = y^2 - \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2}$$

$$y^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b} - y^2$$

$$x^2 = cy - by^2 : a$$

Porro $KR = QF = x$, $KL = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, $KF = QR = \frac{1}{2}c$, adeoque $MR = MQ - QR = y - \frac{1}{2}c$, $RL = x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, consequenter (§.417 *Geom.*) $LF^2 = KL^2 + KF^2 = \frac{1}{4}bb - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc = ML^2 = MR^2 + RL^2 = y^2 - cy + \frac{1}{4}cc + x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}aa$.

Unde

Unde habemus

$$y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$$

hoc est, ob $x^2 = cy - by^2 : a$

$$y^2 + cy - \frac{by^2}{a} - cy + bx - ax = 0$$

$$\frac{ay^2 - by^2}{a} + bx - ax = 0$$

seu $\frac{ay^2 - by^2}{a} = ax - bx \qquad a - b$

$$\frac{y^2}{a} = x$$

$$\frac{y^4}{aa} = x^2$$

$$\frac{y^4}{aa} = cy - \frac{by^2}{a}$$

$$y^4 = aacy - aby^2$$

$$y^3 = aac - aby$$

$$y^3 + aby - aac = 0$$

Construamus denique eandem æquationem, combinatis loco ad Hyperbolam intra asymptotos $xy + by - ac = 0$ & loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy + bx - ax = 0$. Posterioris constructionem jam tradidimus: alterius constructio elicitur comparatione æquationis propositæ cum formula generali pro locis ad Hyperbolam intra asymptotos instituta. Est nempe (§.591),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad p = 0 \quad -n = b \quad -mq = -ac$$

$$q = f \quad \frac{pr}{f} = 0 \quad n = -b \quad m = c \quad q = a$$

Jungantur ipsi AR $= a$ recta RI $= c$ & indefinita AS ad angulos rectos, quæ erunt asymptoti Hyperbolæ æquilateræ per punctum I describendæ (§ 489). Tab. IX.

Fiat AD $= b$, quia valor ipsius b negativus: erit DT $= x =$ NM, TM $= y$ Fig. 92.

(§.cit.) Quod si jam Circulus cum Hyperbola combinari debet; punctum D in D & recta DQ super DT cadere debet. Tab. IX. Fig. 90. & 92.

Scilicet ex D in K transferatur DK $= \frac{1}{2}c$ & ex K in L, KL $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$. Radio DL describatur Circulus & ex puncto intersectionis Circuli atque Hyperbolæ M demittatur perpendicularis TM: dico hanc esse radicem æquationis.

Quoniam enim AR $= a$, RI $= c$, AD $=$ PN $= b$, NM $=$ DT $= x$, TM $=$ AP $= y$; erit AT $=$ PM $= b + x$ & ob AR. RI $=$ AP. PM (§.501) $by + xy = ac$, consequenter $x = \frac{ac}{y} - b$. Porro Kr $=$ NM $= x$, LK $= \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, DK $=$ Tr $= \frac{1}{2}c$. Ergo Lr $= x + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, rM $= y - \frac{1}{2}c$, & ob LM^2 $=$ Lr^2 $+$ rM^2 (§.417 *Geom.*) $x^2 + bx + \frac{1}{4}bb - ax - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}a^2 + y^2 - cy + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$y^2 - cy = ax - x^2 - bx$$

seu $= (a - x - b)x$

$$y^2 - cy = \left(a - \frac{ac}{y} + b - b\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

$$= \left(a - \frac{ac}{y}\right)\left(\frac{ac}{y} - b\right)$$

hoc est,

$$y^2 - cy = \frac{aac}{y} - \frac{a^2c^2}{y^2} - ab + \frac{abc}{y}$$

$$y^4 - cy^3 = a^2cy - a^2c^2 - aby^2 + abcy$$

$y - c)$

$$y^3 = a^2c - aby$$

$$y^3 + aby - a^2c = 0$$

Scho-

SCHOLION.

608. *Mirabuntur forte, qui Tyrones sunt in altioribus, quod tam operose construxerimus æquationem, quæ per regulam* CARTESII *ope Circuli & Parabolæ admodum facile construitur. Sed notent velim, geometricas æquationum constructiones nullius fere in praxi esse usus, cum eidem satisfaciat methodus extrahendi radices per approximationem. Faciunt vero ad exercendam ingenii vim & recludendos inventionum fontes. Quamobrem methodus inveniendi constructiones istiusmodi quam maxime explicari debet.*

PROBLEMA CCXLVI.

609. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = aac$.

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = yy - ab : ac$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur & æquationes locales diversæ inde eliciantur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit

I. $ax = y^2$ & hinc $y^2 : a = x$

Porro: $y : x = yy - ab : ac$

hoc est, $= ax - ab : ac$

seu (§. 124) $= x - b : c$

II. $x^2 - bx = cy$

$ax = y^2$

$x^2 - bx = cy$

III. $ax - x^2 + bx = y^2 - cy$

$ax = y^2$

$cy = x^2 - bx$

IV. $ax - cy = y^2 - x^2 + bx$

$x^2 - bx = cy$

$x^2 - \frac{by^2}{a} = cy$

$a : b$ mult.

V. $\frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{acy}{b}$

$y^3 - aby = aac$

$\frac{y^3}{a} - by = ac$

VI. $xy - by = ac$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$

IV. $y^2 - x^2 + cy + bx - ax = 0$

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = 0$.

VI. $xy - by - ac = 0$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam; tertius ad Circulum; quartus ad Hyperbolam æquilateram; quintus ad Hyperbolam scalenam; sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Cum æquationes locales nonnisi signis differant ab iis, in quas æquationem Problematis præcedentis resolvimus; æquatio præsentis eodem fere modo construitur, quo præcedentem construximus: id quod in unico casu, quo Circulus cum Parabola combinatur, ostendisse sufficerit.

Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur ut in Problemate præcedente, si

Tab. IX. Fig. 93. si parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice, nempe $AP = x$, $PM = y$.

Pro loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - bx - ax = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589), $2r = 0$ & hinc $q = f$

$$2n = c \qquad 2p = b + a$$

$$n = \tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Quia ergo in Circulo origo indeterminatæ x distat a centro quantitate $\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}a$ & alterius y quantitate $\tfrac{1}{2}c$, fiat $AD = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & perpendicularis $DH = \tfrac{1}{2}c$ atque radio AH describatur per verticem Parabolæ A Circulus, erit PM radix vera æquationis; QN & qn erunt falsæ.

Nam $AH^2 = MH^2 = HD^2 + DA^2 = \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc$ (§. 417 *Geom.*), $AP = yy : a$ (§. 391), $PD = HR = \frac{yy}{a} - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$, $MR = y - \tfrac{1}{2}c$, consequenter ob $HM^2 = HR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \tfrac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + y^2 - cy + \tfrac{1}{4}cc$, hoc est

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} - cy = 0$$

$$y^4 - abyy - aacy = 0$$

$$y^3 - aby - aac = 0.$$

PROBLEMA CCXLVII.

610. *Construere æquationem cubicam* $y^3 - aby = - aac$.

Æquatio proposita $y^3 - aby = - aac$, hoc est, $aac = aby - y^3$ in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = ab - yy : ac.$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Porro $y : x = ab - yy : ac$

hoc est, $= ab - ax : ac$

seu (§. 124) $= b - x : c$

II. $bx - xx = cy$

$$ax = y^2$$

$$bx - xx = cy$$

III. $ax - bx + xx = yy - cy$

$$ax = yy$$

$$cy = bx - xx$$

IV. $ax - cy = yy - bx + xx$

$$bx - xx = cy$$

$$\frac{by^2}{a} - xx = cy$$

$a : b$ mult.

V. $y^2 - \frac{ax^2}{b} = \frac{acy}{b}$

$$aac = aby - y^3$$

$$ac = by - \frac{y^3}{a}$$

VI. $ac = by - xy$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 - ax = 0$

II. $x^2 - bx + cy = 0$

III. $y^2 - x^2 - cy + bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - ax$

IV. $y^2 + x^2 + cy - bx = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - ax$

V. y^2

$$\text{V. } y^2 - \frac{ax^2}{b} - \frac{acy}{b} = 0$$

$$\text{VI. } xy - by + ac = 0$$

Locus primus & secundus sunt ad Parabolam, tertius ad Hyperbolam æquilateram, quartus ad Circulum, quintus ad Hyperbolam scalenam, sextus ad Hyperbolam intra asymptotos.

Æquationes locales denuo nonnisi signis differunt ab iis, quas in Problemate 245, (§. 607) reperimus. Quare denuo nobis sufficerit constructionem ope Parabolæ & Circuli ostendisse.

Tab. IX. Fig. 94. Quoniam locus ad Parabolam $y^2 = ax$; Parabola denuo construitur parametro a, & origo indeterminatæ x est in vertice axis A.

Pro Circulo, cujus æquatio $y^2 + x^2 + cy - bx - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589)

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = c \qquad -2p = -b - a$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\tfrac{1}{2}c \qquad p = \frac{b+a}{2}$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 95. Describatur ergo, radio $AC = m$, semicirculus, ductaque FLS intervallo $CL = \tfrac{1}{2}c$ diametro AB parallela; erit $SQ = x$, $QM = y$.

Tab. IX. Fig. 94. Quamobrem si Circulus cum Parabola combinatur, punctum S super A & SL super AD cadet. Quare si fiat $AD = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b$ & erigatur perpendicularis $DH = \tfrac{1}{2}c$; erit $AH = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc)}$ radius Circuli per verticem describendi & PM radix vera æquationis.

Nam $AP = yy : a$ (§. 391), hinc $DP = HR = yy : a - \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$. Porro $MR = y + \tfrac{1}{2}c$. Quare ob $HM^2 = MR^2 + HR^2$ (§. 417 *Geom.*), $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + \tfrac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \tfrac{1}{4}aa - \frac{byy}{a} + \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + y^2 + cy + \tfrac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{byy}{a} + cy = 0 \quad \cdot aa$$

$$y^4 - abyy + aacy = 0 \quad : y$$

$$y^3 - aby + aac = 0$$

C O R O L L A R I U M.

612. Si Circulus Parabolam tangit; duæ intersectiones coincidunt, adeoque æquatio duas habet radices æquales. Si eam nec tangit, nec secat; radices omnes sunt impossibiles.

S C H O L I O N.

613. *Constructiones per Circulum & Parabolam, quas dedimus, coincidunt cum iis quas habet* CARTESIUS (a), *etsi alio modo erutæ.*

P R O B L E M A CCXLVIII.

614. *Construere æquationem cubicam* $y^3 + ay^2 - aby = aac$.

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$. Substituatur ax pro y^2 in æquatione data.

$$\text{erit } axy + aax - aby = aac$$

$$\text{II. } xy + ax - by = ac \quad \cdot\, y - a$$

$$xy^2 + axy - by^2 - axy - a^2x + aby = acy - a^2c$$

$$xy^2 - by^2 - a^2x = acy - aby - a^2c$$

$$ax^2 - abx - a^2x = acy - aby - a^2c$$

(a) *Geomet.* lib. III. p. 85. & seqq.

$$\text{III. } x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$\underline{\qquad ax - y^2 \qquad}$$
$$\text{IV. } 2ax - x^2 + bx = y^2 - cy + by + ac$$
$$x^2 - bx - ax = cy - by - ac$$
$$\underline{\qquad ax = y^2 \qquad}$$
$$\text{V. } x^2 - bx = y^2 + cy - by - ac$$
$$x^2 - \frac{by^2}{a} = ax + cy - by - ac$$
$$\text{VI. } \frac{ax^2}{b} - y^2 = \frac{a^2x}{b} + \frac{acy}{b} - ay - \frac{a^2c}{b}$$

Habemus adeo æquationes locales:

$$\text{I. } y^2 - ax = 0$$
$$\text{II. } xy + ax - by - ac = 0$$
$$\text{III. } x^2 - bx - cy + ac = 0$$
$$- ax + by$$
$$\text{IV. } y^2 + x^2 - cy - 2ax + ac = 0$$
$$+ by - bx$$
$$\text{V. } y^2 - x^2 + cy + bx - ac = 0$$
$$- by$$
$$\text{VI. } y^2 - \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} + \frac{a^2x}{b} - \frac{a^2c}{b} = 0$$
$$- ay$$

Locus primus & tertius sunt ad Parabolam; secundus ad Hyperbolam intra asymptotos; quartus ad Circulum; quintus ad Hyperbolam æquilateram; sextus ad Hyperbolam scalenam.

Tab. IX. Fig. 96. Construamus æquationem combinando Circulum cum Parabola. Locus ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ construitur, si parametro a Parabola describitur; cujus vertex A origo ipsius x.

Pro Circulo $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = -c + b \qquad -2p = -2a - b$$

hinc

$$q = f \qquad n = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b \qquad p = a + \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = ac$$
$$n^2 + p^2 - ac = m^2$$
$$\tfrac{1}{4}c^2 - \tfrac{1}{2}bc + \tfrac{1}{4}bb + a^2 + ab + \tfrac{1}{4}bb - ac = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + (a + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c)^2)} = m$$

Jungatur ipsi IL $= a$ ad angulos rectos LR ipsi æqualis & resecetur LH $=$ PN $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$: erit CR $= m$, adeoque radius Circuli, quo descripto habebitur IP $= x$ & PM $= y$. Tab. X. Fig. 97.

Est enim NM $=$ PM $-$ PN $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, adeoque NM$^2 = y^2 + by + \frac{1}{4}b^2 - cy - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$. Porro DP $=$ IP $-$ ID $= x - a - \frac{1}{2}b$, adeoque DP$^2 =$ CN$^2 = x^2 - 2ax - bx + a^2 + ab + \frac{1}{4}b^2$. Quare cum sit NM^2 + CN^2 (§. 417 *Geom.*) $=$ CM$^2 =$ CR$^2 =$ CH^2 + HR$^2 = \frac{1}{4}bb + aa + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc$, erit $y^2 + x^2 - cy + by - 2ax - bx + ac = 0$, quæ est æquatio ad construendum proposita. Circulus itaque rite constructus.

Si jam Circulus cum Parabola combinatur, punctum I in verticem Parabolæ A & IP super AP cadit. Quare fiat AL $= a$; erit LR$^2 = aa$ (§. 388), hoc est, LR $= a$. Fiat porro LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$; erit HR $= a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Fiat denique LD $=$ HC $= \frac{1}{2}b$; erit CR radius Circuli per punctum Parabolæ R ex centro C describendi, & semiordinata PM radix æquationis. Tab. IX. Fig. 96. & Tab. X. Fig. 97.

Nam PN $=$ LH $= \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}b$: hinc NM $= y + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Ex natura Parabolæ $y^2 : a =$ AP: unde DP $=$ CN $= \frac{y^2}{a} - a - \frac{1}{2}b$. Quare cum sit (§ 417 *Geom.*) CM^2 ($=$CR^2) $=$ CN^2 + NM^2 erit $\frac{1}{4}b^2 + a^2 + ab + \frac{1}{4}bb - ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}cc = \frac{y^4}{aa} - 2y^2 + aa - \frac{by^2}{a}$

+

$+ ab + \frac{1}{4}bb + y^2 + by + \frac{1}{4}bb - cy - \frac{1}{2}bc$
$+ \frac{1}{4}cc$,

hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} - y^2 - \frac{by^2}{a} + by - cy + ac = 0$$

$$y^4 - a^2y^2 - aby^2 + a^2by - a^2cy + a^2c = 0$$

$$\overline{}\ (y-a$$

$$y^3 + ay^2 - aby - a^2c = 0$$

S C H O L I O N.

615. *Satis liquet, quomodo æquationum cubicarum casus reliqui construi debeant, ut adeo plura addere supervacaneum judicemus.*

P R O B L E M A CCXLIX.

616. *Æquationem biquadraticam $y^4 + aby^2 + a^2cy = a^3d$ construere.*

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$. Hinc $x = y^2 : a$

Hoc valore in æquatione data substituto prodibit

$$a^2x^2 + aby^2 + a^2cy = a^3d$$

$$\overline{}\ (ab$$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} = \frac{a^2d}{b}$

Item $a^2x^2 + a^2bx + a^2cy = a^3d$

$$\overline{}\ (a^2$$

$$x^2 + bx + cy = ad$$

III. $x^2 + bx = ad - cy$

$$ax = y^2$$

IV. $x^2 + bx + ax = y^2 + ad - cy$

$$ax = y^2$$

$$x^2 + bx = ad - cy$$

V. $ax - x^2 - bx = y^2 - ad + cy$

Habemus adeo æquationes locales;

I. $y^2 - ax = 0$

II. $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{acy}{b} - \frac{a^2d}{b} = 0$

III. $x^2 + bx + cy - ad = 0$

IV. $y^2 - x^2 - cy - bx + ad = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - ax$

V. $y^2 + x^2 + cy + bx - ad = 0$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - ax$

Locus primus & tertius est Parabola, secundus Ellipsis, quartus Hyperbola æquilatera, quintus denique Circulus.

Construamus primum æquationem, Circulo cum Parabola $ax = y^2$ combito. Construatur Parabola MDN parametro a, erit $DQ = x$, $QM = y$. Tab.X. Fig.98.

Pro Circulo $y^2 + x^2 + cy + bx - ax - ad = 0$, erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad -2n = c \quad -2p = b - a$$

$$f = q \quad n = -\tfrac{1}{2}c \quad p = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + ad = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}bb + ad)} = m$$

Erecta in D perpendiculari $DK = QP = \frac{1}{2}c$ ob valorem ipsius c negativum, ducatur per K recta indefinita AB fiatque $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ erit (§ 417 *Geom.*). $DC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb)}$. Fiat porro $DI = a$ & continuata DC in H, donec $HD = d$, quæratur media proportionalis DL (§. 327 *Geom.*), quæ erit $\sqrt{ad}$: consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§. 417 *Geom.*) est radius Circuli ex centro C per L describendi, qui cum Parabolam secet in M & N, erit QM radix æquationis vera, RN falsa.

 Est

Tab.X. Fig.98. Est enim $PM = y + \frac{1}{2}c$; $DQ = KP = y^2 : a$ (§.388), $CP = KP - KC = \frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Quare (§.417 *Geom.*) ob CL^2 seu $MC^2 = PM^2 + PC^2$, $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + cy = ad$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; aa$$

$$y^4 + aby^2 + aacy = a^2d.$$

Combinemus eundem Circulum cum Ellipsi, quam definit æquatio superius reperta $y^2 + \frac{ax^2}{b} + \frac{ac}{b}y - \frac{a^2d}{b} = 0$. Erit, vi Theorematis generalis (§.588),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{b} \quad -2n = \frac{ac}{b} \quad p = 0$$

hinc

$$q = f \qquad n = -\frac{ac}{2b}$$

$$n^2 - \frac{tm^2}{2m} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{a^2c^2}{4b^2} - \frac{am^2}{b} = -\frac{a^2d}{b}$$

$$\frac{ac^2}{4b} + ad = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{ac^2}{4b} + ad)} = m$$

Construatur locus ad Circulum, ut ante, nempe ut sit $DK = \frac{1}{2}c$, $KC = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, $DI = a$, $DH = d$, adeoque $DL = \sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*); consequenter $LC = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad)}$ (§.417 *Geom.*). Tab.X. Fig.99.

Jam cum origo indeterminatæ x sit in D, & valor ipsius n in Ellipsi etiam negativus, & $p = 0$; ex DK resecetur $DG = ac : 2b$, & per G ducatur AB ipsis DQ & KP parallela, fiatque $AG = BG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Tandem circa AB tanquam axem describatur Ellipsis AMB, in qua axis AB ad parametrum $= b : a$. Dico QM esse radicem æquationis veram. Est enim $GR = DQ = x$, $MR = MQ + QR = MQ + DG = y + ac : 2b$; ratio diametri ad parametrum $= b : a$; $AG = \sqrt{(ad + ac^2 : 4b)}$. Quare ex natura Ellipsis (§. 431)

$$a : b = RM^2 : AG^2 - GR^2 (= BR.RA)$$

$$= y^2 + \frac{acy}{b} + \frac{a^2c^2}{4b^2} : ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$\frac{by^2}{a} + cy + \frac{ac^2}{4b} = ad + \frac{ac^2}{4b} - x^2$$

$$x^2 = ad - \frac{by^2}{a} - cy$$

Porro $PM = MQ + QP = MQ + DK = y + \frac{1}{2}c$; $CP = KP - KC = DQ - CK = x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Quamobrem ob $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§.417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc + x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$y^2 + x^2 + cy - ax + bx = ad$$

$$x^2 = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

Habemus ergo

$$ad - \frac{by^2}{a} - cy = ad + ax - bx - y^2 - cy$$

$$bx - ax = \frac{by^2}{a} - y^2$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; b - a$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

hoc

hoc est, $\frac{y^4}{a^2}=ad-\frac{by^2}{a}-cy$, vi superiorum

$$\underline{\qquad\qquad\qquad a^2}$$

$$y^4=a^3d-aby^2-a^2cy$$

$$y^4+aby^2+a^2cy=a^3d$$

PROBLEMA CCL.

617. *Construere æquationem biquadraticam*

$$y^4+aby^2-a^2cy=-a^3d.$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$a:y=y:x$$

erit I. $yy=ax$. Hinc $x=y^2:a$

Si valor ipsius y^2 in æquatione proposita substituatur: prodibit

$$a^2x^2+aby^2-a^2cy=-a^3d$$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad ab}$$

II. $\frac{ax^2}{b}+y^2=\frac{acy}{b}-\frac{a^2d}{b}$

Item $a^2x^2+a^2bx=a^2cy-a^3d$

III. $x^2+bx=cy-ad$

$$ax=y^2$$

IV. $x^2+bx+ax=y^2+cy-ad$

$$ax=y^2$$

$$x^2+bx=cy-ad$$

V. $ax-x^2-bx=y^2-cy+ad$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2-ax=0$

II. $y^2+\frac{ax^2}{b}-\frac{acy}{b}+\frac{a^2d}{b}=0$

III. $x^2+bx-cy+ad=0$

IV. $y^2-x^2+cy-bx-ad=0$
$\qquad -ax$

V. $y^2+x^2-cy+bx+ad=0$
$\qquad -ax$

Locus primus & tertius sunt Parabolæ; secundus est Ellipsis; quartus Hyperbola æquilatera; quintus denique Circulus.

Dabimus constructionem per Circulum & Parabolam, cujus æquatio $y^2-ax=0$. Est ergo parameter $=a$, AP $=x$, PM $=y$. Tab.X. Fig. 100.

Pro circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{r}{q}=0.\quad -2n=-c\quad -2p=-a+b$$

hinc

$$q=f\quad n=\tfrac{1}{2}c\quad p=\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2}b$$

$$n^2+p-m^2=ad$$

$$n^2+p^2-ad=m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{4}aa-\tfrac{1}{2}ab+\tfrac{1}{4}bb-ad)}=m$$

Ducatur recta CR & sumatur C pro centro Circuli. Erigatur CK $=\frac{1}{2}c$ ad CR perpendicularis & per K ducatur AP eidem parallela. Fiat AK $=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$; erit in A origo indeterminatæ x & AC $=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb)}$. Fiat AI $=d$, AH $=a$; quæraturque media proportionalis AL $=\sqrt{ad}$ (§. 327 *Geom.*). Porro super AC describatur semicirculus, & in eo applicetur GA $=$ AL $=\sqrt{ad}$; erit GC $=\sqrt{(\frac{1}{4}cc+\frac{1}{4}aa-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}bb-ad)}$ (§. 417 *Geom.*) adeoque radius Circuli.

Quoniam in Parabola, cujus æquatio $y^2-ax=0$, origo indeterminatæ x in verticem axis cadit; circa axem AP parametro a describatur Parabola: dico PM esse radicem æquationis veram.

Est

Tab.X. Fig. 100. Est enim MR = PM — PR = PM — CK = $y - \frac{1}{2}c$; AP = $y^2 : a$ & CR = KP = AP — AK = $\frac{y^2}{a} - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $CG^2 = CM^2 = CR^2 + MR^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - ad = \frac{y^4}{aa} - y^2 + \frac{1}{4}aa + \frac{by^2}{a} - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} - cy = -ad$$

$$y^4 + aby^2 - aacy = -a^3 d$$

Cum loco ad Circulum descripto eodem modo, quo in Problemate præcedente, combinatur locus ad Ellipsin. Lubet vero adhuc constructionem dare per Circulum & Hyperbolam æquilateram $y^2 - x^2 + cy - bx - ax - ad = 0$.

Est autem, vi Theorematis generalis (§. 590),

$$\frac{r}{q} = 0 \quad -\frac{t}{2m} = -1 \quad -2n = c \quad 2p = -a - b$$

$$t = 2m \quad n = -\frac{1}{2}c \quad p = -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$

$$n^2 + m^2 - p^2 = -ad$$

$$m^2 = p^2 - n^2 - ad$$

$$m^2 = \frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad$$

$$m^2 = \sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad}$$

Tab.X. Fig. 101. Constructo nempe Circulo ut ante, ita ut sit AK = $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, CK = $\frac{1}{2}c$, adeoque CA = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc)}$, AH = a, AI = d, adeoque AL = AG = $\sqrt{ad}$, consequenter GC = MC = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc - ad)}$; quia origo indeterminatæ y in Hyperbola ob valorem ipsius n negativum ab axe versus sinistram distat intervallo $\frac{1}{2}c$, fiat KT = $\frac{1}{2}c$, ducaturque per T recta OS ipsi AP parallela & ad hanc AF perpendicularis. Tab.X. Fig. 101.

Quoniam porro, ob valorem ipsius p negativum, indeterminatæ x origo a centro distat intervallo $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, fiat FO = $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & OQ = $\sqrt{(\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}cc - ad)}$; erit O centrum & Q vertex Hyperbolæ æquilateræ; quæ si circa axem QS describatur, Circulum in M secabit. Dico PM esse radicem æquationis veram.

Est enim CR = KP = AP — AK = $x - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & MR = MP — RP = MP — CK = $y - \frac{1}{2}c$, consequenter ob $MC^2 = CR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bb + \frac{1}{4}cc - ad = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + bx - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb + y^2 - cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 - ax + bx + y^2 - cy = -ad$$

$$x^2 = ax - bx + cy - y^2 - ad$$

Porro MS = MP + PS = MP + KT = $y + \frac{1}{2}c$, SO = FS + FO = AP + FO = $x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, consequenter ob $SO^2 - QO^2 = MS^2$ (§. 509) $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + bx + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}cc + ad = y^2 + cy + \frac{1}{4}cc$, hoc est,

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

seu substituto valore ipsius x^2

$$ax - bx + cy - y^2 - ad + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

$$2ax = 2y^2 \text{ seu } ax = y^2$$

$$x^2 = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : aa$$

His valoribus ipsorum x^2 & x in æquatione

x^2 +

$$x^2 + ax + bx + ad = y^2 + cy$$

ſubſtitutis, prodit

$$y^2 + cy = \frac{y^4}{aa} + y^2 + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$cy = \frac{y^4}{aa} + \frac{by^2}{a} + ad$$

$$aacy = y^4 + aby^2 + a^3 d$$

ſeu $y^4 + aby^2 - a^2 cy = -a^3 d$.

PROBLEMA CCLI.

618. *Conſtruere æquationum biquadraticam* $y^4 + 2by^3 + a^2 cy = a^3 d$.

Quoniam $y^4 + 2by^3 = a^3 d - a^2 cy$; æquatio data in hanc reſolvitur analogiam:

$$a^2 : y^2 = y^2 + 2by : ad - cy$$

Ut nova indeterminata introducatur, fiat

$$a : y = b + y : x$$

erit I. $ax = by + y^2$

$ax - by = y^2$, conſequenter

$a^2 : ax - by = ax + by : ad - cy$

II. $a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - b^2 y^2$

Subſtituatur in hac æquatione ulterius valor ipſius y^2; prodibit

$$a^3 d - a^2 cy = a^2 x^2 - ab^2 x + b^3 y$$

h. e. $a^3 d - a^2 cy - b^3 y = a^2 x^2 - ab^2 x$

III. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$yy + by = ax$

IV. $ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} + y^2 + by = x^2 - \frac{b^2 x}{a} + ax$

$ad - cy - \frac{b^3 y}{a^2} = x^2 - \frac{b^2 x}{a}$

$y^2 + by = ax$

V. $y^2 + by - ad + cy + \frac{b^3 y}{a^2} = ax - x^2 + \frac{b^2 x}{a}$

Habemus adeo æquationes locales:

I. $y^2 + by - ax = 0$

II. $y^2 - \frac{a^2 x^2}{b^2} - \frac{a^2 cy}{b^2} + \frac{a^3 d}{b^2} = 0$

III. $x^2 - \frac{b^2 x}{a} + cy - ad = 0$
$\qquad + \frac{b^3 y}{aa}$

IV. $y^2 - x^2 - \frac{b^3 y}{a^2} + \frac{b^2 x}{a} + ad = 0$
$\qquad + by - ax$
$\qquad - cy$

V. $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} - \frac{b^2 x}{a} - ad = 0$
$\qquad + by - ax$
$\qquad + cy$

Conſtruamus æquationem per Circulum & Parabolam. Pro Circulo cum

ſit $y^2 + x^2 + \frac{b^3 y}{a^2} + by + cy - \frac{b^2 x}{a} - ax - ad = 0$; erit, vi Theorematis generalis (§. 589),

$r = 0 \quad \frac{f^2}{q^2} = 1 \quad -2n = \frac{b^3}{a^2} + b + c.$

$f = q \quad n = -\frac{b^3}{2a^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$

$$-2p = -\frac{b^2}{a} - a$$

$$p = \frac{b^2}{2a} + \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 - m^2 = -ad$$

$$n^2 + p^2 + ad = m^2$$

$$\sqrt{(n^2 + p^2 + ad)} = m$$

Circulus ergo eodem prorſus modo conſtruitur, quo in Problemate 249,

Tab.X. Fig. 102. (§. 616). Fit nempe $DC = p = b^2 : 2a + \frac{1}{2}a$, $DO = n = b^3 : 2a^2 + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $HO = a$, $OI = d$, erit $OC = \sqrt{(n^2+p^2)}$, $OL = \sqrt{ad}$ & hinc $LC = \sqrt{(n^2 + p^2 + ad)}$. Ducatur OQ ipsi DC parallela, erit ob valorem OD negativum origo indeterminatæ x in O.

Porro pro Parabola, ad quam $y^2 + by - ax = 0$, erit, vi theorematis generalis (§. 587),

$$\frac{r}{q} = 0 \qquad -2n = b \qquad -\frac{tf}{q} = -a$$

$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = -\tfrac{1}{2}b \qquad t = a$$

$$q = f$$

$$n^2 + tp = 0$$

$$\tfrac{1}{4}bb + ap = 0$$

$$ap = -\tfrac{1}{4}bb$$

$$p = -\frac{bb}{4a}$$

Ob valorem itaque ipsius n negativum fiat $OK = \frac{1}{2}b$ ducaturque per K recta AR ipsi OQ parallela, ob valorem ipsius p negativum, fiat $KA = bb : 4a$; erit in A Parabolæ vertex parametro a circa axem AR describendæ, quæ Circulum secabit in M. Dico QM esse radicem æquationis veram.

Sit enim $QM = y$: erit $MR = y + \frac{1}{2}b$, adeoque $RA = \frac{yy + by + \frac{1}{4}bb}{a}$ (§. 391), consequenter $KR = AR - AK = \frac{yy + by}{a}$. Hinc $PC = OQ$ sive $KR - CD = \frac{yy + by}{a} - p$ & $PM = QM + QP = QM + DO = y + n$. Quare cum sit $LC^2 = MC^2 = PM^2 + PC^2$ (§. 417 *Geom.*); habebitur tandem $n^2 + p^2 + ad = \frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + p^2 + y^2 + 2ny + n^2$, hoc est, $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - \frac{2py^2}{a} - \frac{2pby}{a} + y^2 + 2ny = ad$.

Substituantur valores p & n ex æquatione ad Circulum: Quoniam $p = \frac{1}{2}a + b^2 : 2a$ & $n = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + b^3 : 2a^2$; prodibit $\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + \frac{b^2y^2}{aa} - y^2 - \frac{b^2y^2}{aa} - by - \frac{b^3y}{aa} + y^2 + by + cy + \frac{b^3y}{aa} = ad$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + \frac{2by^3}{aa} + cy = ad \qquad aa$$

$$y^4 + 2by^3 + a^2cy = a^3d$$

SCHOLION.

619. *Æquationes locales, in quas æquationes construendas resolvimus, sunt ad curvam aliquam determinatam; sed plurimum amplificatur methodus, si exemplo* Slusii *ad curvam indeterminatam revocentur: tum enim non amplius Ellipsis vel Hyperbola unica, sed infinitæ constructioni inserviunt. Potest etiam æquatio localis ad curvam datam revocari, sicque Problema per Sectionem conicam datam construi. Agedum itaque! videamus, quomodo utrumque præstetur.*

PROBLEMA CCLII.

620. *Æquationem datam resolvere in æquationes locales, quæ sint ad curvas indeterminatas.*

a) Substituatur pro y radice æquationis $az : v$, ubi pro v recta quælibet assumi potest, & nova, quæ prodit, æquatio in locales ut supra resolvatur: id quod exemplo unico ostendisse sufficit.

Sit

Sit ex.gr. $y^3 + aby = aac$. Quoniam $y = az:v$; erit $y^3 = a^3z^3 : v^3$; consequenter

$$\frac{a^3z^3}{v^3} + \frac{a^2bz}{v} = aac$$

$$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$$

Hæc æquatio in sequentem resolvitur analogiam:

$$v : z = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur, fiat

$$v : z = z : x$$

erit I. $z^2 = vx$. Hinc $z^2 : v = x$

Porro $z : x = z^2 + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

hoc est, $= vx + \frac{v^2b}{a} : \frac{v^2c}{a}$

seu (§. 124) $= x + \frac{vb}{a} : \frac{vc}{a}$

II. $x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

$vx = z^2$

III. $x^2 + \frac{vbx}{a} + vx = \frac{vcz}{a} + z^2$

$vx = z^2$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

IV. $vx - x^2 - \frac{vbx}{a} = z^2 - \frac{vcz}{a}$

$x^2 + \frac{vbx}{a} = \frac{vcz}{a}$

hoc est, ob $x = z^2 : v$

V. $x^2 + \frac{bz^2}{a} = \frac{vcz}{a}$

$z^3 + \frac{v^2bz}{a} = \frac{v^3c}{a}$ — v

$\frac{z^3}{v} + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

VI. $zx + \frac{vbz}{a} = \frac{v^2c}{a}$

Habemus adeo æquationes locales ad infinitas Sectiones conicas nempe

I. $z^2 - vx = 0$ } ad infinitas Parabolas.
II. $x^2 + \frac{vbx}{a} - \frac{vcz}{a} = 0$

III. $z^2 - x^2 + \frac{vcz}{a} - \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitas Hyperbolas æquilateras.

IV. $z^2 + x^2 - \frac{vcz}{a} + \frac{vbx}{a} - vx = 0$ ad infinitos Circulos.

V. $z^2 + \frac{ax^2}{b} - \frac{vcz}{b} = 0$ ad infinitas Ellipses.

VI. $zx + \frac{vbz}{a} - \frac{v^2c}{a} = 0$ ad infinitas Hyperbolas intra asymptotos.

β) Si fieret $\frac{aa}{v} : y = y : x$; locus primus $y^2 = \frac{a^2x}{v}$ foret ad infinitas Parabolas, nec radix æquationis y (id quod maxime commodum videri poterat) mutaretur in aliam: sed cum locus ad Circulum degeneret in locum ad Ellipsin, simplicitati constructionis minime consuleretur. Loca tamen ad Hyperbolam & Ellipsin determinatam ita reduci possunt ad Hyperbolas & Ellipses infinitas, ut utraque indeterminata y & x eadem maneat.

Ex.gr. Pro æquatione proposita construenda elicuimus supra (§. 607)

I. $y^2 + ax = 0$ } loca ad Parabolam.
II. $x^2 + bx - cy = 0$

III. $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ locum ad Circulum.

 Quo-

Quoniam $y^2 = ax$

erit $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

& ob $cy = x^2 + bx$

$$\frac{ay^2}{v} - cy = \frac{a^2x}{v} - x^2 - bx$$

$$y^2 - \frac{vcy}{a} = ax - \frac{vx^2}{a} - \frac{vbx}{a}$$

Item $\frac{ay^2}{v} = \frac{a^2x}{v}$

$$cy = x^2 + bx$$

$$\frac{ay^2}{v} + cy = x^2 + \frac{a^2x}{v} + bx$$

$$y^2 + \frac{vcy}{a} = \frac{vx^2}{a} + ax + \frac{vbx}{a}$$

En locum ad infinitas Ellipses $y^2 + \frac{vx^2}{a} - \frac{vcy}{a} + \frac{vbx}{a} - ax = 0$ & locum ad infinitas Hyperbolas $y^2 - \frac{vx^2}{a} + \frac{vcy}{a} - ax - \frac{vbx}{a} = 0$: quorum uterque cum loco ad Circulum $y^2 + x^2 - cy - ax + bx = 0$ construi potest.

Problema CCLIII.

621. *Æquationem localem reducere ad aliam ejusdem speciei, quæ sit ad curvam datam.*

1. Ex æquatione locali eliciendus est valor linearum, per quas datur, aut, quod perinde est, ratio earundem.
2. Hi valores cum sint æquales lineis, per quas datur curva, ad quam æquatio reducenda: æquationes prodeunt, quarum reductione legitime facta prodibunt valores coëfficientium in æquatione data substituendi, ut in quæsitam degeneret.

Ex. gr. Æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ mutanda est in aliam, quæ sit ad Parabolam, cujus parameter r. Quoniam a parameter Parabolæ, ad quam æquatio data existit; erit $r = a$, consequenter æquatio quæsita $y^2 - rx = 0$.

Similiter reducenda sit æquatio $y^2 + x^2 + by - ay - cx = 0$ ad Circulum, cujus radius r. Quoniam radius Circuli, ad quam est æquatio data (§. 589) $= \sqrt{(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc}$

erit $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{1}{4}cc = r^2$

$$(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}cc$$

$$\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b = \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)}$$

$$\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}b + \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = f$$

$$\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{(r^2 - \tfrac{1}{4}cc)} = g$$

$$\tfrac{1}{2}c = \sqrt{(r^2 - (\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}b)^2)} = h$$

His valoribus in æquatione proposita substitutis; prodit æquatio ad Circulum desideratum

$$y^2 + x^2 + 2gy - 2fy - 2hx = 0.$$

Problema CCLIV.

622. *Invenire regulam generalem construendi omnes æquationes, tam cubicas quam biquadraticas.*

Sit descripta Parabola, & ex centro H radio AH Circulus secans eam in N, N & M. Sit AD $= b$, DH $= d$, AQ $= c$; erit AH$^2 = dd + bb$. Sit porro PM $= x$ parameter Parabolæ $= a$, erit OM $= x + c$, RM $= x + d$. Quoniam (§. 404) Tab. X. Fig. 103.

$$a : \text{OM} + \text{AQ} = \text{PM} : \text{AP}$$

$$a : x + 2c = x : \frac{x^2 + 2cx}{a}$$

erit DP $=$ HR $= \frac{x^2 + 2cx}{a} - b$, adeoque

HR$^2 = \frac{x^4}{a^2} + \frac{4cx^3}{a^2} + \frac{4c^2x^2}{a^2} - \frac{2bx^2}{a} - \frac{4bcx}{a} + bb$, & RM$^2 = x^2 + 2dx + dd$.

Habe-

Habemus adeo:

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}-\frac{4bcx}{a}+bb$$
$$+x^2+2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}+\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}+2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3+4cx^2+4c^2x-4abc=0$$
$$-2abx+2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si habetur terminus secundus positivus, radices veras cadere versus dextram. Sit adeo æquatio cum ea comparanda

$x^3+px^2 \pm qx \pm r=0$; erit

$4c=p \qquad 4c^2-2ab+a^2=q$

$c=\frac{1}{4}p \qquad 4c^2+a^2-q=2ab$

$$\tfrac{4}{16}p^2+a^2-q=2ab \qquad 2a$$

$$\frac{p^2}{8a}+\tfrac{1}{2}a-\frac{q}{2a}=b$$

vel

$$a^2+4c^2-2ab=-q$$
$$a^2+\tfrac{4}{16}p^2+q=2ab$$
$$\tfrac{1}{2}a+\frac{p^2}{8a}+\frac{q}{2a}=b$$

Porro

$$2a^2d-4abc=r$$
$$2a^2d=r+4abc$$
$$d=\frac{r}{2a^2}+\frac{2bc}{a}$$

hoc est $d=\frac{r}{2a^2}+\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}\mp\frac{pq}{4a^2}$

vel

$$2aad-4abc=-r$$
$$2aad=4abc-r$$
$$d=\frac{2bc}{a}-\frac{r}{2a^2}$$

hoc est $d=\frac{1}{4}p+\frac{p^3}{16a^2}+\frac{pq}{4a^2}-\frac{r}{2a^2}$

Sit jam $pN=x$; reliqua sint ut ante: erit $Nr=pN-rp=pN-DH$ *Tab.X.* $=x-d$, $No=x-c$, $pm=x-2c$. *Fig.* 103.

Quoniam (§. 404)

$$a:oN+AQ=pm:Ap$$
$$a:x=x-2c:\frac{xx-2cx}{a}$$

erit $Dp=Hr=\frac{x^2-2cx}{a}-b$. Habemus adeo $NH^2=Hr^2+Nr^2$ (§.417 *Geom.*)

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}-\frac{2bx^2}{a}+\frac{4bcx}{a}+b^2$$
$$+x^2-2dx+dd=bb+dd$$

$$\frac{x^4}{a^2}-\frac{4cx^3}{a^2}+\frac{4c^2x^2}{a^2}+\frac{4bcx}{a}=0$$
$$-\frac{2bx^2}{a}-2dx$$
$$+x^2$$

$$x^3-4cx^2+4c^2x+4abc=0$$
$$-2abx-2a^2d$$
$$+a^2x$$

Apparet adeo, si terminus secundus sit negativus, radicem æquationis veram esse versus sinistram. Sit adeo æquatio cum ea comparenda $x^3-px^2 \mp qx \mp r=0$; erit

$$-p=-4c$$
$$\tfrac{1}{4}p=c$$
$$4c^2-2ab+a^2=q$$
$$a^2+4c^2-q=2ab$$
$$\tfrac{1}{2}a+\frac{2c^2}{a}-\frac{q}{2a}=b$$

 hoc

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} - \frac{q}{2a} = b$

vel

$$4c^2 - 2ab + a^2 = -q$$
$$a^2 + 4c^2 + q = 2ab \quad (2a)$$
$$\frac{1}{2}a + \frac{2c^2}{a} + \frac{q}{2a} = b$$

hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a} = b$

Porro

$$4abc - 2a^2d = r$$
$$4abc - r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} - \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} - \frac{r}{2a^2} = d$

vel

$$4abc - 2a^2d = -r$$
$$4abc + r = 2a^2d$$
$$\frac{2bc}{a} + \frac{r}{2a^2} = d$$

hoc est $\frac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} + \frac{r}{2a^2} = d.$

Tab.X. *Fig.* 103. Est ergo in omnibus æquationibus cubicis completis

$$AQ = \tfrac{1}{4}p$$
$$DA = \tfrac{1}{2}a + \frac{p^2}{8a} + \frac{q}{2a}$$
$$DH = \tfrac{1}{4}p + \frac{p^3}{16a^2} \mp \frac{pq}{4a^2} \mp \frac{r}{2a^2}$$

Nimirum in regula, q seu coëfficiens termini tertii semper afficitur signo contrario ejus, quod in æquatione habet. Habetur autem in regula $-r$, si p & r diversis signis afficiuntur: alias semper est $+r$.

Quoniam coëfficientes illorum terminorum evanescunt, qui nihilo æquales ponuntur; evidens est ejusdem regulæ ad æquationes incompletas applicatio.

Denique si quadratum radii MH vel HN ponatur $bb + dd \mp af$; æquatio manebit biquadratica. Quare si biquadratica æquatio fuerit $x^4 \mp px^3 \mp qx^2 + rx \mp f = 0$; reliqua omnia manebunt ut ante, sed Tab.X. *Fig.* 103.

$$f = a^3 f$$
$$f : a^3 = f$$

Unde radius Circuli invenitur ut in Problemate 250 (§. 617), si fuerit $+f$, vel ut in Problemate 251 (§. 618), si fuerit $-f$. His observatis, regula eadem constructioni æquationum biquadraticarum satisfacit.

SCHOLION.

623. *Atque hæc est regula, quam* Thomas BAKERUS (a) *centralem vocat & ad omnes casus æquationum cubicarum & biquadraticarum applicat. Sed verum ejus fundamentum latet in iis, quæ superius tradidimus. Restat, ut usum hujus doctrinæ aliquot exemplis illustremus.*

PROBLEMA CCLV.

624. *Inter duas lineas datas invenire duas medias continue proportionales.*

Si datarum	quæsitarum
major $= b$	minor $= y$,
minor $= a$	major $= x$

erit, per conditionem Problematis,

I. $a : y = y : x$
$ax = yy$

II. $y : x = x : b$
$xx = by$

III.

(a) In *Clave Geometrica catholica* p. 6.

$$a : y = x : b$$

III. $ab = xy$

$x^2 = by$

$ax = y^2$

IV. $x^2 - ax = by - y^2$

$ax = y^2$

$x^2 = by$

V. $x^2 + ax = y^2 + by$

$x^2 = by$

$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$

$ax = y^2$

VI. $\frac{ax^2}{v} + ax = \frac{aby}{v} + y^2$

$ax = y^2$

$\frac{ax^2}{v} = \frac{aby}{v}$

VII. $ax - \frac{ax^2}{v} = y^2 - \frac{aby}{v}$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ⎫ ad Parabolam.
II. $x^2 - by = 0$ ⎭

III. $xy - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

IV. $y^2 + x^2 - by - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + by - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 - \frac{ax^2}{v} + \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Hyperbolas ſcalenas.

VII. $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$ ad infinitas Ellipſes.

Quodſi in æquatione ad Hyperbolam intra aſymptotos $xy = ab$ ſubſtituatur valor ex æquatione ad Parabolam $ax = y^2$; prodibit $y^3 - a^2 b = 0$.

Conſtructio itaque multis modis fieri poteſt, nimirum per Circulum & Hyperbolam intra aſymptotos, per Circulum & Hyperbolam æquilateram, per Circulum & infinitas Hyperbolas, per Circulum & infinitas Ellipſes, vel per duas Hyperbolas &c. vel denique per regulam centralem BAKERI.

Pro Circulo, ad quem eſt $y^2 + x^2 - by - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 589),

$\frac{r}{q} = 0$ $\quad 2n = b \quad$ $2p = a$

$\frac{s^2}{q^2} = 1$ $\quad n = \frac{1}{2} b \quad$ $p = \frac{1}{2} a$

$s = q$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\tfrac{1}{4} bb + \tfrac{1}{4} aa)} = m$$

Quoniam in Parabola parametro a deſcripta, ad quam $ax = y^2$, origo ipſius x in vertice A exiſtit; Circulus per ejus verticem deſcribendus radio $= \sqrt{(\frac{1}{4} bb + \frac{1}{4} aa)}$. Fiat itaque AD $= \frac{1}{2} a$, DH $= \frac{1}{2} b$; erit centrum Circuli in H & PM $= y$, PA $= x$: id quod facile oſtenditur eodem, quo ſuperius, modo. Tab. IX. Fig. 93.

Pro Ellipſi, ad quam eſt $y^2 + \frac{ax^2}{v} - \frac{aby}{v} - ax = 0$, habetur, vi Theorematis generalis (§. 588),

$\frac{2r}{q} = 0$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{a}{v} \quad$ $2n = \frac{ab}{v}$

hinc

$s = q$ $\quad$ $n = \frac{ab}{2v}$

$\frac{2tp}{2m} = a = \frac{2ap}{v}$ $\quad$ $n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$

$2ap = av$ $\quad$ $n^2 + \frac{ap^2}{v} = \frac{am^2}{v}$

$p = \frac{1}{2} v$

vn^2

$$\frac{vn^2}{a}+p^2=m^2$$

$$\frac{ab^2}{4v}+\tfrac{1}{4}v^2=m^2$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(\frac{ab^2}{v}+v^2)}=m$$

Tab.X. *Fig.* 104. Constructio itaque Problematis per Circulum & Ellipsin hæc est: Jungantur DF$=b$ & DE$=a$ ad angulos rectos. Fiat DK$=\frac{1}{2}b$ & erecta perpendiculari KC$=\frac{1}{2}a$; erit DC$=\sqrt{(\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}aa)}$. Ex centro itaque C radio DC describatur Circulus: ita locus prior erit constructus atque origo indeterminatæ x in D. Quare pro Ellipsi fiat DH$=ab:2v$ & per H ducatur ipsi DE parallela IN. Fiat HL$=\frac{1}{2}v$ & LI$=$LN$=\frac{1}{2}\sqrt{(ab^2:v+v^2)}$; erit L centrum, IN axis Ellipsis: quæ si describatur, secabit Circulum in M. Dico esse DQ$=x$, QM$=y$, consequenter DE, QM, DQ, DF quatuor continue proportionales.

Est enim CP$=x-\frac{1}{2}a$ & PM$=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob DC^2 = CM^2 = CP^2+PM^2 (§. 417 *Geom.*), $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, hoc est, $yy+xx-by-ax=0$: qui est locus ad Circulum. Porro OM$=y-ab:2v$, LO$=x-\frac{1}{2}v$ adeoque ob

$$v:a=\text{IL}^2-\text{LO}^2:\text{OM}^2\ (\S\ 431)$$

$$1:\frac{a}{v}=\frac{ab^2}{4v}-x^2+vx:y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$\frac{a^2b^2}{4v^2}-\frac{ax^2}{v}+ax=y^2-\frac{aby}{v}+\frac{a^2b^2}{4v^2}$$

$$y^2+\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}-ax=0$$

sed $y^2+x^2-by-ax=0$

Ergo $\frac{ax^2}{v}-\frac{aby}{v}+by-x^2=0$

$$x^2-by=0$$

$$x^2=by$$

Substituatur hic valor in æquatione $y^2+x^2-by-ax=0$; prodibit

$$y^2+by-by-ax=0$$

$$y^2=ax$$

Quare $a:y=y:x$ & (ob $x^2=by$) $y:x=x:b$. Sunt adeo a, y, x, & b quatuor continue proportionales.

Eodem modo Problema construitur per Circulum & infinitas Hyperbolas scalenas.

Constructionem per Circulum & Hyperbolam intra asymptotos adhuc apponimus. Jungantur nempe RI$=a$ & AR$=b$ ad angulos rectos, & per I describatur Hyperbola intra asymptotos RA, AT. Fiat RD$=\frac{1}{2}b$ & in D erigatur perpendicularis DC$=\frac{1}{2}a$, tandemque ex centro C radio CA describatur Circulus secans Hyperbolam in M: erit TM$=y$ & AT$=x$. Tab. XI. *Fig.* 105.

Nam ex natura Hyperbolæ (ob AR. RI=AT. TM) $ab=xy$ & CK$=x-\frac{1}{2}a$, KM$=y-\frac{1}{2}b$, adeoque ob CM^2=CK^2+KM^2, $\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}bb=xx-ax+\frac{1}{4}aa+yy-by+\frac{1}{4}bb$, consequenter $yy+xx-ax-by=0$, seu $xx-ax=by-yy$. Est ergo, vi æquationis prioris,

$$a:x=y:b$$

Quare $x-a:a=b-y:y$ (§. 124)
Porro, vi æquationis posterioris

$$x-a:b-y=y:x$$

Ergo (§. 124) $a:y=y:x$
Est vero etiam $a:y=x:b$ (§. *cit.*)
Ergo $a:y=y:x=x:b$ (§. 167 *Arith.*)
Quod-

Tab. XIII. Fig. 122. Quodsi AR & AS jungantur ad angulos rectos, & circa axem AR parametro a describatur Parabola AMH, circa AS vero parametro b Parabola altera AMI secans priorem in M; erit $AP = x$. $PM = y$: quem modum invenit MENECHMUS; ex conditione Problematis, absque calculo analytico facile eruendum: & nos ideo apponimus, quia inde enata est methodus construendi æquationes per duorum locorum combinationem. Est enim vi Parabolæ primæ $y^2 = ax$ & vi secundæ $x^2 = by$, adeoque $a : y = y : x$ & $y : x = x : b$.

COROLLARIUM.

625. Sit latus cubi $= a$, latus cubi dupli $= y$; erit $2a^3 = y^3$, seu ponendo $2a = b$, $aab = y^3$. Quærendæ igitur sunt inter latus cubi & ejus duplum duæ mediæ continue proportionales, eritque earum prima latus cubi dupli. Et in genere pro tantuplicatione cubi est $ma^3 = y^3$, adeoque inter a & ma quærendæ sunt duæ mediæ.

SCHOLION.

616. *Coincidit adeo Problema Deliacum de duplicando cubo, quod Deliis remedium contra pestem quærentibus Oraculum proposuisse fertur, cum Problemate de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus (quod primus observavit* HIPPOCRATES Chius)*: unde & ipsum* Problema Deliacum *appellari solet. Celebre hoc Problema jam olim inter Geometras Græcos extitit, quos inter* PLATO, HERON Alexandrinus, APOLLONIUS Pergæus, ERATOSTHENES, PAPPUS Alexandrinus, SPORUS, MENECHMUS, ARCHITAS Tarentinus, PHILO Byzantius, PHILOPONUS, DIOCLES & NICOMEDES *modis diversis ab* EUTOCIO (a) *conservatis solverunt.*

(a) In *Commentariis* in lib. 2 ARCHIMEDIS *de Sphæra & Cylindro.*

PROBLEMA CCLVI.

627. *Rectam* AB *utcunque divisam in* C *ulterius dividere in* D, *ita ut sit* $CD : DB = AC^2 : CD^2$. Tab. XI. Fig. 106.

Sit $AC = a$, $CB = b$, $CD = y$, erit $DB = b - y$; consequenter, per conditionem Problematis,

$$y : b - y = a^2 : y^2$$

Ut nova indeterminata introducatur, cum ob $y^3 = a^2 b - a^2 y$ Problema solidum esse facile intelligatur, fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$, & hinc

$$y : b - y = a^2 : ax$$
$$= a : x \quad (\S.124)$$

II. $xy = ab - ay$

Porro ob $y : b - y = a : x$

$$y^2 : by - y^2 = a : x \quad (\S.124)$$
$$ax : by - y^2 = a : x$$
$$x : by - y^2 = 1 : x \quad (\S.\ cit.)$$

III. $x^2 = by - y^2$

$ax = y^2$ add.

IV. $x^2 + ax = by$

$ax = y^2$ add.

V. $x^2 + 2ax = by + y^2$

Denique ob $ax = y^2$ (I)

& $x^2 = by - y^2$ (III) subt.

VI. $ax - x^2 = 2y^2 - by$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy + ay - ab = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $y^2 + x^2 - by = 0$ ad Circulum.

IV. $x^2 + ax - by = 0$ ad Parabolam.

V. $y^2 - x^2 + by - 2ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$ ad Ellipsin.

Nos

Nos duas dabimus constructiones, alteram per Parabolam & Circulum; alteram per Circulum & Ellipsin.

Quoniam æquatio ad Parabolam $y^2 - ax = 0$; non alia re opus est, quam ut parametro a Parabola describatur: erit origo indeterminatæ x in vertice (§. 388).

Pro Circulo, ad quem est $y^2 + x^2 - by = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$r = 0 \qquad 2n = b \qquad n^2 = m^2$$
$$p = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}b \qquad m = n = \tfrac{1}{2}b$$

Tab. XI. *Fig.* 107. In vertice adeo Parabolæ erigatur perpendicularis $AD = \frac{1}{2}b$ & ex centro D, radio $AD = \frac{1}{2}b$, describatur circulus; erit $PM = y$.

Demissa enim perpendiculari DR, erit $MR = PM - PR = PM - AD = y - \frac{1}{2}b$ & (§. 391) $AP = DR = y^2 : a$, consequenter ob $DA^2 = DM^2 = MR^2 + DR^2$ (§. 417 *Geom.*), $y^4 : aa + y^2 - by + \frac{1}{4}bb = \frac{1}{4}bb$, hoc est,

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Pro Ellipsi ad quam $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 588),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2} \qquad 2n = \tfrac{1}{2}b \qquad \frac{2tp}{2m} = \tfrac{1}{2}a$$

hinc $\qquad n = \frac{1}{4}b \qquad p = \frac{1}{2}a$

$q = \int$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$
$$n^2 + \tfrac{1}{2}p^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$
$$\tfrac{1}{16}bb + \tfrac{1}{8}a^2 = \tfrac{1}{2}m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{8}bb + \tfrac{1}{4}a^2)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ & parameter $= \sqrt{(\frac{1}{8}bb + \frac{1}{4}a^2)}$ ob $2m : t = 2 : 1$. Ex centro C demittatur perpendicularis $CH = n = \frac{1}{4}b$ & ducta DE per H axi AB parallela fiat $HD = p = \frac{1}{2}a$; erit in D origo indeterminatæ x. Tab. XI. *Fig.* 108.

Quare Circulum cum ea combinaturus erige perpendicularem $DL = \frac{1}{2}b$ & ex L radio DL describatur Circulus: erit $QM = y$, $DQ = x$.

Est enim $PC = QH = DQ - DH = x - \frac{1}{2}a$, $PM = y - \frac{1}{4}b$, adeoque $PC^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2$, $PM^2 = y^2 - \frac{1}{2}by + \frac{1}{16}b^2$. Est porro $AC^2 = \frac{1}{8}b^2 + \frac{1}{4}a^2$, consequenter ob $t : 2m = 1 : 2$ (§. 431)

$$1 : 2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : 2 = y^2 - \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{16}bb : \tfrac{1}{8}bb - x^2 + ax$$
$$2y^2 - by + \tfrac{1}{8}bb = \tfrac{1}{8}bb + ax - xx$$
$$2y^2 - by = ax - xx.$$

Porro $RM = y - \frac{1}{2}b$, $LR = DQ = x$, $LM = \frac{1}{2}b$, consequenter ob $LM^2 = LR^2 + RM^2$ (§. 417 *Geom.*)

$$\tfrac{1}{4}bb = y^2 - by + \tfrac{1}{4}bb + xx$$
$$y^2 - by = -xx$$

Quo valore ipsius $y^2 - by$ in æquatione superiore substituto, prodit

$$y^2 - xx = ax - xx$$
$$y^2 = ax$$
$$y^2 : a = x$$
$$y^4 : aa = x^2$$

Hinc ob $y^2 - by + x^2 = 0$

$$\frac{y^4}{aa} + y^2 - by = 0$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; y : aa$$
$$y^3 + a^2 y - a^2 b = 0$$

Quod Ellipsis transeat per puncta D & L, ita ostenditur. Est $KL = DK = \frac{1}{4}b$, adeoque $KL^2 = \frac{1}{16}b^2$. $AC = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2}$

$\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}bb)}$ & $KC = DH = \frac{1}{2}a$, adeoque $AK = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} - \frac{1}{2}a$ & $KB = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2)} + \frac{1}{2}a$, consequenter $AK.\,KB = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{8}b^2$. Sed $2KL^2 = \frac{2}{16}b^2 = \frac{1}{8}b^2$. Est itaque $2KL^2 = AK.\,KB$, consequenter punctum L, adeoque & punctum D in Ellipsi (§. 420).

PROBLEMA CCLVII.

628. *Dato parallelepipedo cubum æqualem construere.*

Sint latera parallelepipedi a, b & c; latus cubi sit y; erit (§. 536 *Geom.*)

$$abc = y^3$$

hoc est, $a : y = y^2 : bc$

Ut nova indeterminata in æquationem introducatur; fiat

$$a : y = y : x$$

erit I. $ax = y^2$.

& ob $a : y = ax : bc$

II. $xy = bc$.

Porro $a : y = y : x$

$a : y = ax : bc$

adeoque $y : x = ax : bc$ (§. 167 *Arithm.*)

$$ax^2 = bcy$$

III. $x^2 = bcy : a$

$ax = y^2$ subt.

IV. $x^2 - ax = bcy : a - y^2$

V. $x^2 + ax = y^2 + \frac{bcy}{a}$

Denique ob $x^2 = bcy : a$

& $2ax = 2y^2$

VI. $2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$

& VII. $2ax + x^2 = 2y^2 + bcy : a$

Habemus adeo æquationes locales

I. $y^2 - ax = 0$ ad Parabolam.

II. $xy - bc = 0$ ad Hyperbolam intra asymptotos.

III. $x^2 - \frac{bcy}{a} = 0$ ad Parabolam.

IV. $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Circulum.

V. $y^2 - x^2 + \frac{bcy}{a} - ax = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.

VI. $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Ellipsin.

VII. $y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{bcy}{2a} - ax = 0$ ad Hyperbolam scalenam.

Pro loco ad Circulum, ad quem $y^2 + x^2 - \frac{bcy}{a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = bc : a \qquad 2p = a$$

$$n = bc : 2a \qquad p = \frac{1}{2}a$$

$$n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{(\frac{b^2c^2}{4a^2} + \frac{1}{4}aa)} = m$$

Cum in Parabola, ad quam $y^2 - ax = 0$, parametro a descripta, origo indeterminatæ x sit in vertice A, fiat $AD = \frac{1}{2}a$, $DH = n = bc : 2a$; erit H centrum Circuli radio HA describendi: qui si describatur, secabit Parabolam in M, eritque $MP = y$. Tab. IX. Fig. 93.

Est enim $AH^2 = AD^2 + DH^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2$, $PA = yy : a$ (§. 391), & hinc $DP = HR = yy : a - \frac{1}{2}a$, $MR = y - bc : 2a$. Quare ob $AH^2 = HM^2 = HR^2 + MR^2 = \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = \frac{y^4}{aa} - yy + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$

hoc est, $\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$

$$y^3 - abc = 0 \quad (\cdot y : aa)$$

 Jun-

Tab. XI. Fig. 105. Jungantur $RI = b$ & $RA = c$ ad angulos rectos, ducatur indefinita AS ipsi RI parallela & intra asymptotos RA & AS per I describatur Hyperbola; erit origo indeterminatae x in A. Porro ut Circulus cum ea combinetur, fiat $AD = n = bc : 2a$ & DC ad AD perpendicularis $= p = \frac{1}{2}a$; ex centro C radio AC describatur Circulus Hyperbolam in M intersecans, erit TM ipsi AR parallela $= y$.

Est enim ob AR. RI = AT. TM (§. 502) $bc = xy$. Praeterea $CM^2 = AC^2 = AL^2 + CL^2$ (§. 417 *Geom.*) $= \frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa$, $CK = LT = AT - AL = x - \frac{1}{2}a$ & $MK = TM - TK = TM - AD = y - bc : 2a$: unde ob $CM^2 = CK^2 + KM^2$ elicitur $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4aa = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{bbcc}{4aa}$

hoc est, $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituatur pro bc valor ipsius xy; prodibit

$$y^2 - \frac{xy^2}{a} = ax - x^2$$

$$ay^2 - xy^2 = aax - axx \quad a - x$$

$$y^2 = ax$$

$$y^4 = a^2x^2$$

$$y^4 : a^2 = x^2$$

Quare ob $y^2 - \frac{bcy}{a} + x^2 - ax = 0$

$$ax - \frac{bcy}{a} + \frac{y^4}{a^2} - ax = 0$$

$$\frac{y^4}{aa} - \frac{bcy}{a} = 0$$

$$y^3 - a^2c = 0$$

Pro Ellipsi, ad quam est $y^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{bcy}{2a} - ax = 0$, vi Theorematis generalis (§. 583),

$\frac{r}{q} = 0$ hinc $q = f$ $\quad \frac{t}{2m} = \frac{1}{2}$ $\quad -\frac{2tp}{2m} = -a$

$$2n = \frac{bc}{2a} \qquad \frac{2p}{2} = a$$

$$n = \frac{bc}{4a} \qquad p = a$$

$$n^2 + \frac{tp^2}{2m} = \frac{tm^2}{2m}$$

$$n^2 + \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}m^2$$

$$2n^2 + p^2 = m^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{b^2c^2}{8aa} + aa\right)} = m$$

Describatur ergo Ellipsis, cujus axis $AB = 2\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, parameter $\sqrt{(a^2 + b^2c^2 : 8aa)}$, quia est ad axem in ratione subdupla. Ex centro C excitetur perpendicularis $CH = \frac{bc}{4a}$ & per H agatur DE ipsi AB parallela. Fiat $DH = a$: erit D origo indeterminatae x. Ut Circulus cum eadem combinetur, fiat $DI = bc : 2a$ & $IL = \frac{1}{2}a$, & radio LD ex centro L describatur Circulus qui Ellipsin secabit in M. Dico QM esse $= y$ & $DQ = x$. Tab. XI. Fig. 109.

Est enim $CP = HQ = DQ - DH = x - a$ & $PM = QM - PQ = QM - DK = y - bc : 4a$. Ex natura Ellipsis (§. 431)

$$2 : 1 = AC^2 - CP^2 : PM^2$$

$$2 : 1 = \frac{b^2c^2}{8aa} + a^2 - x^2 + 2ax - aa : y^2 - \frac{bcy}{2a} + \frac{b^2c^2}{16a^2}$$

Tab. XI. Fig. 109.

$$\frac{b^2c^2}{8aa} - x^2 + 2ax = 2y^2 - \frac{bcy}{a} + \frac{b^2c^2}{8a^2}$$

$$2ax - x^2 = 2y^2 - bcy : a$$

Porro MR = QM − RQ = QM − DI = $y - bc : 2a$, LR = DQ − IL = $x - \frac{1}{2}a$. Quare ob DL² = LM² = LR² + RM² $\frac{1}{4}aa + b^2c^2 : 4a^2 = x^2 - ax + \frac{1}{4}aa + y^2 - bcy : a + b^2c^2 : 4a^2$, hoc est,

$$x^2 - ax + y^2 - bcy : a = 0$$

seu $y^2 - \frac{bcy}{a} = ax - x^2$

Substituto valore ipsius $ax - xx$ in æquatione superiori, prodit

$$ax + y^2 - \frac{bcy}{a} = 2y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$ax = y^2$$

$$x = y^2 : a$$

$$x^2 = y^4 : a^2$$

His valoribus ipsorum x & x^2 denuo in æquatione superiore substitutis prodit

$$y^2 - y^4 : a^2 = y^2 - \frac{bcy}{a}$$

$$\frac{y^4}{aa} = \frac{bcy}{a}$$

$$\overline{\qquad\qquad} y : aa$$

$$y^3 = abc$$

Non absimili modo fit constructio per Circulum & Hyperbolam.

PROBLEMA CCLVIII.

629. *Datum angulum* ACB *trisecare.*

Tab. XI. Fig. 110. Concipiamus angulum ACB esse trifariam sectum in ACE, ECD & DCB, ducanturque arcuum æqualium subtensæ cognomines AE, ED, DB, quæ æquales sunt (§. 289 *Geom.*). Sit AC $= b$, AB $= a$, AE $= y$, EG $= x$.

Jam anguli EAB mensura est arcus DB (§. 314 *Geom.*). Anguli vero ACE mensura cum sit arcus AF (§. 57 *Geom.*) ipsi DB æqualis *per hypoth.* anguli EAG & ACE æquales sunt (§. 142 *Geom.*). Quoniam itaque præterea angulus AEC utrique triangulo EAG & EAC communis; erit (§. 267 *Geom.*)

AC:AE = AE:EG   AC:EC = AE:AG

$b : y = y : x$ sed AC = EC

I. $yy = bx$ ergo AE = AG

Ducatur EF ipsi DC parallela: erit EFH = GHC (§. 233 *Geom.*) = EDC (§. 312 & 233 *Geom.*). Porro EGF = HGC (§. 156 *Geom.*) = CED (§. 312 & 233 *Geom.*). Est igitur (§. 267 *Geom.*).

EC : ED = EG : GF

$$b : y = x : \frac{xy}{b}$$

Quoniam DB = ED = AE, & DB = BH, EA = AG, *per demonstr.* ED = FH (§. 257 *Geom.*): erit AE + ED + DB = AG + BH + GH + FG, hoc est, 3AE = AB + FG, consequenter

$$3y = a + xy : b$$

II. $3by = ab + xy$ seu $3by - xy = ab$ quæ æquatio in hanc resolvitur analogiam:

$$b : y = 3b - x : a$$

$$y : x = 3b - x : a \text{ (§. 167 Arith.)}$$

III. $ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ add.

IV. $ay + yy = 4bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$yy = bx$ subtr.

V. $ay - yy = 2bx - xx$

$ay = 3bx - xx$

$2yy = 2bx$ add.

VI:

$$\text{VI. } 2yy + ay = 5bx - xx$$
$$ay = 3bx - xx$$
$$2yy = 2bx \quad \text{ſubtr.}$$
$$\text{VII. } ay - 2yy = bx - xx$$

Habemus adeo æquationes locales

I. $yy - bx = 0$ ad Parabolam.
II. $xy - 3by + ab = 0$ ad Hyperbolam intra aſymptotos.
III. $xx - 3bx + ay = 0$ ad Parabolam.
IV. $yy + xx + ay - 4bx = 0$ ad Circulum.
V. $yy - xx - ay + 2bx = 0$ ad Hyperbolam æquilateram.
VI. $yy + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}bx = 0$ ad Ellipſin.
VII. $yy - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}bx = 0$ ad Hyperbolam ſcalenam.

Pro Circulo, ad quem eſt $yy + xx + ay - 4bx = 0$, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$-2n = a \qquad\qquad -2b = -4b$$
$$n = -\tfrac{1}{2}a \qquad\qquad p = 2b$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 4bb)} = m$$

Tab. IX. Fig. 93. Quare Parabola, ad quam $yy - bx = 0$, parametro b deſcripta, fiat AD $= 2b$, DH $= \frac{1}{2}a$, & ex centro H radio DH deſcribatur Circulus; erit QN $= y$, AQ $= x$.

Eſt enim his poſitis $bx = y^2$ (§. 388), conſequenter $x = y^2 : b$, atque hinc DQ $=$ KH $= 2b - y^2 : b$. Porro KN $=$ QN $+$ QK $=$ QN $+$ DH $= y + \frac{1}{2}a$. Quare ob HN^2 $=$ KH^2 $+$ KN^2 $= \frac{1}{4}aa + 4bb = 4bb - 4y^2 + y^4 : bb + yy + ay + \frac{1}{4}aa$, hoc eſt

$$\frac{y^4}{bb} - 3y^2 + ay = 0$$
$$y^3 - 3bby + abb = 0 \qquad y : bb$$

Eadem vero æquatio prodit, ſi in ſuperius inventa ſecunda æquatione $3y = a + xy : b$ ſubſtituitur valor ipſius $x = y^2 : b$ ex prima. Eſt nempe $3y = a + y^3 : bb$, hoc eſt, $y^3 - 3bby + abb = 0$.

Conſtructio per Circulum & Hyperbolam intra aſymptotos ita abſolvitur. Jungantur KL $= 2b$ & CL $= \frac{1}{2}a$ ad angulos rectos; erit CK $= \sqrt{(4bb + \frac{1}{4}aa)}$ radius Circuli ex centro C per K deſcribendi. Producatur CL in I, donec LI $= a$ & KL in T, donec LT $= b$, ſeu KT $= 3b$. Intra aſymptotos KTS per I deſcribatur Hyperbola. Dico QM eſſe radicem veram quæſitam ſeu ſubtenſam trientis arcus, qui metitur angulum triſecandum, radio b deſcripti: ſeu QM $= y$ & KQ $= x$. Tab. XI. Fig. 111.

Eſt enim QT $=$ KT $-$ KQ $= 3b - x$, adeoque ob IL.LT $=$ QT.QM (§. 502), $3by - xy = ab$. Porro PC $=$ QL $=$ KL $-$ KQ $= 2b - x$ & PM $= y + \frac{1}{2}a$, adeoque ob KC^2 $=$ MC^2 $=$ PM^2 $+$ PC^2 (§. 417 *Geom.*). $\frac{1}{4}aa + 4bb = y^2 + ay + \frac{1}{4}aa + 4bb - 4bx + xx$, hoc eſt, $y^2 + ay = 4bx - x^2$. Æquatio prior ad Hyperbolam in hanc reſolvitur analogiam;

$$3b - x : b = a : y$$
$$\text{Ergo } 4b - x : b = a + y : y \ (\text{§. } 124)$$
$$4b - x : a + y = b : y$$

Æquatio poſterior ad Circulum hanc ſuppeditat analogiam:

$$4b - x : y + a = y : x$$

Quare $b : y = y : x$ (§. 167 *Arithm.*)

Unde $bx = y^2$ & $y^2 : b = x$, $y^4 : b^2 = x^2$. Subſtitutis his valoribus in æquatione ad Circulum $y^2 + ay = 4bx - x^2$, prodit

$$y^2 + ay = 4y^2 - y^4 : b^2$$
$$ay = 3y^2 - y^4 : b^2$$
$$\qquad y : b^2$$
$$ab^2 = 3b^2y - y^3$$

ſeu $y^3 - 3b^2y + ab^2 = 0$ ut ante.

Notan-

Tab. XI. Fig. 110. 111. Notandum vero est, cum eadem æquatio prodeat si ponatur $qm=y$, esse qm trientis complementi ad circulum subtensam AI.

Constructiones reliquas facile proprio marte addent, qui superiora rite perceperunt.

PROBLEMA CCLIX.

630. *Numerum irrationalem datum per lineam exprimere.*

Sit potentia imperfecta quæcunque x & radix ex ea extracta irrationalis $x^{1:m}$.

Ponatur $x^{1:m}=y$

erit $x=y^m$

hoc est, a pro unitate assumta

$$a^{m-1}x=y^m$$

quæ est æquatio ad infinita Parabolarum genera (§. 519). Quare si parametro a Parabola primi generis sit descripta & abscissa sit ad parametrum ut numerus sub signo radicali. ex. gr. ut 3 ad 1, si $\sqrt{3}$ desideretur, vel ut 3 ad 2, si quæratur $\sqrt{\frac{3}{2}}$; ejus semiordinata exprimet numerum quæsitum.

Est enim in casu primo, si $a=1$, $x=3$, $y^2=3$, adeoque $y=\sqrt{3}$. Et si fuerit $a=1$, $a:x=3:2$, erit $3x=2a=2$, consequenter $x=\frac{2}{3}$. Hinc $y^2=\frac{2}{3}$, adeoque $y=\sqrt{\frac{2}{3}}$. Eodem modo patet, describendam esse Parabolam secundi generis seu cubici ordinis, si radices cubicæ dentur; Parabolam vero tertii generis seu biquadratici ordinis, si radices dentur biquadraticæ & ita porro.

Sed possunt etiam Parabolæ inferiores satisfacere radicibus superioribus. Sit enim ex. gr. quærenda linea y, quæ eandem habeat rationem ad lineam datam a, quam habet 1 ad $\sqrt[3]{5}$. Per conditionem Problematis erit

$$1:\sqrt[3]{5}=a:y$$

$$a\sqrt[3]{5}=y$$

$$5a^3=y^3$$

Construetur adeo Problema per Parabolam primi generis & circulum, quærendo nempe inter a & $5a$ duas medias continue proportionales.

Fiat enim $a:y=y:x$

erit I. $y^2=ax$

Æquatio proposita $5a^3=y^3$ resolvitur in hanc analogiam:

$$a:y=y^2:5a^2$$
$$=ax:5a^2$$
$$=x:5a$$

unde $y:x=x:5a$

$$x^2=5ay$$

$$y^2=ax \quad \text{vi num. I.}$$

II. $y^2+x^2=5ay+ax$

Æquatio prima est ad Parabolam & secunda ad Circulum. Unde æquatio $y^3=5a^3$ construitur ut supra.

PROBLEMA CCLX.

631. *Invenire puncta quotcunque, quæ sint in curva datæ æquationis.*

1. Ducta linea recta, quæ pro axe curvæ describendæ assumatur, pro arbitrio determinentur abscissæ quotcunque.
2. Erigantur perpendiculares indeterminatæ ad singulas abscissas.
3. Quoniam abscissa determinata est, æquatio data pro determinata recte habetur. Construatur itaque per methodum supra expositam: ita enim invenietur semiordinata abscissæ respondens.

E. gr.

Ex. gr. Sit construenda Parabola secundi generis seu cubici ordinis $aav = y^3$. Assumta igitur pro abscissa v recta determinata, nova quædam indeterminata introducatur. Fiat nempe

$$a : y = y : x$$
$$\text{I. } ax = y^2$$

Æquatio proposita in hanc resolvitur analogiam:

$$a : y = y^2 : av$$
$$\text{hoc est } ax : av$$
$$\text{seu } x : v \text{ (§. 124)}$$
$$\text{Quare } y : x = x : v \text{ (§. 167 } Arithm.)$$
$$x^2 = vy$$
$$\text{addatur } y^2 = ax$$
$$\text{erit II. } y^2 + x^2 - vy - ax = 0$$

Ope igitur æquationis ad Parabolam $y^2 - ax = 0$ & alterius ad infinitos Circulos (quia v infinitis modis determinari potest & debet) $y^2 + x^2 - vy - ax = 0$ puncta quotcunque in Paraboloide cubicali inveniuntur. Est enim pro Circulo, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$2n = v \qquad 2p = a$$
$$n = \tfrac{1}{2}v \qquad p = \tfrac{1}{2}a$$
$$n^2 + p^2 = m^2$$
$$\sqrt{(\tfrac{1}{4}vv + \tfrac{1}{4}aa)} = m$$

Tab. XI. Fig. 112. Quare Parabola parametro a descripta, fiat portio axis AK $= \frac{1}{2}a$ & erecta perpendiculari indefinita KG, ex ejus puncto quocunque C per verticem A describatur Circulus, erit QM semiordinata respondens abscissæ in Paraboloide cubicali, quæ est ipsius KC dupla. Ut igitur plures semiordinatæ determinentur, ut quotcunque aliis punctis rectæ KG per verticem Parabolæ ducendi sunt Circuli alii in punctis adhuc aliis Parabolam intersecantes.

Nam si KC $= \frac{1}{2}v$ & QM $= y$; erit AQ $= yy : a$, KQ $=$ CP $=$ AQ $-$ AK $= yy : a - \frac{1}{2}a$, PM $= y - \frac{1}{2}v$. Quamobrem ob AC^2 $=$ AK^2 $+$ KC^2 $=$ CM^2 $=$ CP^2 $+$ PM^2 (§. 417 *Geom.*) $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}vv = y^4 : aa - y^2 + \frac{1}{4}aa + y^2 - vy + \frac{1}{4}vv$, hoc est,

$$y^4 : aa = vy$$
$$y^3 = aav$$

Est ergo 2KC abscissa & QM ipsi respondens semiordinata in Paraboloide cubicali.

Sit construendus Circulus secundi generis, ad quem est $y^3 = av^2 - v^3$. Æquatio in hanc abit analogiam:

$$v : y = y^2 : av - v^2$$

Cum in constructione v determinetur, introducatur nova indeterminata x; ponendo

$$v : y = y : x$$
$$\text{erit I. } vx = yy$$
$$\text{Porro } v : y = vx : av - v^2$$
$$\text{hoc est } y : x = x : a - v \text{ (§. 124)}$$
$$\text{Itaque } ay - yv = xx$$
$$\text{Addatur } vx = yy$$
$$\text{erit II. } yy + xx + vy - ay - vx = 0.$$

Ope itaque æquationis prioris ad infinitas Parabolas & posterioris ad infinitos Circulos determinantur quotcunque semiordinatæ ad abscissas quotcunque in Circulo secundi generis assumptas.

Parametro nimirum v describitur Parabola, in qua abscissa x, semiordinata y. Pro Circulo vero est, vi Theorematis generalis (§. 589),

$$\frac{2r}{q} = 0 \qquad -2n = v - a$$
$$\text{hinc } r = 0 \qquad n = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}v$$
$$q = f$$
$$-\frac{2pf}{q} = -v \qquad m^2 = n^2 + p^2$$
$$-2p = -v \qquad = \tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2$$
$$p = \tfrac{1}{2}v \qquad m = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - av + \tfrac{1}{2}v^2)}$$

Fiat itaque AD $= \frac{1}{2}v$, DH $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}v$ & radio AH $= \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - av + \frac{1}{2}v^2)}$ describatur Circulus ex centro H transiens per verticem Parabolæ A, erit AP $= x$ & PM $= y$. Tab. X. Fig. 93.

Ipsa tamen constructio molestior est antecedente, quia continuo nova Parabola describenda, ob indeterminatam parametrum v.

Finis Analyseos finitorum.

ELE-

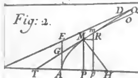


Fig: 2.
D
Q
o
E
M
m
R
G
T
A
P
p
H

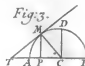


Fig: 3.
M
D
T
A
P
C
B

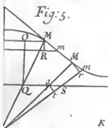
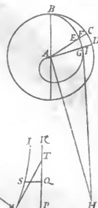
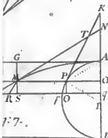
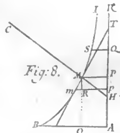
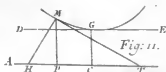


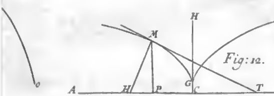
Fig: 5.
O
M
R
m
M
m
r
Q
S


B
Fig: 6.
E
F
C
D
A
G
I
H


K
N
T
G
A
M
P
Q
R
S
O
q
B


C
I
K
T
S
Q
Fig: 8.
M
P
m
R
H
B
O
A


M
D
G
E
Fig: 11.
A
H
P
C
T


H
M
Fig: 12.
A
H
P
G
C
T

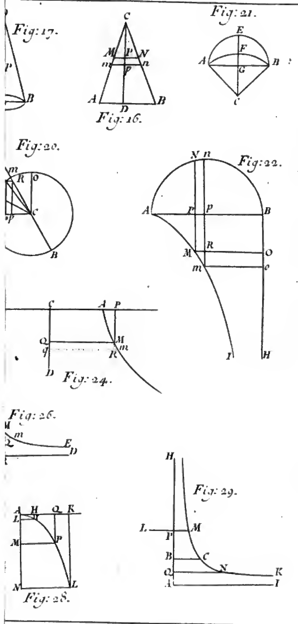


Fig:17.
Fig:16.
Fig:21.
Fig:20.
Fig:22.
Fig:24.
Fig:26.
Fig:29.
Fig:28.

Fig. 32.

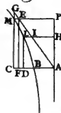


Fig. 33.

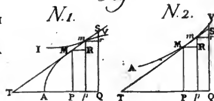
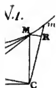


Fig. 35.



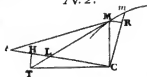


Fig. 36.

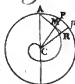


Fig. 37.

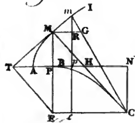


Fig. 38.

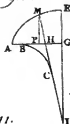


Fig. 40.

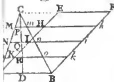


Fig. 41.

Fig. 12.

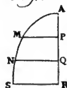


Fig. Anal. infin. Tab. IV.

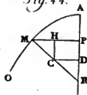


Fig. 44.

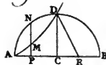


Fig. 45.

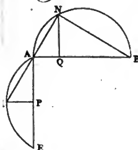


Fig. 47.

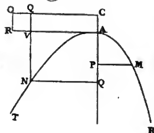


Fig. 48.

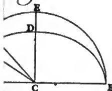


Fig. 50.

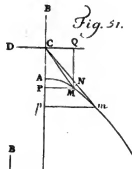


Fig. 51.

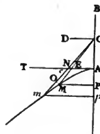


Fig. 53.

B

ELEMENTORUM ANALYSEOS MATHEMATICÆ

PARS SECUNDA,

ELEMENTA ANALYSEOS INFINITORUM TRADENS.

SECTIO PRIMA, DE CALCULO DIFFERENTIALI.

CAPUT PRIMUM.

De natura Calculi differentialis.

DEFINITIO I.

1. CALCULUS *differentialis* est Methodus quantitates differentiandi, hoc est, inveniendi quantitatem infinite parvam, quæ infinities sumta datam adæquat.

DEFINITIO II.

2. *Infinitesima*, seu *quantitas infinite parva*, est particula quantitatis adeo exigua, ut eidem incomparabilis existat, seu quæ omni assignabili minor.

COROLLARIUM I.

3. Infinitesima itaque respectu ejus quantitatis, cui incomparabilis existit, pro nihilo habenda. Si enim negligitur, error committitur omni assignabili minor, hoc est, nullus.

COROLLARIUM II.

4. Hinc duæ quantitates infinitesima differentes æquales sunt. Cum enim infinitesima neglecta nullum producat errorem in quantitatibus (§. 3); una alteri substitui potest. Sunt igitur æquales (§. 15 *Arithm.*).

SCHOLION.

5. *Ut natura infinitesimarum rite intelligatur, ad sequentia animum advertisse juvat. Ponamus, te dimetiri montis altitudinem; dum vero per dioptras collineas, flatu venti pulvisculum abigi: montis ergo altitudo diametro unius pulvisculi censetur imminuta. Enimvero quoniam eadem altitudo montis invenitur, sive pulvisculum illud vertici adhæreat, sive abigatur; quantitas ejus diametri in præsente negotio pro nihilo habenda, hoc est, infinite parva existit. Similiter in Astronomia diameter Telluris respect: Fixarum habetur pro puncto seu infinitesima: idem enim observaretur motus primus, si Tellus esset punctum individuum. Eodem etiam modo in Eclipsibus Lunaribus computandis Terra pro sphæra perfecta, consequenter montium, multoque magis ædium ac turrium altitudines pro infinitesimis habentur: neque enim aliter nobis appareret umbra Telluris super disco Lunæ, si Terra sphæra perfecta esset. Idem vero in abstractis quantitatibus locum habere, dudum agnovere Veteres & inter eos demonstratores rigidissimi*, EUCLIDES *(a) atque* ARCHIMEDES *(b). Ex. gr. si a linea data auferatur ipsius dimidium, ut habet* EUCLIDES, *seu, quod perinde est, pars alia quantacunque, & a residuo rursus ipsius dimidium aut pars alia similis primum ablatæ, atque ita porro: devenietur tandem ad aliquam quantitatem qualibet data minorem, hoc est, ad infinitesimam. Apparet adeo hinc, nomen infinitesimæ esse respectivum: involvit nempe relationem ad aliam quantitatem datam, cujus respectu infinitesima dicitur. Ex. gr. diameter Telluris in Eclipsibus lunaribus est infinite magna respectu altitudinis montium; sed eadem tamen est infinite parva respectu distantiæ Fixarum in ordine ad motum primum. Cavendum vero, ne cum illis, qui imaginaria cum realibus confundunt, propterea quod distincta continui ac infiniti notione destituti nescio quæ phantasmata sibi fingunt, infinitesimas & infinitesimarum infinitesimas pro entibus realibus habeas: a quo ipse Calculi infinitesimalis inventor, illustris* LEIBNITIUS, *alienus. (c)*

(a) *Element.* Lib. 10. prop. 1.

(b) In præfatione ad *Quadraturam Parabolæ*, & in scriptis ejus omnibus.

DEFINITIO III.

6. Infinitesimæ dicuntur *differentialia*, item *quantitates differentiales*, si spectantur ut differentiæ duarum quantitatum. Vir summus NEWTONUS (quem Angli sequuntur) infinitesimas *Fluxiones* vocat, quia eas considerat veluti momentanea quantitatum incrementa, ex. gr. lineæ fluxu puncti, aut superficiei fluxu lineæ, aut solidi fluxu superficiei genita.

COROLLARIUM.

7. Cum itaque solæ quantitates variabiles continuo augeantur, vel minuantur, constantibus vero nihil accedat, (§. 375 *Analys. finit.*); differentiale quantitatis constantis nullum est, sed variabiles tantum aliquod admittunt.

HYPOTHESIS.

8. *Quantitatum differentialia exprimantur per eandem litteram, quibus variabiles denotantur, præfixa tamen littera* d. Ex. gr. differentiale ipsius x dicatur dx; differentiale ipsius y dicatur dy. *Est autem* dx *quantitas positiva, si* x *continuo crescit; negativa, si decrescit.*

SCHOLION.

9. *Angli cum* NEWTONO *pro* dx *scribunt* $\dot{x}$; *pro* dy *vero* $\dot{y}$; *sed commodior est* Leibnitiana

(c) Vide *Acta Eruditorum* A. 1712. p. 167.

nitiana *differentialium designatio, qua omnes reliqui utuntur, quia si differentialia denuo differentiantur facile oritur punctorum confusio: ut taceam typothetas facilius puncta negligere, quam litteram* d *omittere.*

COROLLARIUM I.

10. Quoniam quantitates constantes primis alphabeti litteris indigitamus (*§.* 376 *Analys. finit.*); erit $da = 0$, $db = 0$, $dc = 0$, (*§.* 7).

COROLLARIUM II.

11. Quare $d(x + y - a) = dx + dy$ & $d(x - y + a) = dx - dy$. Facilis adeo est differentiatio quantitatum per additionem aut subtractionem compositarum.

PROBLEMA I.

12. *Differentiare quantitates se mutuo multiplicantes.*

RESOLUTIO.

I. Si quantitates duæ se mutuo multiplicent, ut xy; differentiale unius factoris ducatur in factorem alterum; summa duorum factorum, quæ hac ratione prodeunt, $xdy + ydx$, erit differentiale quæsitum, hoc est, $d(xy) = xdy + ydx$.

DEMONSTRATIO.

Tab.I. *Fig.* 1. xy repræsentat rectangulum ABDC, cujus latus unum $AC = x$, alterum $DC = y$. Si concipiamus latus utrumque augeri quantitate differentiali, nempe ut CA degeneret in $CL = x + dx$ & CD in $CE = y + dy$; rectangulum CABD abit in majus CLGE. Differentiale adeo ipsius xy est differentia inter rectangulum CABD & CLGE (§.6). Quare $d(xy) = xy + ydx + xdy + dxdy - xy = ydx + xdy + dxdy$, nempe ALBH + DBFE + EHGF. Quodsi, in rectangulo $ALHB = ydx$, $AL = dx$ sumatur pro constante; erit $HGFB = dxdy$ differentiale ejus (§. 6). Eodem modo patet, esse idem rectangulum BHGF differentiale ipsius DBFE. Quamobrem HBFG seu $dxdy$ respectu rectangulorum ALHB & DBFE, seu ydx & xdy, habetur pro nullo, consequenter differentia inter rectangula CABD & CLGE, seu differentiale ipsius xy est $ydx + xdy$. *Q. e. d.* Tab.I. *Fig.* 1.

II. Si plures quantitates se mutuo multiplicent, ex. gr. si fuerit vxy; fiat $vx = t$, erit $vxy = ty$, consequenter $d(vxy) = tdy + ydt$, *per cas.* 1. Sed $dt = vdx + xdv$, *per cas.* 1. Ergo his valoribus in differentiali antecedente $tdy + ydt$ substitutis prodit $d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$. Patet adeo factum ex binis ducendum esse in differentiale tertii.

III. Eodem modo reperitur, quid factu opus sit, si plures quantitates se mutuo multiplicent. Sit enim ex. gr. quantitas differentianda $vxyz$. Fiat $vxy = t$, erit $vxyz = tz$, consequenter $d(tz) = zdt + tdz$, *per cas.* 1. Sed $dt = d(vxy) = vxdy + vydx + xydv$, *per cas.* 2. Ergo $d(vxyz) = zdt + tdz = zvxdy + zvydx + zxydv + vxydz$.

IV. Quodsi crescente una variabili altera y decresceret; evidens est, fore $ydx - xdy$ differentiale ipsius xy.

COROLLARIUM I.

13. Ergo $d(x^2) = xdx + xdx = 2xdx$, $d(x^3) = x^2dx + x^2dx + x^2dx = 3x^2dx$ &c. & in genere $d(x^m) = mx^{m-1}dx$. Unde patet, quomodo potentiæ differentientur.

COROLLARIUM II.

14. Cum 1, 2, 3, 4 &c. exponentes dignitatum x^1, x^2, x^3, x^4, &c. sint earundem logarithmi, posito logarithmo unitatis $= 0$ (§. 334 *Arithm.*); logarithmi vero dignitatum decrescentium $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. sint $-1, -2, -3, -4$ &c. (§. 351 *Arithm.*) erit $\frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ &c. & in genere $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$, consequenter $d(1:x^m) = d(x^{-m}) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13). Vel cum sit $1 = x^0$ (§. 55 *part.* 1.), erit $1 : x^m = x^0 : x^m = x^{-m}$ (§. 54 *part.* 1.), adeoque $d(1:x^m) = -mx^{-m-1}dx$ (§. 13).

COROLLARIUM III.

15. Et quia $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ (§. 57 *Analys. finit.*) & $1 : \sqrt[m]{x^n} = 1 : x^{n:m} = x^{-n:m}$ (§. *cit. & præc.*); erit $d\sqrt[m]{x^n} = \frac{n}{m} x^{n:m-1}dx = \frac{n}{m} x^{(n-m):m}dx = \frac{n}{m} dx \sqrt[m]{x^{n-m}}$ & $d(1:\sqrt[m]{x^n}) = -\frac{n}{m} x^{-n:m-1}dx = -\frac{n}{m} x^{(-n-m):m}dx = -ndx : m\sqrt[m]{x^{n+m}}$

SCHOLION.

16. *Quodsi cuipiam non satis manifestum videatur, quomodo Corollaria duo posteriora ex priore inveniantur; is differentialia potentiarum imperfectarum alio adhuc modo investigare potest: quem in sequente Problemate exponimus, inprimis cum ejusdem methodi usus esse possit, quoties in formulis compositis differentiandis aqua hæret.*

PROBLEMA II.

17. *Differentiare* $1 : x^m$, *item* $\sqrt[m]{x^n}$ & $1 : \sqrt[m]{x^n}$.

RESOLUTIO.

I. Fiat $1 : x^m = v$

erit $1 = x^m v$

(§. 10, 12) $0 = mx^{m-1}vdx + x^m dv$

$-mx^{m-1}vdx = x^m dv$

$-\frac{mx^{m-1}vdx}{x^m} = dv$

$-\frac{mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = dv$ (§. 42, 54 *part.* 1.)

h.e. $-mx^{-m-1}dx = dv$ (§. 54 *part.* 1.)

II. Fiat $\sqrt[m]{x^n} = y$

$x^n = y^m$

$nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ (§. 13)

hoc est, $nx^{n-1}dx = \frac{my^m dy}{y}$ (§. 54 *part.* 1.)

$my^m : y$

$\frac{nyx^{n-1}}{my^m} dx = dy$

seu $\frac{nx^{n:m} x^{n-1}}{mx^n} dx = dy$

$\frac{nx^{n:m}}{m} x^{-1}dx = dy$ (§. 54, *part.* 1.)

hoc est, $\frac{n}{m} x^{(n-m):m} dx = dy$

III. Fiat denique $1 : \sqrt[m]{x^n} = z$

erit $1 = z\sqrt[m]{x^n} = zx^{n:m}$

$0 = \frac{n}{m} x^{(n-m):m} zdx + x^{n:m}dz$ (§. 12.)

$-nx$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{m}zdx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{n:m}}dx = x^{n:m}dz$$

$$-\frac{nx^{(n-m):m}}{mx^{2n:m}}dx = dz \text{ (§. 54 } part. \text{ 1)}$$

$$-\frac{n}{m}x^{(-n-m):m}dx = dz \text{ (§. 54 } part. \text{ 1)}$$

h. c. $-\frac{ndx}{m\sqrt[m]{x^{n+m}}} = dz$ (§. 14).

En in omnibus casibus easdem formulas, quas superius elicuimus (§. 14, 15.)

SCHOLION.

18. *Me non monente clarum esse arbitror, formulas in Problemate repertas subire vicem regularum, juxta quas in casibus similibus instituitur differentiatio.*

PROBLEMA III.

19. *Differentiare quantitates se mutuo dividentes* $x:y$.

RESOLUTIO.

I. Sit $x:y = v$

erit $x = vy$

$$dx = vdy + ydv \text{ (§. 12)}$$

$$dx - vdy = ydv$$

hoc est $dx - \frac{xdy}{y} = ydv$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = dv$$

seu $(ydx - xdy):y^2 = dv$

Regula 1. Differentiale divisoris ducatur in dividendum & contra differentiale dividendi in divisorem. 2. Factum prius ex posteriore auferatur. 3. Residuum per quadratum divisoris dividatur. Quotus est differentiale quantitatum se mutuo dividentium.

II. Si fuerit $xy:vz$ differentianda: ponatur $xy = t$ & $vz = w$; erit $xy:vz = t:w$. Sed $d(t:w) = (wdt - tdw):w^2$, *per cas.* 1. & $dt = xdy + ydx$, $dw = vdz + zdv$ (§. 12). Ergo $d(t:w) = d(xy:vz) = (vzxdy + vzydx - xyvdz - xyzdv):v^2z^2$. Patet adeo, regulam præcedentem huic quoque casui satisfacere.

CAPUT II.

De usu Calculi differentialis in tangentibus curvarum determinandis.

PROBLEMA IV.

20. I*Nvenire subtangentem in curva algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata pm alteri PM infinite propinqua, erit Pp differentiale abscissæ, & demissa perpendiculari MR $= Pp$ (§. 226 *Geom.*), Rm differentiale semiordinatæ. Ducatur tangens TM: arculus infinite exiguus Tab. I. *Fig.* 2.

Tab. I. Fig. 2. Mm non differet a linea recta, adeoque MmR triangulum rectilineum rectangulum: quod *Triangulum curvæ characteristicum* appellari solet, quia lineæ curvæ per illud a se invicem distinguuntur. Ob parallelismum rectarum PM & pm (§. 370 *part.* 1), angulus MmR = TMP (§. 233 *Geom.*). Quare △ MmR ∽ △ TMP (§. 267 *Geom.*). Sit itaque $AP = x$, $PM = y$: erit $Pp = MR = dx$ & $Rm = dy$ (§. 8), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$Rm : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Quodsi, ex æquatione curvæ cujuscunque data, in expressione subtangentis PT generali $ydx : dy$ valor ipsius dx substituatur: quantitates differentiales evanescunt, proditque valor subtangentis in quantitatibus communibus.

Tab. I. Fig. 4. Idem valor eruitur, si convexitas curvæ refertur ad axem AT.

COROLLARIUM I.

21. Pro Parabola *Apolloniana* est:

$$ax = y^2 \quad (\S. 388\ part. 1)$$

Hinc

$$adx = 2ydx \quad (\S. 12)$$

$$dx = 2ydy : a$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : ady = 2y^2 : a = 2ax : a = 2x$: prorsus ut supra (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

22. Pro infinitis Parabolis (§. 519 *part.* 1.)

$$a^{m-1}x = y^m$$

$$a^{m-1}dx = my^{m-1}dy \quad (\S. 12)$$

$$dx = my^{m-1}dy : a^{m-1}$$

$PT = ydx : dy = my^m dy : a^{m-1} dy = my^m : a^{m-1} = ma^{m-1}x : a^{m-1} = mx$.

Ex. gr. Cum in Paraboloide cubicali $m = 3$: erit subtangens $= 3x$: cum in surdesolidali $m = 5$; erit subtangens $= 5x$.

COROLLARIUM III.

23. Pro Circulo est (§. 377 *part.* 1.)

$$ax - xx = yy$$

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a - 2x)$$

$PT = ydx : dy = 2y^2dy : (a - 2x)dy = 2y^2 : (a - 2x) = (2ax - 2xx) : (a - 2x) = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x)$, hoc est, PC : PB = AP : PT, consequenter PC. PT = AP. PB (§. 378 *Geom.*) = PM² (§. 377 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 3.

Ergo $AT = (ax - xx) : (\frac{1}{2}a - x) - x = (ax - xx - \frac{1}{2}ax + xx) : (\frac{1}{2}a - x) = \frac{1}{2}ax : (\frac{1}{2}a - x)$ hoc est, PC : PA = CA : AT.

COROLLARIUM IV.

24. Pro infinitis Circulis est (§. 524 *part.* 1.)

$$ax^m - x^{m+1} = y^{m+1}$$

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy$$

$$dx = \frac{(m+1)y^m dy}{max^{m-1} - (m+1)x^m}$$

$PT = ydx : dy = (m+1)y^{m+1} : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax^m - x^{m+1}) : (max^{m-1} - (m+1)x^m) = (m+1)(ax - x^2) : (ma - mx - x)$, & $AT = (m+1)(ax - x^2) : (ma - (m+1)x) - x = (max + ax - mx^2 - x^2 - max + mx^2 + x^2) : (ma - (m+1)x) = ax : (ma - (m+1)x)$. Cum itaque in Circulo secundi generis $m = 2$; erit $AT = ax : (2a - 3x)$, & $PT = (2ax - 3x^2) : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM V.

25. Pro Ellipsi *Apolloniana* est (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

Hinc

Tab. I. *Fig.* 3.

Hinc $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$2aydy : (ab - 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab - 2bx) = 2abx - 2bx^2) : (ab - 2bx) = (2ax - 2x^2) : (a - 2x)$, prorſus ut ſupra (§. 440 *part.* 1).

COROLLARIUM VI.

26. Pro infinitis Ellipſibus eſt (§. 522 *part.* 1)

$$ay^{m+n} = bx^m (a-x)^n$$

$$(m+n) ay^{m+n-1} dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx$$

$$dx = \frac{(m+n)\, ay^{m+n-1}\, dy}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{(m+n)\, ay^{m+n}}{mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}}$$

$= (m+n)\, bx^m (a-x)^n : (mbx^{m-1}(a-x)^n - nbx^m (a-x)^{n-1}) =$ [diviſione per $bx^{m-1}(a-x)^{n-1}$ facta] $(m+n)(ax-x^2) : (ma - mx - nx)$, & hinc

$AT = (max - mxx + nax - nxx) : (ma - mx - nx) - x = (max - mx^2 + nax - nx^2 - max + mx^2 + nx^2) : (ma - mx - nx) = nax : (ma - (m+n)x)$.

Cum adeo in Elliptoide cubicali ſit $m = 2$, $n = 1$; erit $PT = (3ax - 3x^2) : (2a - 3x)$ & $AT = ax : (2a - 3x)$.

COROLLARIUM VII.

27. Pro Hyperbola *Apolloniana* eſt (§. 459 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx + bxx$$

$$2aydy = abdx + 2bxdx$$

$$2aydy : (ab + 2bx) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2ay^2 : (ab + 2bx) = (2abx + 2bxx) : (ab + 2bx) = (2ax + 2xx) : (a + 2x)$ prorſus ut ſupra (§. 491 *part.* 1.)

COROLLARIUM VIII.

28. Pro infinitis Hyperbolis, cum ſit $ay^{m+n} = bx^m (a+x)^n$ (§. 525 *part.* 1.): reperietur, ut ante pro infinitis Ellipſibus, $PT = (m+n)(ax + x^2) : (ma + (m+n)x)$ & $AT = nax : (ma + (m+n)x)$.

COROLLARIUM IX.

29. Pro Hyperbola intra aſymptotos eſt (§. 502 *part.* 1.)

$$xy = aa$$

$$xdy + ydx = 0$$

$$ydx = -xdy$$

$PT = ydx : dy = -xdy : dy = -x$

Quoniam valor ſubtangentis eſt negativus, id indicio eſt, ſubtangentem PT eſſe ſumendam in oppoſitum originis abſciſſæ AP. Differentiale enim ipſius xy eſſe debebat $ydx - xdy$, quia y decreſcit (§. 12). Tab. I. *Fig.* 4.

COROLLARIUM X.

30. Pro infinitis Hyperbolis intra aſymptotos, eſt

$$a^{m+n} = x^n y^m$$

$$0 = nx^{n-1} y^m dx + mx^n y^{m-1} dy$$

$$-mx^n y^{m-1} dy = nx^{n-1} y^m dx$$

$$-mxdy : ny = dx$$

$PT = ydx : dy = -mxydy : nydy = -\frac{mx}{n}$.

COROLLARIUM XI.

31. Pro Ciſſoide DIOCLIS eſt (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (a - x^3)$$

$$2ydy = (3ax^2 dx - 3x^3 dx + x^3 dx) : (a-x)^2$$

$$2y(a-x)^2 dy : (3ax^2 - 2x^3) = dx$$

$PT = ydx : dy = 2y^2 (a-x)^2 : (3ax^2 - 2x^3) = 2x^3 (a-x) : (3ax^2 - 2x^3) = 2(ax - xx) : (3a - 2x)$.

Habemus itaque:

$$3a - 2x : a - x = 2x : PT$$

ſive $\frac{3}{2}a - x : a - x = x : PT$ Tab. VI.

h. e. $PB + GB : PB = AP : PT$. *Algeb.* *Fig.* 63.

COROL-

COROLLARIUM XII.

Tab. I. Fig. 2. 32. Denique pro omnibus curvis algebraicis est (§. 385 *part.* 1.)

$$ay^m + bx^n + cy^r x^s + f = 0$$

$$may^{m-1}dy + nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx + rcy^{r-1}x^s dy = 0$$

$$nbx^{n-1}dx + scy^r x^{s-1}dx = -may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy$$

$$dx = \frac{-may^{m-1}dy - rcy^{r-1}x^s dy}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

$$PT = \frac{ydx}{dy} = \frac{-may^m - rcy^r x^s}{nbx^{n-1} + scy^r x^{s-1}}$$

Sit ex. gr. $y^2 - ax = 0$, erit comparatione cum formula generali facta,

$ay^m = y^2$	$bx^n = -ax$
$a = 1 \quad m = 2$	$b = -a \quad n = 1$
$cy^r x^s = 0$	$f = 0.$
$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$	

His valoribus in formula subtangentis generalissima substitutis, prodit subtangens Parabolæ primi generis $(-2.1.y^2 - 0.0y^0 x^0) : (1.-ax^{1-1} + 0.\ 0y^0 x^{0-1}) = -2y^2 : -a = 2y^2 : a$, ut supra (§. 21).

Similiter fit pro circulo $y^2 - ax + x^2 = 0$; erit

$ay^m = y^2$	$bx^n = -ax$
$a = 1 \quad m = 2$	$b = -a \quad n = 1$
$bx^n = x^2$	$cy^r x^s = 0$
$b = 1 \quad n = 2$	$c = 0 \quad r = 0 \quad s = 0$

$$PT = \frac{-2.1.y^2}{1.-ax^0 + 2.1x} = \frac{-2y^2}{-a + 2x} = \frac{2y^2}{a - 2x}$$

ut supra (§. 23).

Sit $y^3 - x^3 - axy = 0$, erit

$ay^m = y^3$	$bx^n = -x^3$
$a = 1 \quad m = 3$	$b = -1 \quad n = 3$
$cy^r x^s = -axy$	$f = 0$
$c = -a \quad r = 1 \quad s = 1$	

His valoribus in formula subtangentis generali substitutis, prodit subtangens curvæ, ad quam est æquatio data $PT = (-3.1y^3 - 1. -ayx) : (3. -1x^2 + 1. -ayx^0) = (-3y^3 + ayx) : (-3x^2 - ay) = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay)$; consequenter $AT = (3y^3 - axy) : (3x^2 + ay) - x = (3y^3 - axy - 3x^3 - axy) : (3x^2 + ay) = (3axy - 2axy) : (3x^2 + ay)$, [substituto nempe ex æquatione ad curvam ipsius $y^3 - x^3$ valore axy] hoc est, $axy : (3x^2 + ay)$. Tab. I. Fig. 2.

SCHOLION.

33. *In applicatione formulæ generalis, bx^n & $cy^r x^s$ totidem terminis sigillatim comparantur, quot in dato casu speciali eisdem respondent, singulique valores simul in formula subtangentis substituuntur, propterea quod bx^n repræsentat omnes terminos, in quibus sola indeterminata x occurrit, & $cy^r x^s$ omnes terminos, in quibus utraque indeterminata x & y locum habet* (§. 385 part. 1.)

COROLLARIUM XIII.

34. Quia $PT = ydx : dy$, $PM = y$; erit (§. 417 *Geom.*) $TM = \sqrt{(y^2 dx^2 : dy^2 + y^2)} = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy$.

PROBLEMA V.

35. *Determinare subnormalem* PH *in linea algebraica quacunque.*

RESOLUTIO.

Sit $PM = y$, $AP = x$, erit $TP = ydx : dy$ (§. 20), & $TP : PM = PM : PH$ (§. 409 *part.* 1.)

hoc est, $\frac{ydx}{dy} : y = y : \frac{ydy}{dx}$

Quodsi, ut in Problemate præcedente, in expressione subnormalis PH generali valor ipsius dy substituatur, differentiales quantitates evanescunt, & valor subnormalis in quantitatibus ordinariis prodit.

Co-

COROLLARIUM I.

Tab. I. *Fig.* 2. 36. In Parabola *Apolloniana* $dy = adx : 2y$, (§. 21). Ergo $PH = ydy : dx = aydx : 2ydx = \frac{1}{2}a$, ut supra reperimus (§. 410 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

37. In infinitis Parabolis $dy = a^{m-1} dx : my^{m-1}$ (§. 22). Itaque $PH = ydy : dx = a^{m-1} y : my^{m-1} = a^{m-1} y^2 : my^m$ (§. 54 *part.* 1.) $= a^{m-1} y^2 : ma^{m-1} x$ (§. 519 *part.* 1.) $= y^2 : mx$, ut adeo sit $mx : y = y : PH$.

COROLLARIUM III.

Tab. I. *Fig.* 3. 38. In Circulo $adx - 2xdx = 2ydy$ (§. 23), hoc est, $\frac{1}{2}a - x = ydy : dx = PC$. Apparet adeo, in Circulo omnes ad peripheriam normales in centro concurrere; consequenter tangentem TM radio CM ad angulos rectos insistere.

COROLLARIUM IV.

39. In infinitis Circulis $(max^{m-1} dx - (m+1) x^m dx : (m+1) y^m = dy$. Unde subnormalis PH $[ydy : dx] = (max^{m-1} y - (m+1) x^m y) : (m+1) y^m = (max^{m-1} y^2 - (m+1) x^m y^2) : (m+1) y^{m+1} = (max^{m-1} y^2 - (m+1) x^m y^2) : (m+1)(ax^m - x^{m+1}) = (may^2 - (m+1) xy^2) : (m+1)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+1} a - x : PH$.

COROLLARIUM V.

Tab. I. *Fig.* 2. 40. In infinitis Ellipsibus $dy = (mbx^{m-1} (a-x)^n dx - nbx^m (a-x)^{n-1} dx) : (m+n) ay^{m+n-1}$ (§. 26). Unde $PH = ydy : dx = (mbx^{m-1} (a-x)^n y - nbx^m (a-x)^{n-1} y) : (m+n) ay^{m+n-1} = (mbx^{m-1} (a-x)^n y^2 - nbx^m (a-x)^{n-1} y^2) : (m+n) ay^{m+n}$ sive $: (m+n) bx^m (a-x)^n = (my^2 (a-x) - nxy^2) : (m+n)(ax - x^2)$. Est itaque $ax - x^2 : y^2 = \frac{m}{m+n} a - x : PH$.

COROLLARIUM VI.

41. Eodem modo (§. 28) pro infinitis Hyperbolis reperitur $PH = (my^2 (a+x) + nxy^2) : (m+n)(ax + x^2)$. Est itaque $ax + xx : yy = \frac{m}{m+n} a + x : PH$.

COROLLARIUM VII.

42. Pro Hyperbola intra asymptotos (§. 29) $dy = -ydx : x$. Unde $PH = ydy : dx = -y^2 : x$. Tab. I. *Fig.* 4. Valor negativus indicio est, subnormalem PH cadere versus sinistram. Quia $xy = a^2$, adeoque $y = a^2 : x$, & $y^2 = a^4 : x^2$, erit $PH = a^2 y : x^2$, vel $a^4 : x^3$, consequenter $x^2 : a^2 = y : PH$ & $x^3 : a^3 = a : PH$, hoc est, semiordinata habet ad subnormalem rationem duplicatam, & ad latus potentiæ Hyperbolæ rationem triplicatam abscissæ ad latus potentiæ Hyperbolæ.

COROLLARIUM VIII.

43. In Cissoide DIOCLIS, $2ydy = (3ax^2 dx - 2x^3 dx) : (a-x)^2$ (§. 31). Igitur subnormalis $ydy : dx = (3ax^2 - 2x^3) : 2(a-x)^2$. Est adeo $(a-x)^2 : x^2 = \frac{3}{2}a - x : PH$.

COROLLARIUM IX.

44. Quia $PH = ydy : dx$ (§. 35), & $PM = y$; erit $MH = \surd(y^2 dy^2 : dx^2 + y^2) = y \surd(dy^2 + dx^2) : dx$. Tab. I. *Fig.* 2.

SCHOLION.

45. *Equidem data per Problema præcedens subtangente, subnormalis reperitur facillime absque calculo differentiali* (§. 409) : *quoniam tamen subinde subnormalis inveniri debet, data tantummodo æquatione ad curvam; ideo in Problemate præsente docendum erat, quomodo independenter a subtangente ex æquatione eruenda.*

PROBLEMA VI.

46. *Determinare curvarum algebraicarum asymptotos.*

RESOLUTIO.

1. Quoniam asymptotus CD cum curva non concurrit, nisi intervallo infinito emenso; haberi potest pro tangente in puncto, cui abscissa infinita respondet. Quantitates ergo constantes respectu variabilium x & y sunt infinite parvæ (§. 2). Quamobrem si ex valore Tab. I. *Fig.* 2.

Tab. I. *Fig.* 2. ipsius AT abjiciantur, quæ in nullam variabilem ducuntur; prodibit valor ipsius AC, per quem punctum C determinatur, ex quo asymptotus CD ducitur.

2. Quodsi idem fiat in æquatione pro curva, & facta differentiatione inveniatur ratio $dx : dy$; haud difficulter quoque eruitur valor ipsius AE: est enim in illo casu △ MRm ∽ △ CAE. Quod ut clarius intelligatur, ponamus abscissam AP esse infinitam, adeoque TM asymptotum; evidens est △ MRm ∽ △ TPM (§. 20). Sed △ TPM ∽ △ TAG (§. 268 *Geom.*). Ergo △ TAG ∽ △ MRm, consequenter MR : Rm = TA : AG (§. 267 *Geom.*). Surrogetur jam in locum △ TAG alterum CAE; erit MR : Rm = CA : AE, hoc est, $dx : dy$ = CA : AE.

Corollarium I.

47. In Hyperbola *Apolloniana*, AT $= ax : (a + 2x)$ (§. 491 *part.* 1). Ergo in casu asymptotico degenerat in $ax : 2x = \frac{1}{2}a$ = AC, prorsus ut supra habetur (§. 474 *part.* 1). Porro ad Hyperbolam *Apollonianam*

$$ay^2 = bx\,(a + x)$$

hoc est, in nostro casu, ob a infinitesimam,

$$ay^2 = bxx$$

consequenter $y\sqrt{a} = x\sqrt{b}$

$$dy\sqrt{a} = dx\sqrt{b}$$

$$dx : dy = \sqrt{a} : \sqrt{b}$$

adeoque ob $dx : dy$ = CA : AE (§. 46)

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

Unde habetur AE $= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b} : \sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, denuo ut supra (§. 474 *part.* 1.).

Idem etiam adhuc aliter invenitur. In casu infiniti, seu asymptotico, TP = CP $= \frac{1}{2}a + x = x$, ob $\frac{1}{2}a = 0$, quia $x = \infty$. Porro, ob similitudinem △△ TPM & CAE, est Tab. I. *Fig.* 2.

$$\text{TP} : \text{PM} = \text{CA} : \text{AE}$$

$$x : \frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$1 : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \tfrac{1}{2}a : \text{AE}$$

$$\text{AE} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{b} : \sqrt{a} = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

Corollarium II.

48. Pro infinitis Hyperbolis, est AT $= nax : (ma + mx + nx)$ (§. 28) adeoque in casu asymptotico, in quo $x = \infty$, AC $= nax : (mx + nx) = na : (m + n)$ (§. 46). Quoniam porro (§. 525 *part.* 1.)

$$ay^{m+n} = bx^m (a + x)^n$$

erit $ay^{m+n} = bx^{m+n}$ (§. 46),

hoc est, si fiat brevitatis gratia $m + n = r$,

$$ay^r = bx^r$$

$$a^{1:r}y = b^{1:r}x$$

$$a^{1:r}dy = b^{1:r}dx$$

$$dx : dy = a^{1:r} : b^{1:r} = \text{CA} : \text{AE}$$

Unde ob CA $= na : r$, reperitur AE $= \frac{na\sqrt[r]{b}}{r\sqrt[r]{a}} = \frac{n}{r}\sqrt[r]{a^{r-1}b}$.

Problema VII.

49. *Determinare subtangentem & subnormalem in Conchoide.*

Quoniam Conchois est curva algebraica (§. 377, 538 *part.* 1); subtangens ejus inveniri potest *per Probl.* 4, & subnormalis *per Probl.* 5 (§. 20 & 35). Enim vero quia, ob æquationem ejus admodum prolixam, expressio utraque non satis concinna prodit; ideo consultius judicamus alia methodo utramque investigari, qua & in casibus aliis similibus commode utendum.

Sit

Tab. I. Fig. 5. Sit nempe $AP = x$, $PM = y$. Intelligatur pm ipsi PM infinite propinqua: erit $Pp = MR = dx$, & $Rm = dy$, unde $PT = ydx : dy$, ut supra (§. 20). Sit porro $AB = QM$ (§. 535 *part.* 1.) $= a$, $CM = z$, $BC = b$; erit $PB = a - x$, $PC = a + b - x$. Ut valor ipsius dx ex natura curvæ inveniatur; fiat:

$$a - x = v \qquad a + b - z = t$$

$$\text{erit } -dx = dv \qquad -dx = dt$$

Porro (§. 268 *Geom.*)

$$PB : MQ = PC : MC$$

$$v : a = t : z$$

$$at = zv$$

$$adt = zdv + vdz$$

Denique (§. 417 *Geom.*) $CM^2 = PC^2 + PM^2$, hoc est,

$$z^2 = t^2 + y^2$$

$$2zdz = 2tdt + 2ydy$$

$$zdz = tdt + ydy$$

Substituantur ex æquationibus duabus prioribus valores ipsorum differentialium dt & dv in duabus posterioribus: prodibit

$$-adx = -zdx + vdz \qquad zdz = -tdx + ydy$$

$$zdx - adx = vdz \qquad dz = \frac{-tdx + ydy}{z}$$

$$\frac{zdx - adx}{v} = dz$$

Quamobrem

$$\frac{zdx - adx}{v} = \frac{ydy - tdx}{z}$$

$$z^2dx - azdx = vydy - vtdx$$

$$z^2dx - azdx + vtdx = vydy$$

$$dx = \frac{vydy}{z^2 - az + vt}$$

Hinc $PT = ydx : dy = vy^2 : (z^2 - az + vt) = v(z^2 - t^2) : (z^2 - az + tv)$, ob $y^2 = z^2 - t^2$, & subnormalis $ydy : dx$ habetur $= (z^2 - az + vt) : v = t + (z^2 - az) : v$. Tab. I. Fig. 5.

Aliter.

Sit TC secans regulam in I perpendicularis ad MC & mc ipsi CM infinite propinqua. TM tangat Conchoidem in M. Radio CQ describatur arcus Qt & radio CM arcus Mr. Sit $QM = a$, $CQ = x$, $CM = y$; erit $tS = dx$, $mr = dy$. Quoniam in $\triangle QtS$ angulus t rectus est (§. 38), & QCI itidem rectus (§. 78 *Geom.*), & ob angulum infinite parvum $QCS = 0$ (§. 3), angulus $IQC = QSt$ (§. 239 *Geom.*), erit $\triangle QtS \backsim \triangle QIC$, (§. 267 *Geom.*), adeoque Tab. IV. Fig. 43.

$$CQ : CI = tS : Qt$$

$$x : b = dx : \frac{bdx}{x}$$

Quoniam Qt & Mr sunt arcus concentrici intra crura ejusdem anguli descripti, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CQ : Qt = CM : Mr$$

$$x : \frac{bdx}{x} = y : \frac{bydx}{x^2}$$

Denique cum eodem, quo supra, modo ostendatur, esse $\triangle Mrm \backsim \triangle MCT$, erit

$$mr : Mr = MC : CT$$

$$dy : \frac{bydx}{x^2} = y : \frac{by^2dx}{x^2dy}$$

Ex natura Conchoidis (§. 535 *part.* I)

$$y = x + a$$

$$\text{adeoque } dy = dx$$

$$\text{Ergo } CT = \frac{by^2dx}{x^2dy} = \frac{by^2}{x^2}$$

 Duca-

Tab. IV. Fig. 43. Ducatur itaque GM parallela regulæ IQ; erit (§. 268 *Geom.*).

$$CQ : CM = CI : CG$$
$$x : y = b : \frac{by}{x}$$

Quare si porro TM ducatur parallela ipsi GQ; erit (§. *cit.*)

$$CQ : CG = CM : CT$$
$$x : \frac{by}{x} = y : \frac{by^2}{x^2}$$

adeoque CT subtangens, consequenter TM tangens quæsita.

PROBLEMA VIII.

Tab. I. Fig. 6. 50. *Determinare subtangentem in Spirali* Archimedea, *& infinitis Spiralibus aliis.*

Sit semidiameter circuli AB $= a$, peripheria $= b$, arcus BD $= x$, AG $= y$. Intelligatur radius AC alteri AD infinite propinquus, & ducatur radio AG arculus EG; erit CD $= dx$, & EF $= dy$ & (§. 138, 412 *Geom.*)

$$AD : AG = DC : GE$$
$$a : y = dx : \frac{ydx}{a}$$

Quoniam EG ad AE perpendicularis (§. 38); ducatur HA ad AG normalis; quæ est subtangens Spiralis: erit EG parallela ipsi AH (§. 256 *Geom.*), adeoque cum sit FA = AE, sive AG, ob infinite parvam EF (§. 268 *Geom.*),

$$FE : EG = FA : AH$$
$$dy : \frac{ydx}{a} = y : \frac{y^2dx}{ady}$$

Jam pro Spirali *Archimedea* (§. 571 *part.* I)

$$ax = by$$
$$\overline{adx = bdy}$$

Hinc subtangens AH $= \frac{y^2dx}{ady} = by^2 : a^2 = zy : a.$ Tab. I. Fig. 6.

Pendet adeo determinatio subtangentis a quadratura Circuli, cum pro arcu x assumenda sit recta.

Pro infinitis Spiralibus est (§. 572 *part.* I.)

$$a^m x^n = b^n y^m$$
$$\overline{na^m x^{n-1} dx = mb^n y^{m-1} dy}$$
$$\overline{dx = mb^n y^{m-1} dy : na^m x^{n-1}}$$

AH $= y^2\, dx : ady = mb^n y^{m+1} : na^{m+1} x^{n-1} = ma^m x^n y : na^{m+1} x^{n-1} = mxy : na.$

COROLLARIUM.

51. Quodsi ponamus arcum BC esse ad FC ut est abscissa curvæ algebraicæ ad semiordinatam; erit BC $= x$, CD $= dx$, FC $= y$, & (ducto radio AF arculo FI) GI = FE $= dy$, atque (§. 138, 412. *Geom.*) ob AG = AF (§. 4)

$$AC : CD = AG : EG$$
$$a : dx = a - y : \frac{adx - ydx}{a}$$
$$dy : \frac{adx - ydx}{a} = a - y : \frac{(a-y)^2 dx}{ady}$$

Quodsi ergo ex æquatione curvæ algebraicæ, quæ exprimit relationem BC ad FC, substituatur in expressione subtangentis AH valor ipsius dx, prodibit subtangens quæsita. Sit. ex. gr. relatio arcus BC ad rectam FC contenta æquatione

$$bx = y^2$$
erit $$\overline{bdx = 2ydy}$$

unde AH $= (a-y)^2\, dx : ady = 2y\,(a-y)^2 : ab.$

PROBLEMA IX.

52: *Determinare subtangentem* PT *in Cycloide.* Tab. I. Fig. 7.

Sit

Tab.I. Fig.7. Sit APB circulus genitor Cycloidis AMC, KP tangens circuli. Ducatur TM, quæ Cycloidem in M tangat; erit TP subtangens. Rectæ QM per utrumque contactus punctum P & M transeunti intelligatur ipsa *qm* parallela & infinite propinqua; demittantur perpendiculares PO & MS: agatur denique MR ipsi PT parallela. Erit MS=PO (§.226 *Geom.*) & MR=P*p*, quia arculus P*p* infinite exiguus, habetur pro parte rectæ *p*T, (§.257 *Geom*). Sit jam AP $=x$, PM $=y$; erit P*p* = MR = dx, *m*R = dy. Ob parallelas MP & *m*R, *per constrụct.* angulus M*m*R = TMP, & ob parallelas MR & TP, *itidem per constr.* *m*RM = *mp*T = MPT (§ 233 *Geom.*); consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : RM = MP : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Est vero in Cycloide $y = x$ (§. 575 *part.* I); consequenter $dy = dx$, & hinc $ydx : dy$ seu PT $= y$. Ducta igitur recta PT, quæ circulum tangit in P, facillime quoque ducitur TM, quæ Cycloidem in puncto respondente M tangit.

C O R O L L A R I U M.

53. Si APB fuerit linea algebraica alia, cujus arcus AP fiet abscissæ transcendentis AMC, eodem modo determinatur subtangens; cum in omni casu reperiatur PT = $ydx : dy$. Ponamus ex. gr.

$$bx = ay$$

erit

$$bdx = ady$$

$$dx = ady : b$$

PT = $ydx : dy = aydy : bdy = ay : b$.

P R O B L E M A X.

54. *Determinare subtangentem* PT *in Logistica.*

Tab.I. Fig.8. Sit AP $= x$, PM $= y$, *pm* ipsi PM parallela; erit MR = P*p* = dx & R*m* = dy, & vi eorum, quæ in Problemate 4 (§. 20) demonstrata sunt,

$$mR : RM = PM : PT$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Sit abscissa alia ipsa AP major vel minor $= v$, & semiordinata eidem respondens $= z$; erit subtangens $= zdv : dz$. Quoniam, ex natura Logisticæ, abscissæ in progressione arithmetica progrediuntur (§. 552 *part.* I.) erit $dx = dv$. Quoniam vero semiordinatæ progrediuntur in geometrica (§. *cit.*); erit

$$y : y + dy = z : z + dz$$

$$y : dy = z : dz \text{ (§. 193 } Arithm.\text{)}$$

$$dx = dv$$

$$ydx : dy = zdv : dz$$

Theorema. In Logistica omnes subtangentes sunt inter se æquales, seu subtangens PT est constans.

P R O B L E M A XI.

55. *Determinare subtangentem* MH *in Quadratrice* DINOSTRATIS. Tab.I. Fig.9.

Per punctum datum M ducatur radius CN, sitque TM tangens, MK ad CM & TK ad MK perpendicularis, C*n* ipsi CN, & *pm* ipsi PM infinite propinqua; AP $= y$, AN $= x$, CM $= p$, ANB $= a$, AC $= b$; erit MI $= b - y$, P*p* = MR $= dy$, N*n* $= dx$. Quoniam arcus infinite parvus, radio CM descriptus, coincidit cum recta MH, erit (§. 138, 412 *Geom.*)

$$CN : Nn = CM : MH$$

$$b : dx = p : \frac{pdx}{b}$$

Tab.I. Fig.9. Porro cum TK (*per hypoth.*) & CH (§.38) ſint ad MK perpendiculares; erit *m*H ipſi KT parallela (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MH : MK.$$

Similiter *m*R & TI, quia ad MI perpendiculares (*per hypoth.*), inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), adeoque (§. 268 *Geom.*)

$$Mm : MT = MR : MI$$

conſequenter (§. 167 *Arithm.*)

$$MR : MI = MH : MK$$

$$dy : b - y = \frac{pdx}{b} : \frac{pdx}{dy} - \frac{pydx}{bdy}$$

Eſt vero, ex natura Quadratricis (§. 565 *part.* 1.)

$$bx = ay$$

$$bx : a = y$$

Item, $dx = ady : b$

Subſtitutis ergo, in valore ipſius MK, pro dx & y valoribus modo inventis, prodit $MK = \frac{ap}{b} - \frac{abpx}{abb} = (ap - px) : b = (a - x) p : b =$ NB. MC : AC.

Eſt vero NB arcus radio NC deſcriptus; adeoque conſtructio a rectificatione arcus illius, ſeu a quadratura circuli pendet.

PROBLEMA XII.

Tab.I. Fig.2. 56. *Intra angulum* QTH *deſcribere curvam deſideratam algebraicam, quæ rectam* TQ *in dato puncto* M *tangat.*

RESOLUTIO.

Demittatur ex M ad TH perpendicularis PM, erit TP ſubtangens, PM ſemiordinata curvæ quæſitæ. Sit TP $= v$, PM $= y$, erit (§. 20)

$$TP : PM = MR : mR$$

$$v : y = dx : dy$$

$$vdy = ydx$$

Quare ſi ex æquatione curvæ determinatur valor ipſius dx vel dy, & in æquatione modo inventa ſubſtituatur; per communes Algebræ regulas determinantur tum abſciſſa x ſemiordinatæ PM datæ reſpondens, ut habeatur vertex curvæ A; tum lineæ rectæ, quibus datis curva datur. Quodſi vero contingat, aliquas ex his determinari non poſſe, id quidem indicio eſt, eam variis modis aſſumi poſſe, adeoque plures curvas ejuſdem ſpeciei ſatisfacere propoſito. Tab.I. Fig.2.

COROLLARIUM I.

57. Si curva AMO Parabola primi generis eſſe debet; erit (§. 388 *part.* 1.)

$$ax = y^2$$

$$adx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : a.$$

Quodſi hic valor in æquatione $vdy = ydx$ pro dx ſubſtituatur; habebimus

$$vdy = 2y^2 dy : a$$

$$av = 2y^2 \text{ ſeu } a = 2y^2 : v.$$

Porro ex æquatione ad Parabolam $a = y^2 : x$ Quare

$$2y^2 : v = y^2 : x$$

$$y^2$$

$$2 : v = 1 : x$$

$$2x = v$$

$$x = \tfrac{1}{2} v$$

Diviſa nempe TP bifariam in A, habetur vertex Parabolæ A, ut jam ex ſuperioribus (§. 21) conſtat. Parametro itaque $2y^2 : v$ circa axem AH Parabola deſcribenda (§. 401 *part.* 1.)

COROLLARIUM II.

58. Si curva AMO Hyperbola æquilatera: erit (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$

$$adx + 2xdx = 2ydy$$

$$dx = 2ydy : (a + 2x)$$

Quod-

Tab. I. Fig. 2. Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ pro dx substituatur valor modo inventus, prodibit

$$vdy = 2y^2\,dy : (a + 2x)$$

$$av + 2vx = 2y^2$$

$$av = 2y^2 - 2vx$$

$$a = 2y^2 : v - 2x$$

hoc est, si fiat $y^2 : v = m$

$$a = 2m - 2x$$

Porro, ex æquatione ad Hyperbolam æquilateram

$$ax + xx = y^2$$

$$a = yy : x - x$$

Unde $y^2 : x - x = 2m - 2x$

$$yy - xx = 2mx - 2xx$$

$$yy = 2mx - xx$$

seu $xx - 2mx = -yy$

$\qquad m^2 \qquad m^2$

$$x^2 - 2mx + m^2 = m^2 - yy$$

$$\left.\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right\} = \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

$$x = m \pm \sqrt{(m^2 - y^2)}$$

Dato itaque valore ipsius x, datur vertex Hyperbolæ æquilateræ, datur etiam parameter $a = 2m - 2x$; consequenter Hyperbola describi potest (§. 472 *part.* 1.)

COROLLARIUM III.

59. Quoniam pro Circulo $ax - x^2 = y^2$, eodem, quo ante, modo reperitur $a = 2y^2 : v + 2x$ seu, si fiat $y^2 : v = m$, $a = 2m + 2x$, & $x = \sqrt{(mm + yy)} - m$.

COROLLARIUM IV.

60. Si curva AMO Ellipsis primi generis; erit (§. 421 *part.* 1.) Tab. I. Fig. 2.

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$2ydy = bdx - 2bxdx : a$$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2ay$$

Quodsi in æquatione $vdy = ydx$ substituatur valor modo inventus, prodibit

$$abv - 2bvx = 2ay^2$$

$$b = 2ay^2 : (av - 2vx)$$

Ex natura curvæ est

$$b = ay^2 : (ax - xx)$$

Unde $\dfrac{2ay^2}{av - 2vx} = \dfrac{ay^2}{ax - xx}$

$$2ax - 2xx = av - 2vx$$

$$-\tfrac{1}{2}av = xx - ax - vx$$

Si fiat $a - v = 2m$

erit $m^2 - \frac{1}{2}av = xx - 2mx + mm$

$$\sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = \left\{\begin{matrix} x - m \\ m - x \end{matrix}\right.$$

$$m \pm \sqrt{(m^2 - \tfrac{1}{2}av)} = x$$

Quoniam ipsius a, seu axis transversi nullus valor erui potest; pro arbitrio assumi debet. Quodsi minor fuerit quam v; erit $x = m + \sqrt{(m^2 - \frac{1}{2}av)}$.

CAP. III.

CAPUT III.

De usu Calculi differentialis in Methodo de maximis & minimis.

DEFINITIO IV.

61. SI semiordinatæ alicujus curvæ usque ad certum terminum continuo crescunt vel decrescunt, quem prætergressæ denuo decrescunt vel crescunt; methodus, per quam determinatur earum maxima vel minima, dicitur *Methodus de maximis & minimis*.

SCHOLION.

62. Potest vero hæc methodus etiam ad determinandas quantitates alias, quæ ad certum aliquem terminum crescunt vel decrescunt, adhiberi. Sed repræsentandæ sunt per curvarum semiordinatas, ut Exempla inferius adducenda loquuntur.

PROBLEMA XIII.

Tab. I. Fig. 10. 11. 63. *Determinare maximam vel minimam aplicatam in curva algebraica.*

RESOLUTIO.

Quoniam in curvis maximum vel minimum habentibus tangens TM degenerat tandem in DE & axi parallela evadit, adeoque normalis MH coincidit cum maxima vel minima applicata CG; erit, in casu maximi vel minimi, subtangens TP infinita atque subnormalis PH nihilo æqualis. Est vero PH $= ydy : dx$. Quodsi ergo ponatur $ydy : dx = 0$; reperietur $dy = 0$ &, ob PT $= ydx : dy = \infty$, (quæ est nota infinitatis) $dx = \infty$.

Fieri potest, ut tangens HG in directum jaceat semiordinatæ GC: quo in casu subtangens PT nihilo æquatur & subnormalis PH fit infinita. Est vero PT $= ydx : dy = 0$ (§. 20), quare si ponatur $ydx : dy = 0$, habebimus $dx = 0$. Vel, ob PH $= ydy : dx = \infty$, reperitur $dy = \infty$. Sunt nimirum tam dx, quam y, intuitu dy infinitesimæ. Tab. I. Fig. 12.

Ex æquatione itaque curvæ quærendus est valor ipsius dy, & vel nihilo, vel infinito æquandus, ut habeatur valor abscissæ, cui maxima applicata coordinatur.

COROLLARIUM I.

64. Quoniam in Circulo (§. 377 *part. 1.*)

$$ax - xx = y^2$$

erit

$$adx - 2xdx = 2ydy$$

$$(adx - 2xdx) : 2y = dy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Nempe maxima semiordinata in Circulo erigitur ex centro, uti ex Elementis constat (§. 299 *Geom.*).

Quodsi porro valor ipsius x in æquatione $ax - xx = y^2$ substituatur; prodibit $\frac{1}{2}aa - \frac{1}{4}aa = yy$, hoc est, $\frac{1}{4}aa = yy$. Unde $\frac{1}{2}a = y$: id quod denuo ex Elementis manifestum est.

Quodsi ponamus $2ydy : (a - 2x) = dx = \infty$: erit $a - 2x$ respectu numeratoris $2ydy$ infinite parva, adeoque (§. 3) $a - 2x = 0$, ut ante.

COROL-

COROLLARIUM II.

65. Pro infinitis circulis (§. 24)

$$max^{m-1}dx - (m+1)x^m dx = (m+1)y^m dy = 0$$

$$max^{m-1} = (m+1)x^m$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \quad (m+1)x^{m-1}$$

$$ma : (m+1) = x.$$

Ex. gr. Sit $m = 3$, ſeu æquatio ad circulum tertii generis $y^4 = ax^3 - x^4$; erit $x = \frac{3}{4}a$; conſequenter $y^4 = \frac{27}{64}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{108}{256}a^4 - \frac{81}{256}a^4 = \frac{27}{256}a^4$. Unde $y = \frac{1}{4}a\sqrt[4]{27}$.

COROLLARIUM III.

66. Pro Ellipſibus infinitis (§. 26)

$$(m+n)ay^{m+n-1}dy = mbx^{m-1}(a-x)^n dx - nbx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mbx^{m-1}(a-x)^n = nbx^m(a-x)^{n-1}$$

$$ma - mx = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma : (m+n) = x.$$

Sit ex. gr. Ellipſis primi generis; erit $m = 1$ & $n = 1$, adeoque $x = \frac{1}{2}a$, & ob $y^2 = bx - bxx : a$ (§. 421 *part.* 1.), $y^2 = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}ab$. Unde $y = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$.

COROLLARIUM IV.

67. Si $x^3 + y^3 = axy$

erit $3x^2dx + 3y^2dy = axdy + aydx$

$$3x^2dx - aydx = axdy - 3y^2dy = 0$$

$$3x^2 = ay$$

$$3x^2 : a = y$$

$$27x^6 : a^3 = y^3$$

$$x^3 + 27x^6 : a^3 = 3x^3$$

$$27x^6 = 2a^3x^3$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \quad x^3$$

$$27x^3 = 2a^3$$

$$3x = a\sqrt[3]{2}$$

$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

Porro

$$y = 3x^2 : a = \frac{3}{9}a\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$$

COROLLARIUM V.

68. Sit $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3}$

erit $dy = -2a^{1:3}dx : 3(a - x)^{1:3}$

Quodſi hic valor ipſius dy ponatur nihilo æqualis; erit $-2a^{1:3} = 0$. Quamobrem cum nullus valor ipſius x inde eruatur; ponatur

$$-2a^{1:3} : 3(a - x)^{1:3} = \infty$$

erit, ob denominatorem reſpectu numeratoris infinite parvum (§. 3),

$$3(a - x)^{1:3} = 0$$

$$a - x = 0$$

$$a = x$$

Unde $y - a = a^{1:3}(a - x)^{2:3} = a^{1:3}$. $0 = 0$

adeoque $y - a = 0$

$$y = a.$$

COROLLARIUM VI.

69. Sit $y^5 = a^2x^3 - x^5 + b^2c^2x$

erit $5y^4dy = 3a^2x^2dx - 5x^4dx + b^2c^2dx = 0$

$$3a^2x^2 - 5x^4 + b^2c^2 = 0$$

$$5x^4 - 3a^2x^2 = b^2c^2$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 = \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\frac{9}{100}a^4 \qquad \frac{9}{100}a^4$$

$$x^4 - \frac{3}{5}a^2x^2 + \frac{9}{100}a^4 = \frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2$$

$$\left.\begin{matrix} x^2 - \frac{3}{10}a^2 \\ \frac{3}{10}a^2 - x^2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\left(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x^2 = \frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{9}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{10}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{2}{100}a^4 + \frac{1}{5}b^2c^2\right)}\right)}$$

Fiat $x = m$

erit $y^5 = a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m$

$$y = \sqrt[5]{(a^2m^3 - m^5 + b^2c^2m)}$$

COROLLARIUM VII.

70. Sit $b^2x^2 + a^4 = cxy^2 + x^3y$

erit $2b^2xdx = 2cxydy + cy^2dx + 3x^2ydx + x^3dy$

$$2b^2xdx - cy^2dx - 3x^2ydx = 2cxydy + x^3dy = 0$$

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x = cy^2 + 3x^2y$$

$$2b^2x^2 = cxy^2 + 3x^3y$$

$$b^2x^2 = cxy^2 + x^3y - a^4$$

$$b^2x^2 = 2x^3y + a^4$$

$$b^2x^2 - a^4 = 2x^3y$$

$$\frac{b^2x^2 - a^4}{2x^3} = y$$

$$\frac{b^4x^4 - 2a^4b^2x^2 + a^8}{4x^6} = y^2$$

$$\frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} = cy^2$$

$$\frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 3x^2y$$

adeoque ob

$$2b^2x - cy^2 - 3x^2y = 0$$

$$2b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} - \frac{3b^2x^2 - 3a^4}{2x} = 0$$

h. e. $\frac{1}{2}b^2x - \frac{b^4cx^4 - 2a^4b^2cx^2 + a^8c}{4x^6} + \frac{3a^4}{2x} = 0$

$$2b^2x^7 + 6a^4x^5 - b^4cx^4 + 2a^4b^2cx^2 - a^8c = 0$$

$$x^7 + \frac{3a^4x^5}{b^2} - \frac{1}{2}b^2cx^4 + a^4cx^2 - \frac{a^8c}{2b^2} = 0$$

quæ eſt æquatio exprimens valorem ipſius x, ſeu abſciſſæ ſemiordinatæ maximæ reſpondentis.

PROBLEMA XIV.

71. *Ex dato puncto* R *in axe* AX *curvæ algebraicæ ducere ad perimetrum curvæ rectam* MR, *quæ ſit minima omnium ex eodem puncto* R *ducendarum.* Tab. I. Fig. 13.

RESOLUTIO.

Sit AP $= x$, PM $= y$, AR $= c$, erit PR $= c - x$, & ob PM^2 + PR^2 = MR^2 (§. 417 *Geom.*), MR$^2 = c^2 - 2cx + x^2 + y^2$. Concipiamus ergo curvam, cujus applicata ſit MR (§. 62), erit

$$c^2 - 2cx + x^2 + y^2 = z^2$$

$$-2cdx + 2xdx + 2ydy = 2zdz = 0$$

$$ydy + xdx - cdx = 0$$

Quodſi, ex æquatione ad curvam algebraicam data, pro ydy ſubſtituatur valor ejus; valorem ipſius x eruere licet.

COROLLARIUM I.

72. In Parabola (§. 21)

$$\tfrac{1}{2}adx = ydy$$

Ergo $\frac{1}{2}adx + xdx - cdx = 0$

$$x = c - \tfrac{1}{2}a \ \&\ \tfrac{1}{2}a = c - x$$

Hinc $ax = ac - \frac{1}{2}aa = y^2$, & $(c - x)^2 + y^2 = \frac{1}{4}aa + ac - \frac{1}{2}aa = ac - \frac{1}{4}aa = z^2$. Unde MR $= z = \sqrt{(ac - \frac{1}{4}aa)}$. Eſt adeo MR^2 : PM^2 = $ac - \frac{1}{4}aa : ac - \frac{1}{2}aa = c - \frac{1}{4}a : c - \frac{1}{2}a$.

Quia PR $= c - x = \frac{1}{2}a$, evidens eſt PR eſſe ſubnormalem (§. 36), conſequenter MR normalem, unde patet

Theorema. Perpendicularis ad Parabolam eſt minima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteſt.

Co-

Tab.I. Fig.13.

COROLLARIUM II.

73. In Hyperbola æquilatera (§. 507 *part.* 1.)

$$ax + xx = y^2$$
$$adx + 2xdx = 2ydy$$
$$\tfrac{1}{2}adx + xdx = ydy$$

Quare $\tfrac{1}{2}adx + xdx + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$2x = c - \tfrac{1}{2}a$$
$$x = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{4}a$$

five $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$

Quoniam fubnormalis reperitur $x + \tfrac{1}{2}a$ (§. 35), $PR = c - x = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{4}a$ eft denuo fubnormalis, confequenter &

Theorema. In Hyperbola æquilatera normalis eft breviffima omnium rectarum, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poffunt.

COROLLARIUM III.

74. In Ellipfi primi generis eft (§. 420 *part.* 1.)

$$ay^2 = abx - bx^2$$
$$2aydy = abdx - 2bxdx$$
$$ydy = (abdx - 2bxdx) : 2a$$

Quare $\tfrac{1}{2}bdx - bxdx : a + xdx - cdx = 0$

$$\tfrac{1}{2}b - c - bx : a + x = 0$$
$$x - \frac{bx}{a} = c - \tfrac{1}{2}b$$
$$ax - bx = ac - \tfrac{1}{2}ab$$
$$x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a - b)$$
$$c - x = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b).$$

Cum fubnormalis reperiatur $\tfrac{1}{2}b - bx : a$ (§. 35), erit $PR = c - x = \tfrac{1}{2}b - (bc - \tfrac{1}{2}bb) : (a - b) = (\tfrac{1}{2}ab - bc) : (a - b)$, ut adeo PR denuo fit fubnormalis; confequenter &

Theorema. In Ellipfi normalis fit linea recta breviffima, quæ ex dato in axe puncto ad eam duci poteft.

COROLLARIUM IV. Tab.I.

75. Eodem modo in Hyperbola fcalena Fig.13. reperitur $x = (ac - \tfrac{1}{2}ab) : (a + b)$.

COROLLARIUM V.

76. Quoniam $ydy + xdx - cdx = 0$ (§. 71)

$$ydy = cdx - xdx$$
$$\frac{ydy}{dx} = c - x = PR$$

Eft adeo PR fubnormalis (§. 35), atque adeo patet generale

Theorema: In omni curva perpendicularis eft linea recta breviffima, quæ ex dato puncto in axe ad eam duci poteft.

PROBLEMA XV.

77. *A puncto C extra curvam algebraicam dato ducere rectam CM, quæ fit minima omnium ex eodem puncto C ad curvam ducendarum.* Tab.I. Fig.14.

RESOLUTIO.

Ob punctum C datum, datur quoque perpendicularis ad axem CD, itemque AD. Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$; erit $MH = AP - AD = x - p$, & $CH = CD - PM = q - y$; confequenter $MC^2 = CH^2 + HM^2 = q^2 - 2qy + yy + x^2 - 2px + pp$. Cum adeo MC^2 fit minimum quoddam; erit ejus differentiale nihilo æquale (§. 63), hoc eft, $-2qdy + 2ydy + 2xdx - 2pdx = 0$

feu $(y - q)dy + (x - p)dx = 0$.

Reliqua peragenda funt ut in Problemate præcedente (§. 71).

COROLLARIUM I.

78. Si curua AMO fuerit Parabola primi generis; erit

$$ax = y^2$$
$$adx = 2ydy$$
$$dx = 2ydy : a$$

Unde

Unde $y - q + (x - p)\,2y : a = 0$

$$ay - aq + 2xy - 2py = 0$$

$$ay - aq + 2y^3 : a - 2py = 0$$

$$aay - aaq + 2y^3 - 2apy = 0$$

h. e. $y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}aaq = 0$
$\quad - apy$

Tab.I. Quodsi hæc æquatio ope Parabolæ datæ at-
*Fig.*14. que circuli construatur (§. 622 *part.* 1.); una eademque opera determinantur & AP & PM, & punctum M. Nimirum (*vi §. cit.*) fieri debet $AL = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$ & $IL = \frac{1}{4}q$, atque centro I per verticem Parabolæ A describendus est circulus, qui eam in puncto desiderato M secabit. Erit autem $AL = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$; si ex A in G transferatur $\frac{1}{2}a$ & DG bifariam secetur in L. Nam $AD = p$, adeoque $DG = \frac{1}{2}a - p$. Ergo $DL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter $AL = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p + p = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}p$. His factis $AP = x$, $PM = y$. Etenim ex natura Parabolæ $AP = y^2 : a$, adeoque $LP = IR = y^2 : a - \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}p$, consequenter $IR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2$. Porro $MR = y - \frac{1}{4}q$, adeoque $MR^2 = y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Habemus itaque (§. 417 *Geom.*) $MI^2 = IR^2 + MR^2 = y^4 : a^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{16}a^2 - py^2 : a + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + y^2 - \frac{1}{2}qy + \frac{1}{16}q^2$. Est vero $MI^2 = AI^2 = IL^2 + LA^2 = \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{4}ap + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{16}q^2$. Quare

$$\frac{y^4}{a^2} + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}qy = 0$$
$$- \frac{py^2}{a}$$

$$y^4 + \frac{1}{2}a^2 y^2 - \frac{1}{2}a^2 qy = 0$$
$$- apy^2$$

$$y^3 + \frac{1}{2}a^2 y - \frac{1}{2}a^2 q = 0$$
$$- apy$$

quæ est æquatio ad construendum proposita.

COROLLARIUM II. Tab.I. *Fig.*14.

79. Quoniam (§. 77)

$$(y - q)\,dy + (x - p)\,dx = 0$$

erit $(x - p)\,dx = (q - y)\,dy$

$$\frac{(x - p)y}{q - y} = \frac{ydy}{dx}$$

Jam porro (§. 268 *Geom.*)

CH : MH = CD : Dr

$q - y : x - p = q : \mathrm{D}r$

adeoque $\mathrm{D}r = \frac{qx - pq}{q - y}$; consequenter ob $DP = x - p$, $\mathrm{P}r = \frac{qx - pq}{q - y} - x + p = (qx - pq - qx + pq + xy - py) : (q - y) = (x - p)y : (q - y)$. Est adeo $\mathrm{P}r = ydy : dx$ subnormalis (§. 35). Patet adeo denuo generale *Theorema.* In omni curva AMO linea ad eam perpendicularis est brevissima omnium, quæ ex dato extra eam puncto C ad eam duci possunt.

SCHOLION.

80. *Ex allato exemplo liquet, si Problema non fuerit planum, consultius esse ut in expressione generali valor potius ipsius* dx, *quam* dy *substituatur. Nec absimili modo in curvis algebraicis determinatur punctum intra earum ambitum datum, a quo ad earum perimetros ducantur rectæ minimæ: quemadmodum ex sequente Problemate patet.*

PROBLEMA XVI.

81. *A puncto* C *intra curvam alge-* Tab.
braicam dato ducere rectam CM, *quæ* IV.
sit minima omnium ex eodem puncto C *Fig.*44.
ad curvam ducendarum.

Sit $AD = p$, $CD = q$, $AP = x$, $PM = y$, erit $HC = PD = p - x$ & $MH = y - q$, consequenter $MC^2 = MH^2 + HC^2$ (§. 417 *Geom.*) $= y^2 - 2qy + q^2 + p^2 - 2px + x^2$. Cum MC^2 sit minimum quoddam, ex hypothesi: erit ejus differentiale nihilo

æqua-

Tab. IV. Fig.44. æquale (§. 63), hoc eſt, $2ydy - 2qdy - 2pdx + 2xdx = 0$ ſeu $(y-q)\,dy - (p-x)\,dx = 0$. Reliqua peragenda ſunt ut in Problemate 14 (§. 71).

COROLLARIUM I.

82. Quoniam $(y-q)\,dy = (p-x)\,dx$

$$\text{erit } \frac{dy}{dx} = \frac{p-x}{y-q}$$

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{(p-x)\,y}{y-q} = \frac{HC.\,PM}{MH}$$

Quare cum ſit MH : HC = PM : PR (§. 268 *Geom.*); erit PR ſubnormalis (§. 35). Patet adeo denuo

Theorema. In omni curva AMO linea normalis eſt breviſſima, quæ a dato intra eam puncto C ad eam duci poteſt.

COROLLARIUM II.

83. Linea itaque ad curvam normalis eſt breviſſima omnium, quæ a dato quocunque in eodem plano puncto ad eam duci poteſt (§. 76, 79, 82).

PROBLEMA XVII.

Tab.II. Fig.15. 84. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut rectangulum ex* AD *&* DB *ſit maximum eorum, quæ hac ratione conſtrui poſſunt.*

Sit AB $= a$, AD $= x$, erit DB $= a - x$, conſequenter AD. DB $= ax - xx$ maximum aliquod, atque hinc (§. 63) ejus differentiale nihilo æquale: concipitur nempe eſſe ad circulum, ad quem

$$ax - xx = yy$$

$$\text{Quare } adx - 2xdx = 2ydy = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Linea igitur AB eſt ſecanda in duas partes æquales, eſtque quadratum omnium rectangulorum maximum, quorum altitudines & baſes junctim ſumtæ inter ſe æquantur.

PROBLEMA XVIII.

85. *Lineam rectam* AB *ita ſecare in* D, *ut* AD^m. DB^n *ſit maximum factorum ſimili modo formatorum.* Tab.II. Fig.15.

Sit denuo AB $= a$, AD $= x$, erit DB $= a - x$, conſequenter $AD^m.DB^n = x^m(a-x)^n$. Erit igitur x abſciſſa reſpondens ſemiordinatæ maximæ in infinitis circulis, ad quos $x^m(a-x)^n = y^{m+n}$ (§. 517 *part.* I), & hinc (§. 63)

$$mx^{m-1}(a-x)^n dx - nx^m(a-x)^{n-1}dx = 0$$

$$mx^{m-1}(a-x)^n = nx^m(a-x)^{n-1}$$

$$m(a-x) = nx$$

$$ma = mx + nx$$

$$ma:(m+n) = x$$

Sit ex. gr. $m = 2$, $n = 1$, erit $x = \frac{2}{3}a$, hoc eſt, ſi recta AD $= \frac{2}{3}a$ & BD $= \frac{1}{3}a$, atque BD ſumatur pro altitudine priſmatis, AD pro latere quadrati, quod eſt baſis ejuſdem; erit priſma omnium maximum eorum, quæ ex diviſione rectæ AB in duas partes formari poſſunt.

PROBLEMA XIX.

86. *Super recta* AB *tanquam hypothenuſa triangulum rectangulum maximum conſtruere.* Tab.II. Fig.16.

Sit AB $= a$, AC $= x$, erit (§. 417 *Geom.*) BC $= \sqrt{(aa-xx)}$, area (§. 392 *Geom.*) $= \frac{1}{2}$AC. CB $= \frac{1}{2}x\sqrt{(aa-xx)}$. Habemus adeo æquationem ad curvam tertii generis

$$x\sqrt{(aa-xx)} = 2y^2$$

$$\text{ſeu } aaxx - x^4 = 4y^4$$

Iii 3 Unde

Tab.II. *Fig.* 16. Unde $2a^2 x dx - 4x^3 dx = 16y^3 dy = 0$

$$2a^2 x = 4x^3$$

$$\qquad\qquad 4x$$

$$\tfrac{1}{2}a^2 = x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}a^2} = x$$

Patet adeo triangulum maximum esse æquicrurum. Nam si $AB^2 = aa$ & $AC^2 = \frac{1}{2}aa$, erit etiam $CB^2 = \frac{1}{2}aa$; consequenter $AC = CB$.

PROBLEMA XX.

Tab.II. *Fig.* 17. 87. *Inter omnes conos æquales determinare eum, qui minimam habet superficiem.*

Sit soliditas conorum æqualium a^3, ratio radii ad peripheriam $r:p$, radius coni $AC = x$; erit $r:p = x:\frac{px}{r}$. Hæc peripheria basis $px:r$ ducta in $\frac{1}{2}x$ dat basin coni $px^2:2r$ (§. 429 *Geom.*): per quam si dividatur a^3, habetur $\frac{1}{3}$ DC $= 2a^3r:px^2$ (§. 548 *Geom.*). Unde DC $= 6a^3r:px^2$, &

$$DC^2 = 36a^6 r^2 : p^2 x^4$$

$$AC^2 = \quad x^2$$

$$AD^2 = x^2 + 36a^6r^2 : p^2x^4 \text{ (§ 417 Geom.)}$$

$$AD = \sqrt{(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2)} : px^2$$

$\frac{1}{2}$ peripheria baf. $px:2r$

Superf. coni $\sqrt{(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2)} : 2rx$ (§. 548 *Geom.*)

Habemus itaque, vi methodi de maximis & minimis (§. 63),

$$(p^2 x^6 + 36 a^6 r^2) : 4r^2 x^2 = y^2$$

h. e. $p^2 x^4 : 4r^2 + 9a^6 : x^2 = y^2$

$$4p^2 x^3 dx : 4r^2 - 18a^6 x dx : x^4 = 2y dy = 0$$

$$p^2 x^3 dx : r^2 - 18a^6 dx : x^3 = 0$$

$$p^2 x^3 : r^2 = 18a^6 : x^3$$

Tab.II. *Fig.* 17.

$$p^2 x^6 = 18 a^6 r^2$$

$$px^3 = 3a^3 r\sqrt{2}$$

$$x^3 = 3a^3 r\sqrt{2} : p$$

$$x = a\sqrt[3]{(3r\sqrt{2}:p)}$$

Quoniam $px^3 = 3a^3 r\sqrt{2}$, erit $x^3 : a^3 = 3r\sqrt{2} : p$, consequenter evidens est

Theorema. Cubus radii coni inter æquales minimam superficiem habentis est ad ipsum conum in ratione composita radii ad peripheriam & $3\sqrt{2}$ ad 1.

PROBLEMA XXI.

88. *Sit* ADB *semicirculus & curva* AMD *ejus natura, ut sit* BP : PN = AP : PM; *determinare punctum* M, *in quo* MN *est maxima linea earum, quæ simili modo determinantur.* Tab. IV. *Fig.* 45.

Sit diameter semicirculi $AB = a$, $AP = x$; erit $PB = a - x$, & $PN = \sqrt{(ax - x^2)}$ (§. 327, 377 *Geom.*). Est vero, *per hypoth.*

$$BP : PN = AP : PM$$

$$a - x : \sqrt{(ax - x^2)} = x : PM$$

adeoque $PM = \frac{x\sqrt{(ax-x^2)}}{a-x} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(a-x)}}$, consequenter $NM = PN - PM = \sqrt{(ax - x^2)} - \sqrt{x^3} : \sqrt{(a - x)}$, & hinc $MN^2 = (a^2 x - 2ax^2 + 2x^3 - 2\sqrt{(a^2 x^4 - 2ax^5 + x^6)} : (a-x) = $ [ob $\sqrt{(a^2x^4 - 2ax^5 + x^6)} = ax^2 - x^3$], $\frac{a^2x - 4ax^2 + 4x^3}{a-x}$. Quare cum NM^2 sit maximum aliquod, erit (§. 63)

$$\frac{(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x)dx + (a^2x - 4ax^2 + 4x^3)dx}{(a-x)^2} = 0$$

$$(a^2 - 8ax + 12x^2)(a-x) + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 = 0$$

h. e.

Tab. IV. *Fig.* 45. h. e.

$$\left.\begin{array}{l} a^3 - 8a^2x + 12ax^2 \\ - a^2x + 8ax^2 - 12x^3 \\ + a^2x - 4ax^2 + 4x^3 \end{array}\right\} = 0$$

$$a^3 - 8a^2x + 16ax^2 - 8x^3 = 0 \quad [a-2x]$$

$$a^2 - 6ax + 4x^2 = 0$$

$$4x^2 - 6ax = -a^2 \quad [4]$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax = -\tfrac{1}{4}a^2$$

$$\tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{5}{16}a^2$$

$$x^2 - \tfrac{3}{2}ax + \tfrac{9}{16}a^2 = \tfrac{5}{16}a^2$$

$$\tfrac{3}{4}a - x = \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

$$x = \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{4}\sqrt{5a^2}$$

Dividatur radius CB bifariam in E, erit CE $= \frac{1}{4}a$, adeoque, ob CD $= \frac{1}{2}a$, DE $= \sqrt{\frac{5}{16}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$. Fiat EP $=$ ED; erit PB $= \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$; consequenter AP $=$ AB $-$ PB $= \frac{3}{4}a - \frac{1}{4}\sqrt{5a^2}$.

PROBLEMA XXII.

Tab. IV. *Fig.* 46. 89. *Determinare maximam applicatam* QN *in curva* AMND *ejus naturæ, ut ducta recta* FM *per punctum* D, *rectæ* AE *quæ lineam* CB *positione datam in* E *ad angulos rectos secat, sit eidem* AE *constanter æqualis.*

Sit FM $=$ AE $= a$, DE $= b$, EP $=$ MG $= x$, erit DP $= x - b$ & FG $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Jam cum anguli ad P & G sint recti, *per constr.* & ob parallelas AF & MG (§. 256 *Geom.*) PDM $=$ DMG (§. 233 *Geom.*), erit $\triangle$ FGM $\backsim$ $\triangle$PDM, & ideo (§. 267 *Geom.*)

$$MG : GF = DP : PM$$

$$x : \sqrt{(a^2 - x^2)} = x - b : PM$$

adeoque $PM = \frac{(x-b)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = (1 - \frac{b}{x})(\sqrt{a^2 - x^2})$

Hinc $PM^2 = (1 - \frac{2b}{x} + \frac{b^2}{x^2})(a^2 - x^2)$

$$= a^2 - \frac{2a^2b}{x} + \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 + 2bx - b^2$$

Habemus adeo (§. 63) Tab. IV. *Fig.* 46.

$$\frac{2a^2bdx}{x^2} - \frac{2a^2b^2dx}{x^3} - 2xdx + 2bdx = 0$$

$$\frac{a^2b}{x^2} - \frac{a^2b^2}{x^3} - x + b = 0 \quad [x^3]$$

$$a^2bx - a^2b^2 - x^4 + bx^3 = 0 \quad [x-b]$$

$$a^2b - x^3 = 0$$

$$x^3 = a^2b$$

$$x = \sqrt[3]{a^2b}.$$

Parametro a circa axem EB describatur Parabola EIR (§. 400 *part.* 1) fiatque (§. 622 *part.* 1) EO $= \frac{1}{2}a$, & OK ad EB perpendicularis $= \frac{1}{2}b$. Ex centro K, radio KE, describatur circulus EIT secans Parabolam in I, erit IL ad EB perpendicularis ($=$ FQ) $= x$, adeoque QN perpendicularis ad AE transiens per I maxima applicata.

Est enim IS $=$ IL $-$ SL $= x - \frac{1}{2}b$, & cum EL $= x^2 : a$ (§. 391 *part.* 1) LO $=$ SK $= \frac{1}{2}a - x^2 : a$. Quare SI$^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2$, & SK$^2 = \frac{1}{4}a^2 - x^2 + x^4 : a^2$; consequenter EK$^2 =$ IK$^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 - bx + x^4 : a^2$. Unde ob EK$^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$ habetur $x^4 : a^2 - bx = 0$, adeoque $x^3 - a^2b = 0$.

PROBLEMA XXIII.

90. *Determinare maximam applicatam* PM *curvæ* AME *ejus naturæ, ut diameter circuli* ANB *sit axi* AE *& rectæ per* A *ductæ* MN *in quolibet curvæ puncto* M *æqualis.* Tab. IV. *Fig.* 47.

Sit MN $=$ AB $=$ AE $= a$, AM $= x$, PM $= y$, erit AN $= a - x$. Jam cum AB & PM sint ad AE perpendiculares, *per hypoth.* erunt eædem inter se parallelæ (§. 256 *Geom.*) adeoque AMP $=$ NAB (§. 233 *Geom.*). Quare cum porro angulus

ad

Tab. IV. Fig. 47. ad P rectus sit (§. 78 *Geom.*) & ANB, qui est in semicirculo, sit itidem rectus, (§. 317 *Geom.*); erit △ AMP ∽ △ ANB (§. 267 *Geom.*) &

$$PM : AM = AN : AB$$

$$y : x = a - x : a$$

$$ay = ax - x^2$$

$$ady = adx - 2xdx = 0$$

$$a - 2x = 0$$

$$a = 2x$$

$$\tfrac{1}{2}a = x$$

Tab. IV. Fig. 47.

Hinc porro $y = x - \frac{x^2}{a} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}a = \frac{1}{4}a$

Est igitur in casu applicatæ maximæ $AM = \frac{1}{2}a$: unde reperitur $AP = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2}$ (§. 417 *Geom.*)

SECTIO SECUNDA.

DE CALCULO INTEGRALI, SEU SUMMATORIO.

CAPUT I.

De natura Calculi integralis.

DEFINITIO V.

91. *Calculus Integralis* seu *Summatorius* est Methodus quantitates differentiales summandi, hoc est, ex quantitate differentiali data inveniendi eam, ex cujus differentiatione resultat differentiale datum.

COROLLARIUM.

92. Integrationis itaque seu summationis rite peractæ indicium est, si quantitas inventa juxta regulas Cap. 1, Sect. I, traditas differentiata eam producit, quæ ad summandum proponebatur.

SCHOLION.

93. *Quoniam* Angli *differentialia quantitatum fluxiones vocant* (§. 6); *Calculum, quem nos differentialem dicimus*, Methodum fluxionum; *quem vero integralem vocamus & qui a differentiis ad summas, seu, ut cum* Anglis *loquar, a fluxionibus ad quantitates fluentes* (*ita nimirum variabiles dicunt*) *ascendit*, Methodum fluxionum inversam *appellant.*

HYPOTHESIS.

94. *Signum summæ aut quantitatis integralis sit* ∫, *ita ut* ∫ydx *denotet summam seu integrale differentialis* ydx.

PROBLEMA XXIV.

95. *Quantitatem differentialem integrare seu summare.*

RESOLUTIO.

Ex superioribus manifestum est, quod sit

I. $\int dx = x$ (§. 8).

II. $\int (dx \mp dy) = x \mp y$ (§. 11.).

III. $\int (xdy + ydx) = xy$ (§. 12).

IV. $\int mx^{m-1}\, dx = x^m$ (§. 13)

V. $\int (n:m)\, x^{(n-m):m}\, dx = x^{n:m}$ (§. 17).

VI. $\int (ydx - xdy) : y^2 = x : y$ (§. 19).

Ex his casus quartus & quintus frequentius occurrunt, in quibus quantitas differentialis summatur, si exponenti variabilis unitas additur, & ea, quæ prodit, dividitur per novum exponentem ductum in differentiale radicis, ex. gr. in casu quarto per $(m - 1 + 1)\, dx$, hoc est, per mdx.

Quodsi quantitas differentialis ad summandum

mandum proposita nulli illarum formularum similis; aut reducenda est ad summabilem finitam, aut ad seriem infinitam cujus singuli termini summari possunt, vel etiam ad Quadraturas & Rectificationes curvarum simpliciorum, quæ quadrari vel rectificari nondum possunt, veluti ad Quadraturam circuli, vel Rectificationem arcus circuli: quas reductiones exemplis potius, quam regulis docemus, ne calculi tyronibus nauseam moveamus.

Et quia eadem differentialia prodeunt, si variabilibus constantes quantitates adjiciantur, quam si eædem abfuerint (§.11); itaque fieri potest, ut $\int dx$ sit $x+a$ vel $x-a$, $\int(xdy+ydx)=xy\mp a^2$, vel $xy\pm ab$, & ita porro. Sed quid de quantitate adjicienda tenendum sit, docebitur paulo post.

SCHOLION.

96. Quemadmodum in Analysi finitorum qualibet quantitas ad quemcunque dignitatis gradum evehi, sed non vice versa ex qualibet radix extrahi potest desiderata; ita similiter in Analysi infinitesimali quantitas qualibet variabilis, aut ex variabilibus & constantibus quomodocunque composita, haud difficulter differentiatur, sed non vice versa quodlibet differentiale integrari potest. Quemadmodum autem porro in Analysi finitorum non ex omnibus æquationibus radices extrahendi Methodus hactenus inventa, neque enim ætas nostra transcendit limites ultra seculum & quod excurrit Algebræ jam assignatos: ita similiter in Analysi infinitorum Calculus integralis suam perfectionem nondum est assecutus. Sicuti autem in Analysi finitorum ad methodos extrahendi radicem per approximationem recurrimus, ubi perfectam extrahere non datur; ita similiter in Analysi infinitorum ad series infinitas confugimus, ubi perfectam summationem dare non valemus.

CAPUT II.

De usu Calculi integralis in Quadraturis curvarum.

DEFINITIO VI.

Tab.I. Fig.2. 97. *Differentiale* seu *Elementum areæ* dicitur rectangulum PMRP *ex* semiordinata PM in differentiale abscissæ *Pp*.

COROLLARIUM I.

98. Si ergo semiordinata PM $=y$, abscissa AP $=x$, erit $Pp=$ MR $=dx$, consequenter Elementum areæ PM. MR $=ydx$.

COROLLARIUM II.

99. Quoniam $mR=dy$ & MR $=dx$; erit $\triangle$MR$m=\frac{1}{2}dxdy$ (*§.392 Geom.*). Sed $\frac{1}{2}dxdy$ est ipsius ydx infinitesima (§.12), consequenter trapezium PMmp æquale est rectangulo PMRp, in præsente nimirum casu, ubi pm ipsi PM infinite propinqua intelligitur (§.4). Quare cum area AMP in infinita istiusmodi trapezia resolvi possit; erit ea $\int ydx$ (*§.91, 94*). Tab. I. Fig.2.

COROLLARIUM III.

100. Quodsi itaque ex æquatione ad curvam datam substituatur valor ipsius y, & ydx integrabile evadat; integratione peracta habetur Quadratura curvæ. Curvam igitur quadrare, idem est ac summare ydx.

PROBLEMA XXV.

101. *Invenire aream Trianguli.* Tab.II. Fig.18.

Sit CP $=x$, MN $=y$, CD $=a$, AB $=b$; erit, ob MN ipsi AB parallelam, (*§.268, 396 Geom.*)

$$CP : MN = CD : AB$$
$$x : y = a : b$$
$$y = bx : a$$

Ergo

Tab.II. Fig.18. Ergo elementum $MNnm = ydx$ (§. 98) $= bxdx : a$. Unde habetur $\int ydx = bx^2 : 2a$ (§.95): quæ est area indefinita CMN (§.99). Quodsi pro CP, seu x, substituatur CD, seu a; prodibit area totius trianguli $ACB = ba^2 : 2a = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}AB.CD$, prorsus ut in Elementis Geometriæ (§.392) demonstratum.

SCHOLION.

102. *Hoc Exemplum ideo attulimus, ut Tyrones, quibus principia Calculi summatorii sub initium duriora videntur, intelligant, per eum non alia reperiri, nisi quæ demonstrationibus rigidis firmantur; tum ut methodi applicationem in exemplo obvio facilius perspiciant.*

PROBLEMA XXVI.

103. *Parabolam quadrare.*

Pro Parabola *Apolloniana* (§. 388 *part.* 1)

$$ax = y^2$$
$$a^{1:2}x^{1:2} = y$$
$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} = \tfrac{2}{3}xy,$$

substituto valore ipsius $a^{1:2}x^{1:2}$.

COROLLARIUM.

104. Est ergo spatium parabolicum ad rectangulum ex semiordinata in abscissam ut $\frac{2}{3}xy$ ad xy, hoc est, ut 2 ad 3 (§.124 *part.*1).

PROBLEMA XXVII.

105. *Infinitas Parabolas quadrare.*

Pro infinitis Parabolis & curvis agnatis (§. 519 *part.* 1)

$$a^n x^m = y^r$$
$$a^{n:r} x^{m:r} = y$$
$$ydx = a^{n:r} x^{m:r} dx$$
$$\int ydx = \frac{r}{m+r} a^{n:r} x^{m:r+1} = \frac{r}{m+r} xy,$$

ob $a^{n:r} x^{m:r} = y$.

COROLLARIUM.

106. Spatium parabolicum aut paraboloidicum quodcunque est ad rectangulum ex semiordinata in abscissam, ut $rxy : (m+r)$ ad xy, hoc est, ut r ad $m+r$ (§.124 *part.*1).

PROBLEMA XXVIII.

107. *Quadrare segmentum spatii parabolici* PMNQ *inter duas semiordinatas* PM *&* QN *interceptum.* Tab.II. Fig.19.

I. Quoniam AP constans est, & origo abscissæ indeterminatæ in P: sit $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$, erit $AQ = b + x$. Sit porro parameter $= a$, erit (§.388 *part.*1)

$$ab + ax = y^2$$
$$\sqrt{(ab + ax)} = y$$
$$ydx = dx\sqrt{(ab + ax)}$$

Ut hoc elementum integrabile reddatur; fiat

$$\sqrt{(ab + ax)} = v$$

erit

$$ab + ax = v^2$$
$$adx = 2vdv$$
$$dx = 2vdv : a$$
$$ydx = 2v^2dv : a$$
$$\int ydx = \tfrac{2}{3}v^3 : a = \tfrac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{(ab + ax)} : a = \tfrac{2}{3}(b + x)\sqrt{(ab + ax)}.$$

Quoniam in P, $x = 0$, & spatium quoque QNMP evanescit; si in integrali inventa ponatur $x = 0$, quod relinquitur, $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, ostendit quid ei adjiciendum vel demendum, ut spatium QNMP nihilum evadat in P, consequenter ut integrale fiat quadratura ipsius QNMP. Habemus nempe in nostro casu subtrahendum $\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$: unde

Tab. II. Fig. 19.

unde ipsius QNMP area $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$.

II. Sit AQ constans, & $= b$, origo ipsius x in Q, erit QP $= x$, PM $= y$, AP $= b - x$ & (§. 388 *part.* 1)

$$ab - ax = y^2$$

$$\sqrt{(ab - ax)} = y$$

$$ydx = dx\sqrt{(ab - ax)}$$

Fiat ut ante $ab - ax = v^2$

erit $-adx = 2vdv$

$$dx = -2vdv : a$$

$$ydx = -2v^2dv : a$$

$$\int ydx = -\tfrac{2}{3}v^3 : a = -\tfrac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$$

Ut intelligatur quid integrali sit adjiciendum, quo spatii PMNQ mensuram constituat; ponatur ut ante $x = 0$, relinquetur $-\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Unde manifestum est, si illi adjiciatur $+\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, haberi spatium PMNQ $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Scholion.

108. *Spatium* PMNQ *esse in casu priore* $\frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$, *in posteriore* $\frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$ *etiam ex Problemate* 26 (§. 103) *manifestum est. Nimirum* PMNQ $=$ ANQ $-$ AMP. *Sed in casu priore* ANQ $= \frac{2}{3}$ AQ. QN $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)}$, *&* AMP $= \frac{2}{3}$AP. PM $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *Unde* PMNQ $= \frac{2}{3}(b+x)\sqrt{(ab+ax)} - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. *In posteriore* ANQ $= \frac{2}{3}$AQ. QN $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$ *&* AMP $= \frac{2}{3}$ AP. PM $= \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$. *Unde* QNMP $= \frac{2}{3}b\sqrt{ab} - \frac{2}{3}(b-x)\sqrt{(ab-ax)}$.

Corollarium.

109. Quodsi adeo curva non supponatur descripta, sed tantum æquatio ad eam detur, ut adeo non constet, ubi origo ipsius x sit statuenda; evidens est, ex resolutione Problematis præsentis, quod in integrali poni debeat $x = 0$, &, deletis iis quæ per x multiplicantur, residuum, si quod fuerit, sub signo contrario ipsi sit adjiciendum, ut habeatur quadratura quæsita.

Problema XXIX.

110. *Quadrare curvam, ad quam* $xy^3 = a^4$.

Quoniam

$$y = a^{4:3}x^{-1:3}$$

erit $ydx = a^{4:3}x^{-1:3}dx$

$$\int ydx = \tfrac{3}{2}a^{4:3}x^{2:3} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^4x^2} = \tfrac{3}{2}a\sqrt[3]{ax^2}.$$

Problema XXX.

111. *Quadrare curvam* Cartesii (d), *ad quam* $b^2 : x^2 = b - x : y$.

Quoniam $b^2y = bx^2 - x^3$

erit $y = (bx^2 - x^3) : b^2$

$$ydx = (bx^2dx - x^3dx) : b^2$$

$$\int ydx = x^3 : 3b - x^4 : 4b^2$$

Problema XXX.

112. *Quadrare curvam, ad quam* $x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^5 = a^4y$.

Quoniam $y = x^5 : a^4 + x^4 : a^3 + x^3 : a^2 + x^2 : a + a$

erit $ydx = \left(\frac{x^5}{a^4} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2}{a} + a\right)dx$

$$\int ydx = \frac{x^6}{6a^4} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^3}{3a} + ax$$

Problema XXXI.

113. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^4 + a^2x^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x^2 + a^2)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x^2 + a^2)}$

(d) *Epist.* Tom. III. pag. 219.

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(x^2+a^2)} = v$$

erit $x^2 + a^2 = v^2$

$$2xdx = 2vdv$$

$$xdx = vdv$$

$$xdx\sqrt{(a^2+x^2)} = v^2\,dv$$

$\int ydx = \frac{1}{3}v^3 = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)}$. Ponatur $x = 0$, erit residuum $\frac{1}{3}a^2\sqrt{a^2}$ sive $\frac{1}{3}a^3$. Ergo quadratura curvæ $\frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)} - \frac{1}{3}a^3$ (§. 109).

PROBLEMA XXXII.

114. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^3 + ax^2$.

Quoniam $y = x\sqrt{(x+a)}$

erit $ydx = xdx\sqrt{(x+a)}$

Ut elementum integrabile evadat, fiat

$$\sqrt{(x+a)} = v$$

erit $x + a = v^2$ & $x = v^2 - a$

$$dx = 2vdv$$

$$ydx = 2v^4\,dv - 2av^2\,dv$$

$\int ydx = \frac{2}{5}v^5 - \frac{2}{3}av^3 = \frac{2}{5}(x+a)^2\sqrt{(x+a)} - \frac{2}{3}a(x+a)\sqrt{(x+a)} = (\frac{6}{15}(x^2+2ax+aa) - \frac{10}{15}(ax+aa))\sqrt{(x+a)} = (6x^2+2ax-4aa)\sqrt{(x+a)} : 15$. Ponatur $x = 0$; relinquetur $-\frac{4}{15}aa\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $\frac{1}{15}\sqrt{(x+a)}(6x^2+2ax-4aa) + \frac{4}{15}aa\sqrt{a}$ (§. 109).

PROBLEMA XXXIII.

115. *Quadrare curvam, ad quam* $y^2 = x^2 : (x+a)$.

Quoniam $y = x : \sqrt{(x+a)}$

erit $ydx = xdx : \sqrt{(a+x)}$

Ponatur $\sqrt{(x+a)} = v$

erit $x + a = v^2$

$$x = v^2 - a$$

$$dx = 2vdv$$

$$xdx : \sqrt{(x+a)} = (2v^3dv - 2avdv) : v = 2v^2dv - 2adv$$

$\int ydx = \frac{2}{3}v^3 - 2av = \frac{2}{3}(x+a)\sqrt{(x+a)} - 2a\sqrt{(x+a)} = (2x+2a-6a)\sqrt{(x+a)} : 3 = (2x-4a)\sqrt{(x+a)} : 3 = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)}$. Reductio ad mere surdam necessaria, ut appareat, si fiat $x = 0$, & termini quidam nullescant, quale residui esse debeat signum, propterea quod $x - 2a$ signis afficitur diversis.

Ponatur $x = 0$; relinquetur $\frac{2}{3}\sqrt{4a^3} = \frac{4}{3}a\sqrt{a}$. Area igitur curvæ $= \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 3ax^2 + 4a^3)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$ (§. 109) $= \frac{2}{3}(x-2a)\sqrt{(x+a)} - \frac{4}{3}a\sqrt{a}$.

PROBLEMA XXXIV.

116. *Quadrare omnes curvas, quæ comprehenduntur sub æquatione generali* $y = \sqrt[m]{(x+a)}$.

Quoniam $y = (x+a)^{1:m}$

erit $ydx = dx(x+a)^{1:m}$

Ut elementum integrabile fiat, ponatur

$$(x+a)^{1:m} = v$$

erit $x + a = v^m$

$$dx = mv^{m-1}\,dv$$

$$ydx = mv^m\,dv$$

$$\int ydx = \frac{mv^{m+1}}{m+1} = \frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)}.$$

Fiat $x = 0$: erit residuum $\frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$.

Unde area curvæ $\frac{m}{m+1}(x+a)\sqrt[m]{(x+a)} - \frac{m}{m+1}a\sqrt[m]{a}$ (§. 109).

PRO-

PROBLEMA XXXV.

117. *Quadrare omnes curvas, quæ definiuntur hac æquatione generali* $y = ax^m : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$.

Elementum harum curvarum $ydx = ax^m dx : \sqrt{(b + cx^{m+1})}$. Ut integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(b + cx^{m+1})} = v$$

$$\text{erit } b + cx^{m+1} = v^2$$

$$(m+1) cx^m dx = 2vdv$$

$$x^m dx = 2vdv : c(m+1)$$

$$ydx = 2adv : (m+1) c$$

$$\int ydx = 2av : (m+1) c$$

$= 2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} : (m+1) c$.

Fiat $x = 0$, relinquetur $2a\sqrt{b} : (m+1) c$

Est igitur area $\frac{2a\sqrt{(b + cx^{m+1})} - 2a\sqrt{b}}{(m+1) c}$

PROBLEMA XXXVI.

118. *Quadrare innumeras Hyperbolas intra asymptotos.*

Pro infinitis Hyperbolis intra asymptotos $a^{m+n} = y^m x^n$.

Fiat $a = 1$

erit $1 = y^m x^n$

$$x^{-n} = y^m$$

$$x^{-n:m} = y$$

$$ydx = x^{-n:m} dx$$

$$\int ydx = \frac{m}{m-n} x^{-n:m+1} = \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^{m-n}}$$

$$= \frac{m}{m-n} \sqrt[m]{x^m y^m} = \frac{m}{m-n} xy$$

Tab. I. Fig. 4. Si $m > n$; spatii interminati $\int$MPAS quadratura semper habetur: si $m < n$, ob valorem negativum reperitur quadratura spatii IMPK: si vero $m = n$, spatium neutrum quadratur. Sit enim $xy^2 = a^2$; erit $m = 2$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= 2xy$. Si $xy^4 = a^5$; erit $m = 4$, $n = 1$, adeoque $\int$MPAS $= \frac{4}{3}xy$. Si $x^2 y = a^3$; theorema dat $a^3 : x = -xy$ seu xy pro spatio interminato IMPK. Si $x^4 y = a^5$; habetur $m = 1$, $n = 4$, adeoque $-\frac{1}{3}xy$, hoc est $\frac{1}{3}xy =$ IMPK. Sed si $xy = a^2$; erit $m = 1$, $n = 1$, adeoque $m : (m-n) = \frac{1}{0}$: est adeo numerator respectu denominatoris infinitus. Tab. I. Fig. 4.

SCHOLION.

119. Johannes WALLISIUS (c) *spatium* $\int$APMS, *eo in casu, ubi valor negativus, vocavit* plusquam infinitum: *ostendit vero Celeberrimus* VARIGNONIUS (f), *Virum ceteroquin magno suo merito celebrem aliquid humani passum esse, consentiente summo* LEIBNITIO (g).

PROBLEMA XXXVII.

120. *Hyperbolam* Apollonianam *intra asymptotos quadrare.*

Quoniam ad Hyperbolam intra asymptotos (§. 490 *part.* I.) $a^2 = by + xy$, seu si fiat $a = b = 1$ (quod ponere licet, cum quantitatis b determinatio sit arbitraria, *vi* §. *cit.*)

$$1 = y + xy$$

$$\text{erit } 1 : (1 + x) = y$$

hoc est divisione actu facta, (§. 45 *part.* I)

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 \text{ \&c.}$$

$$ydx = dx - xdx + x^2 dx - x^3 dx + x^4 dx - x^5 dx + x^5 dx : \text{\&c. in infinit.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6 + \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c. in infinit.}$$

(c) In *Arithmet. infinit.* Schol. Prop. 101. f. 407. & Prop. 104. fol. 409.

(f) *Memoires de l'Academie Royale des Sciences*, A. 1706. p. m. 15.

(g) In *Actis Eruditorum*, A. 1712. p. 267. & seqq.

SCHOLION.

121. *Hanc quadraturam Hyperbolæ primus dedit Serierum infinitarum inventor* Nicolaus MERCATOR (h). *Cum autem seriem quæsivisset per divisionem; celeberrimi Geometræ* LEIBNITIUS *atque* NEWTONUS (i) *methodum hanc serierum infinitarum promoverunt, hic quidem eas eliciens per radicum extractiones, ille autem ex serie quadam præsupposita. Utriusque exempla in sequentibus occurrunt.*

PROBLEMA XXXVIII.

122. *Quadrare curvam, in qua* $x^2 y + y = 1$.

Quoniam $x^2 y + y = 1$

$$y = \frac{1}{x^2+1}$$

vel $$y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$ydx = dx : (x^2+1)$$

vel $$= dx : (1+x^2)$$

Resolvatur $1 : (x^2+1)$ per divisionem in seriem infinitam (§. 45 *part.* 1), reperietur

$$y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} \text{ \&c.}$$

$$= x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} \text{ \&c.}$$

Quare

$$ydx = x^{-2}dx - x^{-4}dx + x^{-6}dx - x^{-8}dx \text{ \&c.}$$

adeoque

$$\int ydx = -x^{-1} + \tfrac{1}{3}x^{-3} - \tfrac{1}{5}x^{-5} + \tfrac{1}{7}x^{-7} \text{ \&c.}$$

$$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} \text{ \&c.}$$

Resolvatur similiter $1 : (1+x^2)$ in seriem (§. *cit.*), reperietur

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \text{ \&c.}$$

adeoque

$$ydx = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx \text{ \&c.}$$

Quare $\int ydx = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9$ &c.

Quoniam series exprimit aream, quia convergit, hoc est, termini continuo fiunt minores, ut in casu singulari tandem deveniatur ad particulam inassignabilem, etiamsi terminorum numerus sit finitus, series autem prior citius convergit posteriore; ideo utendum est serie prima, si x fuerit satis magna, secunda vero, si satis parva.

(h) In *Logarithmotechnia*, prop. 17. p. 31. & seqq.
(i) Vid. *Epistola* ipsorum apud WALLISIUM vol. III. *Operum Mathematic.*

PROBLEMA XXXIX.

123. *Quadrare Hyperbolam* AMP. Tab. I. Fig. 2.

Quoniam in Hyperbola $ay^2 = abx + bx^2$ (§. 459 *part.* 1.); $y = \sqrt{(ax+x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$, adeoque $ydx = dx\sqrt{(ax+x^2)}\sqrt{b} : \sqrt{a}$; consequenter $\int ydx = \sqrt{(b:a)} \int dx \sqrt{(ax+x^2)}$. Quoniam $\int dx\sqrt{(ax+x^2)}$ est area Hyperbolæ æquilateræ (§. 507 *part.* 1) hac data datur etiam area Hyperbolæ scalenæ. Quare ut elementum areæ Hyperbolæ æquilateræ integrabile reddatur, solvatur $\sqrt{(ax+x^2)}$ in seriem infinitam (§. 98 *part.* 1), erit in theoremate generali

$$m = 1, \; n = 2, \; P = ax$$

$$Q = x : a = a^{-1}x$$

$$P^{m:n} = a^{1:2}x^{1:2} = A.$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a^{1:2}x^{1:2} \cdot a^{-1}x$$

$$= \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} \cdot a^{-1}x$$

$$= -\tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6} \cdot -\tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} \cdot a^{-1}x$$

$$= +\tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8} \cdot \tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} \cdot a^{-1}x$$

$$= -\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n} EQ = -\tfrac{7}{10} \cdot -\tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}a^{-1}x$$

$$= +\tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}a^{-9:2}x^{11:2} \text{ \&c.}$$

Est

Eſt itaque

$$y = a^{1:2}x^{1:2} + \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2} - \tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2} + \tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2} - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2} + \text{\&c. in infinit.}$$

$$ydx = a^{1:2}x^{1:2}dx + \tfrac{1}{2}a^{-1:2}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{2.4}a^{-3:2}x^{5:2}dx + \tfrac{1.3}{2.4.6}a^{-5:2}x^{7:2}dx - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}a^{-7:2}x^{9:2}dx \text{ \&c. in infinit.}$$

adeoque

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{5}a^{-1:2}x^{5:2} - \tfrac{2}{4.7}a^{-3:2}x^{7:2} + \tfrac{1.3}{4.6.9}a^{-5:2}x^{9:2} - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}a^{-7:2}x^{11:2} + \tfrac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}a^{-9:2}x^{13:2} \text{ \&c.}$$

Quoniam $a^{1:2}x^{1:2} = \sqrt{ax}$, erit

$$\int ydx = \sqrt{ax}\left(\tfrac{2}{3}x + \frac{x^2}{5a} - \frac{x^3}{4.7a^2} + \frac{1.3.x^4}{4.6.9a^3} - \frac{1.3.5x^5}{4.6.8.11a^4} + \frac{1.3.5.7x^6}{4.6.8.10.13a^5} \text{ \&c. in infin.}\right)$$

PROBLEMA XL.

124. *Circulum quadrare.*

Tab. I. *Fig.* 2. Sit AB $=1$, AP $=x$, PM $=y$; erit (§. 377 *part.* 1.)

$$y = \sqrt{(x - xx)}$$

$$ydx = dx\sqrt{(x - xx)} = dx(x - xx)^{1:2}$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $x - xx$ extrahatur radix per Theorema generale (§. 98 *part.* 1), in quo erit

$$m=1,\ n=2,\ P=x,\ Q=-xx:x=-x$$

$$P^{m:n} = x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}x^{1:2}.-x = -\tfrac{1}{2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.-\tfrac{1}{2}x^{3:2}.-x = -\frac{1}{2.4}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}x^{5:2}.-x = -\frac{1.3.x^{7:2}}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.-\frac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}.-x = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2} = E$$

$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10}.-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}.-x = -\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2} \text{ \&c. in infin.}$$

Habemus adeo $ydx = x^{1:2}dx - \tfrac{1}{2}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{2.4}x^{5:2}dx - \tfrac{1.3}{2.4.6}x^{7:2}dx - \tfrac{1.3.5}{2.4.6.8}x^{9:2}dx - \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{11:2}dx$ &c. in infin.

Hinc $\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{5}x^{5:2} - \tfrac{1}{4.7}x^{7:2} - \tfrac{1.3}{4.6.9}x^{9:2} - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}x^{11:2}$ &c. in infin. $= \sqrt{x}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{4.7}x^3 - \tfrac{1.3}{4.6.9}x^4 - \tfrac{1.3.5}{4.6.8.11}x^5 - \tfrac{1.3.5.7}{4.6.8.10.13}x^6\right.$ &c. in infinit. $\left.\right) = \sqrt{x}\left(\tfrac{2}{3}x - \tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{1}{28}x^3 - \tfrac{1}{72}x^4 - \tfrac{5}{704}x^5 - \tfrac{7}{1664}x^6\right.$ &c. in infin. $\left.\right)$

Hæc nempe ſeries exhibet quadraturam indeterminatam ſegmenti AMP.

Aliter.

Quoniam ſi radius Circuli $=1$, CP $=x$, PM $=y$ (§. 377 *part.* 1.) $y = \sqrt{(1-x^2)}$ & $\sqrt{(1-x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{16}x^6 - \tfrac{5}{128}x^8 - \tfrac{7}{256}x^{10}$ &c. in infinit. erit (§. 98 *part.* 1.) Tab. I. *Fig.* 3.

$$ydx = dx - \tfrac{1}{2}x^2dx - \tfrac{1}{8}x^4dx - \tfrac{1}{16}x^6dx - \tfrac{5}{128}x^8dx - \tfrac{7}{256}x^{10}dx - \text{\& in infin.}$$

$$\int ydx = x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{40}x^5 - \tfrac{1}{112}x^7 - \tfrac{5}{1152}x^9 - \tfrac{7}{2816}x^{11} \text{ \&c. in infinit.}$$

Quando x radio CA æqualis evadit, ſpatium DCPM degenerat in quadrantem. Subſtituta itaque 1 pro x; erit quadrans $1 - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{40} - \tfrac{1}{112} - \tfrac{5}{1152} - \tfrac{7}{2816}$ &c. in infinit., quæ eadem ſeries integram Circuli aream metitur, ſi diameter fuerit 1.

Quod ſi

Quodsi progressum in infinitum perspicere lubet, multiplicatio ut ante tantummodo indicanda, dum $\sqrt{(1-x^2)}$ in seriem resolvitur.

Ita nimirum prodibit $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2.4}x^4 - \frac{1.3}{2.4.6}x^6 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}$ &c. in infinit.

$ydx = dx - \frac{1}{2}x^2dx - \frac{1}{2.4}x^4dx - \frac{1.3}{2.4.6}x^6dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}x^8dx - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}x^{10}dx$ &c.

$\int ydx = x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{1}{2.4.5}x^5 - \frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10.11}x^{11}$ &c. in infin.

Dicatur terminus primus A, secundus B, tertius C, quartus D, quintus E &c. erit $A = x$

$B = -\frac{1}{2.3}x^3 = -\frac{1.1}{2.3}Ax^2$

$C = -\frac{1}{2.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{2.3.4.5}x^5 = -\frac{1.3}{4.5}Bx^2$

$D = -\frac{1.3}{2.4.6.7}x^7 = -\frac{1.3.3.5}{2.3.4.5.6.7}x^7 = -\frac{3.5}{6.7}Cx^2$

$E = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.9}x^9 = \frac{1.3.5.3.5.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}x^9 = -\frac{5.7}{8.9}Dx^2$

&c. *Aliter.*

Tab.II. Fig.20. Sit tangens arcus dimidii $GB = x$, radius $BC = 1$; erit tangens integri seu dupli $KB = 2x:(1-xx)$ (§. 327 *part.* 1) & (§. 269 *Geom.*)

$BG : BC = KG : KC$

$x : 1 = \frac{x+x^3}{1-xx} : \frac{1+x^2}{1-xx}$

Est enim $KG = 2x:(1-xx) - x = (2x - x + x^3):(1-xx) = (x+x^3):(1-xx)$ Tab.II. *Fig.*20.

Porro (§. 268 *Geom.*)

$KC : KB = MC : PM$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : \frac{2x}{1-x^2} = 1 : \frac{2x}{1+x^2}$

$KC : BC = MC : PC$

$\frac{1+x^2}{1-x^2} : 1 = 1 : \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Unde $PB = 1 - (1-x^2):(1+x^2) = (1+x^2-1+x^2):(1+x^2) = 2x^2:(1+x^2)$. Hinc differentiando eruitur $Pp = MR = (4xdx + 4x^3dx - 4x^3dx):(1+x^2)^2 = 4xdx:(1+x^2)^2$, & $mR = (2dx + 2x^2dx - 4x^2dx):(1+x^2)^2 = (2dx - 2x^2dx):(1+x^2)^2$. Ob $MR^2 + mR^2 = Mm^2$ (§. 417 *Geom.*) habetur $Mm^2 = 16x^2dx^2:(1+x^2)^4 + (4dx^2 - 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4 = (4dx^2 + 8x^2dx^2 + 4x^4dx^2):(1+x^2)^4$, & $Mm = (2dx + 2x^2dx):(1+x^2)^2 = 2dx:(1+x^2)$. Denique $Mm.\frac{1}{2}MC = dx:(1+x^2)$. Ut sector hic infinite parvus MC*m*, seu elementum sectoris BCM, cujus dimidii tangens x, summetur; resolvi debet $1:(1+x^2)$ in seriem (§. 45 *part.* 1): quo facto reperitur $dx:(1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. adeoque $\int dx:(1+x^2) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. quae series exprimit sectorem BCM, ita ut arcus dimidii tangens $GB = x$.

Quando arcus integer BM in quadrantem degenerat; tangens dimidii BG fit radio aequalis (§. 32 *Trig.*). Si ergo pro x substituatur 1, series $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinit. quadrantem Circuli exprimit. Immo totam aream emetitur, si 1 denotet diametrum Circuli.

Brevius.

Brevius.

Tab.II. Fig.20. Sit tangens KB $=x$, BC $=1$ & fecans CA alteri CK infinite propinqua, ductusque arculus KL radio CK; erit AK $=dx$, KC $=\sqrt{(1+x^2)}$ (§.417 *Geom.*). Jam cum anguli ad B & L fint recti (§.38); & ob angulum infinite parvum KCL angulus BKC = KAC (§. 239 *Geom.* & §. 3 *Analyf. infinit.*); erit (§.267 *Geom.*)

$$KC : BC = KA : KL$$

$$\sqrt{(1+x^2)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}$$

Porro (§. 137, 412 *Geom.*)

$$CK : KL = CM : mM$$

$$\sqrt{(1+x^2)} : \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}} = 1 : \frac{dx}{1+x^2}$$

Sector igitur CM$m = \frac{1}{2}dx : (1+x^2) = \frac{1}{2}(dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c.). Unde per fummationem eruitur fector BCM, cujus tangens KB $= x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{14}x^7 + \frac{1}{18}x^9 - \frac{1}{22}x^{11}$ &c. in infinit. adeoque fi BM octans Circuli, feu arcus 45°, fector erit (§.32 *Trigon.*) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{18} - \frac{1}{22}$ &c. in infinit. Hujus adeo feriei duplum $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum eft quadrans Circuli, immo integra area fi diameter $= 1$.

SCHOLION.

125. *Seriem primam invenit* NEWTONUS, *alteram* Jacobus GREGORIUS, *& in eandem incidit* LEIBNITIUS *ignorans, dubio procul, prodituram feriem* Gregorianam, *cum ex tangente quæreret aream. Neque enim putandum eft, quod inventum feriei, quam* GREGORIO *repertam non ignorabat, etfi publice non conftaret, fibi attribuerit abfque ulla ratione Vir probati alias candoris. Sed nullum eft dubium quin ingeniofiffimus* LEIBNITIUS *methodo ab iis diverfa, quas ego propofui, ad fuam pervenerit. Cum enim methodum priorem, in quam incideram ante annos complures, amico percontanti, unde conftet, (quod* LEIBNITIUS *in* Actis Eruditorum *afferuerat)* $\int(dx : (1+x^2))$ *dependere a quadratura circuli, & quomodo inde eruatur feries* Leibnitiana *pro circulo* $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. *refponfurus, judicio* LEIBNITII *fubmififfem, eam equidem non improbavit, monuit tamen, totum negotium brevius abfolvi poffe: unde etiam factum eft, ut poftea de breviori cogitarem.*

PROBLEMA XL.

126. *Ellipfin* Apollonianam *quadrare.* Tab.I. Fig.10.

Sit AC $=a$, GC $=c$, PC $=x$; erit (§.432 *part.* 1)

$$y^2 = c^2(a^2 - x^2) : a^2$$

$$y = c\sqrt{(a^2 - x^2)} : a$$

Eft vero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9}$ &c. in infin. (§. 98 *part.* 1.). Ergo $ydx = cdx - \frac{cx^2dx}{2a^2} - \frac{cx^4dx}{8a^4} - \frac{cx^6dx}{16a^6} - \frac{5cx^8dx}{128a^8} - \frac{7cx^{10}dx}{256a^{10}}$ &c. in infinit. confequenter $\int ydx \quad cx - \frac{cx^3}{6a^2} - \frac{cx^5}{40a^4} - \frac{cx^7}{112a^6} - \frac{5cx^9}{1152a^8} - \frac{7cx^{11}}{2816a^{10}}$ &c. in infinit.

Quodfi pro x ponatur a; erit quadrans Ellipfis $ac - \frac{1}{6}ac - \frac{1}{40}ac - \frac{1}{112}ac - \frac{5}{1152}ac - \frac{7}{2816}ac$ &c. in infinitum: quæ eadem feries integram Ellipfis aream exhibet, fi a axem integrum denotet.

Aliter.

Tab.II. Fig.23. Quoniam elementum Ellipseos est $c dx \sqrt{(a^2 - x^2)} : a$; erit ECLR $= \frac{c}{a} \int (dx \sqrt{(a^2 - x^2)})$. Sed $\int (dx \sqrt{(a^2 - x^2)}) =$ DCLK (§. 124). Est itaque $a : c =$ DCLK : ECLR, hoc est, area circularis DCLK est ad Ellipticam ECLR ut axis major AB (qui est diameter circuli) ad minorem 2CE (§. 124 *part.* 1). Pendet adeo quadratura Ellipseos a quadratura Circuli.

COROLLARIUM I.

127. Si fiat $\sqrt{ac} = 1$, erit area Ellipsis $= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} - \frac{7}{2816}$ &c. in infinitum. Patet adeo Ellipsin esse circulo æqualem, cujus diameter est media proportionalis inter axes Ellipsis conjugatos (§. 124).

COROLLARIUM II.

128. Est ergo Ellipsis ad circulum, cujus diameter axi majori æqualis, ut ac ad a^2 (§. 408 *Geom.*), hoc est, ut c ad a (§. 124 *part.* 1), seu ut axis minor ad majorem: quod idem de segmentis indefinitis ostendimus analytice in resolutione.

COROLLARIUM III.

129. Data Circuli quadratura dabitur etiam quadratura Ellipsis, & contra.

SCHOLION.

130. *Quamvis Circuli integri quadratura finita hactenus dari non potuerit, varias tamen ejus portiones quadrarunt Geometræ. Primam quadraturam partialem alicujus lunulæ dedit jam olim* HIPPOCRATES *Chius, ex mercatore naufrago Geometra factus. Sit* AEB *semicirculus &* GC = BG. *Describatur radio* BC *quadrans* AFB; *erit* AEBFA *Lunula* HIPPOCRATIS. *Quoniam* $BC^2 = 2GB^2$ (§. 417 *Geom.*); *erit quadrans* AFBC *semicirculo* AEB *æqualis* (§. 408 *Geom.*). *Ablato igitur utrinque segmento communi* AFBA; *erit* AEBFA $=$ △ ACB $= GB^2$.

Tab.II. Fig.21.

PROBLEMA XLII.

131. *Cycloidem quadrare.*

Quoniam TP = PM (§. 52): erunt in △PMT anguli M & T æquales (§. 184 *Geom.*), adeoque TPQ = 2M (§. 239 *Geom.*). Est vero anguli APQ mensura arcus dimidius AP (§. 291, & 314 *Geom.*) & idem metitur angulum TPA (§. 322 *Geom.*). Ergo APQ = TPA (§. 142 *Geom.*). Sed TPQ = TPA + APQ = 2APQ = 2TMP, per *demonstrata.* Ergo APQ = TMP = MmS, ob parallelas MP & mq (§. 233 *Geom.*). Quamobrem, cum ad S & Q sint recti, *per constr.*; erit (§. 267 *Geom.*) Tab.I. Fig. 7.

AQ : QP = MS : Sm

Sit jam AQ $= x$, AB $= 1$, erit MS $= dx$, PQ $= \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1.) & $mS = dx \sqrt{(x - xx)} : x$. Reperimus autem supra (§. 124) $\sqrt{(x - xx)} = x^{1:2} - \frac{1}{2} x^{3:2} - \frac{1}{8} x^{5:2} - \frac{1}{16} x^{7:2}$ &c. in infinitum. Ergo $dx \sqrt{(x - xx)} : x =$ (quoniam ob divisionem per x factam numeratores exponentium duabus unitatibus minuuntur, §. 54 *part.* 1) $x^{-1:2} dx - \frac{1}{2} x^{1:2} dx - \frac{1}{8} x^{3:2} dx - \frac{1}{16} x^{5:2} dx$ &c. in infinitum, cujus summa $2x^{1:2} - \frac{1}{3} x^{3:2} - \frac{1}{20} x^{5:2} - \frac{1}{56} x^{7:2}$ &c. in infinitum, est semiordinata Cycloidis QM ad axem AB relatæ. Hinc QM.dx, seu elementum QMSq spatii cycloidici AMQ $= 2x^{1:2} dx - \frac{1}{3} x^{3:2} dx - \frac{1}{20} x^{5:2} dx - \frac{1}{56} x^{7:2} dx$ &c. in infinitum: cujus summa $= \frac{4}{3} x^{3:2} - \frac{2}{15} x^{5:2} - \frac{1}{70} x^{7:2} - \frac{1}{252} x^{9:2}$ &c. in infinit. exprimit segmentum Cycloidis AMQ.

Quodsi $mS = gG = dx \sqrt{(x - xx)} : x$ ducatur in GM = AQ $= x$, reperietur elementum GMHg areæ AMG $= dx \sqrt{(x - xx)}$: quod cum idem sit cum elemen-

mento segmenti circuli APQ (§. 124), erit spatium AMG segmento circuli APQ; consequenter area ADC semicirculo APB æqualis.

COROLLARIUM.

132. Quoniam CB semiperipheriæ circuli æquatur (§. 574 *part.* 1.) si $ea = p$ & $AB = a$; erit rectangulum $BCDA = ap$ (§. 375 *Geom.*), & semicirculus APB, adeoque & spatium cycloidicum externum $ADC = \frac{1}{4}ap$ (§. 429 *Geom.*). Ergo area semicycloidis $ACB = \frac{3}{4}ap$ & $AMCBPA = \frac{3}{2}ap$; consequenter area Cycloidis est circuli genitoris tripla.

PROBLEMA XLIII.

133. *Cissoidem* DIOCLIS *quadrare.*

Quoniam $y^2 = x^3 : (1-x)$, si 1 diameter circuli genitoris (§. 548 *part.* 1.); erit

$$y = x\sqrt{x} : \sqrt{(1-x)} = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}$$

Extrahatur ergo ex $1 : \sqrt{(1-x)}$ actu radix, per Theorema generale (§. 98 *part.* 1) in quo erit $m = -1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = -x$ & hinc

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.1. - x = \tfrac{1}{2}x = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1x}{2}. - x = \frac{1.3x^2}{2.4} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^2}{2.4}. - x = \frac{1.3.5x^3}{2.4.6} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5x^3}{2.4.6}. - x = \frac{1.3.5.7x^4}{2.4.6.8}$$

&c. in infinitum.

Unde $ydx = x^{3:2}(1-x)^{-1:2}dx = x^{3:2}dx + \frac{1}{2}x^{5:2}dx + \frac{1.3}{2.4}x^{7:2}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^{9:2}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{11:2}dx$ &c. cujus summa $\frac{2}{5}x^{5:2} + \frac{1}{7}x^{7:2} + \frac{1.3}{4.9}x^{9:2} + \frac{1.3.5}{4.6.11}x^{11:2} + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^{13:2}$ &c. in infinitum $= \sqrt{x}(\frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x^3 + \frac{1.3}{4.9}x^4 + \frac{1.3.5}{4.6.11.}x^5 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.13}x^6$ &c. in infinitum) exprimit spatium APM.

Aliter.

Sit $AP = x$, $PN = v$, $PM = y$, $AB = a$; erit (§. 548 *part.* 1)

$$ay^2 - xy^2 = x^3$$

$$2aydy - 2xydy - y^2dx = 3x^2dx$$ Tab. II. Fig. 22.

$$2(a-x)dy - ydx = 3x^2dx : y$$

Quoniam (§. 547 *part.* 1) $x^2 = vy$; erit $x^2 : y = v$. Fiat præterea $a - x = PB = z$: habebimus

$$2zdy - ydx = 3vdx$$

$$2\int zdy - \int ydx = 3\int vdx$$

Est vero vdx elementum circuli $PNnp$; $\int zdy$, ob $z = PB = OM$ & $dy = mR = oO$, elementum $mMOo$ areæ AMOB & ydx elementum $PMmp$ areæ AMP. Jam quando $\int zdy$ integram aream intra Cissoidem AI & ejus asymptotum BH exhibet, etiam $\int ydx$ est eadem area, adeoque $\int ydx = \int zdy$; consequenter $2\int zdy - \int ydx = \int zdy$. Quare cum in eodem casu $\int vdx$ semicirculum producat ANB; erit, ob $\int zdy = 3\int vdx$, totum spatium cissoidale in infinitum protensum semicirculi genitoris ANB triplum.

PROBLEMA XLIV.

134. *Quadrare Logisticam, seu Logarithmicam.*

Sit subtangens $PT = a$ (§. 54), Tab. I. $PM = y$, $Pp = dx$; erit (§. *cit.*) Fig. 8.

$$ydx : dy = a$$

$$ydx = ady$$

$$\int ydx = ay$$

 Spa-

Tab. I. *Fig.* 8. Spatium ergo interminatum HPMI æquatur rectangulo ex PM in PT.

COROLLARIUM I.

135. Sit QS $= z$; erit ſpatium interminatum ISQH $= az$, conſequenter SMPQ $= ay - az = a\,(y-z)$, hoc eſt, ſpatium inter duas Logiſticæ ſemiordinatas interceptum æquatur rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

COROLLARIUM II.

136. Eſt itaque ſpatium BAPM ad ſpatium PMSQ ut differentia ſemiordinatarum AB & PM ad differentiam ſemiordinatarum PM & SQ (*§. præc.* & §. 124 *part.* 1).

PROBLEMA XLV.

137. *Quadrare Spirales.*

Tab. I. *Fig.* 6. Sint omnia ut in Problemate 8 (§. 50); erit arculus EG $= ydx : a$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ AG producit ſectorem infinite parvum GAE $= y^2 dx : 2a$ (§. 435 *Geom.*). Eſt autem pro Spirali *Archimedea*,

$$by = ax$$

$$y^2 = a^2 x^2 : b^2$$

$$y^2 dx : 2a = ax^2 dx : 2b^2$$

$$\int y^2 dx : 2a = ax^3 : 6b^2$$

Quodſi pro arcu x ponatur integra peripheria b; erit ſpatium ſpirale integrum $\frac{1}{6} ab$. Similiter pro infinitis Spiralibus ad circulum relatis (§. 572 *part.* I).

$$b^n y^m = a^m x^n$$

$$y^m = a^m x^n : b^n$$

$$y = ax^{n:m} : b^{n:m}$$

$$y^2 = a^2 x^{2n:m} : b^{2n:m}$$

$$y^2 dx : 2a = ax^{2n:m} dx : 2b^{2n:m}$$

$$\int y^2 dx : 2a = max^{(2n+m):m} : (4n+2m) b^{2n:m}$$

Quare ſi pro x ponatur integra peripheria circuli b, prodibit pro ſpatiis ſpiralibus integris $mab^{2n:m+1} : (4n+2m)\, b^{2n:m} = mab : (4n+2m)$. Tab. I. *Fig.* 6.

Quodſi ponamus arcum EC eſſe ad CF ut abſciſſa ad ſemiordinatam in curva aliqua algebraica eodem modo reperitur ſpatium ſpirale. Sit enim ex. gr. BC ad CF ut abſciſſa Parabolæ ad ſemiordinatam, erit (ſumto r pro parametro)

$$rx = a^2 - 2ay + yy$$

$$dx = (2ydy - 2ady) : r$$

$$y^2 dx : 2a = (y^3 dy - ay^2 dy) : ar$$

$$\int y^2 dx : 2a = y^4 : 4ar - y^3 : 3r$$

Nec abſimili modo invenitur ſpatium inter arcum BC & Spiralem BF comprehenſum, cujus elementum eſt trapezium CFID $= (\text{CD} + \text{FI})\, \frac{1}{2}\,\text{FC}$ (§. 400 *Geom.*). Eſt vero CD $= dx$, FI $= ydx : a$, FC $= a - y$, adeoque CFID $= (dx + ydx : a)\,(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} y) = (a^2 dx - y^2 dx) : 2a$.

Si jam Spiralis ſit parabolica, pro dx ſubſtituatur valor ipſius $(2ydy - 2ady) : r$, erit elementum ſpeciale $(ay^2 dy + a^2 ydy - y^3 dy - a^3 dy) : ar$, cujus ſumma, $y^3 : 3r + ay^2 : 2r - y^4 : 4ar - a^2 y : r$, eſt ſpatium quæſitum BFC.

PROBLEMA XLVI.

138. *Quadrare Conchoidem* NICOMEDIS.

Sit AP $= x$, PM $= y$, BC $= b$, AB $= a$ & OQ ad PM perpendicularis: erit PB $=$ OQ $= a - x$, PC $= a + b - x$. Quoniam OQ & BA perpendiculares ad PM, *per hypoth.* erunt inter ſe parallelæ (§. 256 *Geom.*), conſequenter (§. 268 *Geom.*), Tab. I. *Fig.* 5.

PC

Tab.I. Fig. 5.

$$PC : PM = OQ : OM$$
$$a+b-x : y = a-x : OM$$

& hinc $OM = y(a-x) : (a+b-x)$
adeoque $OM^2 = y^2(a-x)^2 : (a+b-x)^2$.
Porro $OQ^2 = (a-x)^2$, & $QM^2 = AB^2$ (§. 535 *part.* 1) $= a^2$. Quare (§. 417 *Geom.*)

$$a^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \frac{y^2(a-x)^2}{(a+b-x)^2}$$

$$2ax - x^2 = y^2(a-x)^2 : (a+b-x)^2$$

$$\sqrt{(2ax - x^2)} = y(a-x) : (a+b-x)$$

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \sqrt{(2ax - x^2)}$$

Habemus itaque elementum areæ $PpmM = ydx = \frac{a+b-x}{a-x} dx \sqrt{(2ax-x^2)}$ nec alia re opus eſt, quam ut $\sqrt{(2ax-x^2)}$ reſolvatur in ſeriem (§. 98 *part.* 1.), ſeries hæc porro ducatur in $a+b-x$ & factum tandem dividatur per $a-x$. Ita enim obtinetur ſeries, quæ ſingulis terminis in dx ductis exprimit elementum areæ atque eodem, quo ante, modo ſummatur. Ne calculus perplexus tyrones turbet, ſumamus caſum ſimpliciſſimum, in quo eſt $b=a$, adeoque $a+b=2a$, & ne $\sqrt{2}$ toties ſit ſcribenda, ponamus $2a=c$, ut ſit $a=\frac{1}{2}c$: erit $ydx = \frac{c-x}{\frac{1}{2}c-x} dx \sqrt{(cx-x^2)}$. Eſt autem $\sqrt{(cx-x^2)}$ ſemiordinata circuli, cujus diameter c, atque adeo coincidit reſolutio in ſeriem cum ea, quam dedimus paulo ante (§. 124), niſi quod ibidem ſuppoſuerimus $c=1$. Quoniam tamen hic conſultius eſt c retineri & in reſolutione, in gratiam operationum ſequentium, quædam notanda ſunt; ideo non inconſultum ducimus, vi Theorematis *Newtoniani* (§. 99 *part.* 1) reſolutionem ipſam inſtituere. Erit itaque

$$m = 1,\ n = 2,\ P = cx,$$
$$Q = -x^2 : cx = -x : c = -c^{-1}x \text{ (§. 54, 55 part. 1)},$$

adeoque

$$P^{m:n} = c^{1:2}x^{1:2} = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}c^{1:2}x^{1:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}. -\tfrac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}. -\tfrac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}. -\tfrac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2}. -c^{-1}x = -\tfrac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}, \text{ \&c.}$$

Eſt itaque $\sqrt{(cx-x^2)} = c^{1:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Quodſi hanc ſeriem multiplices per $c-x$, & porro dividas per $\frac{1}{2}c-x$, prodibit $(c-x)\sqrt{(cx-x^2)} : (\frac{1}{2}c-x) = 2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{725}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c. in infinitum.

Multiplicatio & diviſio modo ordinario inſtituitur. Etenim ſi ſeriem multiplices per c, prodit $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{1}{2}c^{1:2}x^{3:2} - \frac{1}{8}c^{-1:2}x^{5:2} - \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} - \frac{5}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. in infinit. Si porro eandem ducas in $-x$, prodit $-c^{1:2}x^{3:2} + \frac{1}{2}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{8}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1}{16}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Quodſi terminos homogeneos in unam ſummam colligas, obtinetur ſeries $c^{3:2}x^{1:2} - \frac{3}{2}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{3}{8}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{16}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{1}{128}c^{-5:2}x^{9:2}$ &c. Hac porro diviſa per $\frac{1}{2}c-x$ (§. 40 *part.* 1), prodit quotus $2c^{1:2}x^{1:2} + c^{-1:2}x^{3:2} + \frac{11}{4}c^{-3:2}x^{5:2} + \frac{45}{8}c^{-5:2}x^{7:2} + \frac{725}{64}c^{-7:2}x^{9:2}$ &c.

 Eſt

Tab. I. *Fig.* 5. Est adeo elementum areæ Conchoidis $2c^{-1:2}x^{1:2}dx + c^{-1:2}x^{1:2}dx + \frac{1}{4}c^{-3:2}x^{5:2}dx + \frac{5}{8}c^{-5:2}x^{7:2}dx + \frac{7}{64}c^{-7:2}x^{9:2}dx$ &c. in infinit. Quare area AMP $= \frac{4}{3}c^{1:2}x^{3:2} + \frac{2}{5}c^{-1:2}x^{5:2} + \frac{1}{14}c^{-3:2}x^{7:2} + \frac{5}{4}c^{-5:2}x^{9:2} + \frac{7}{352}c^{-7:2}x^{11:2}$ &c. in infin.

PROBLEMA XLVII.

139. *Invenire rationem, quam habent spatia curvilinea juxta axem eundem vel axes æquales descripta, semiordinatis correspondentibus rationem constantem habentibus.*

Sit elementum spatii curvilinei unius $= ydx$. Quoniam ordinatæ ad æquales partes axis continuo applicantur, *per hypoth.* erit elementum spatii alterius zdx, posita nempe semiordinata hujus z, abscissa communi x. Sed cum in singulis elementis eadem semper sit ratio ipsius y ad z, *per hypoth.* erit $\int ydx : \int zdx = ydx : zdx$ (§. 187 *Arithm.*) $= y : z$ (§. 181. *Arithm.*).

Theorema. Spatia curvilinea æque alta habent rationem basium, quibus insistunt, si semiordinatæ correspondentes fuerint in ratione constante.

COROLLARIUM I.

140. Quare si ARB fuerit semiellipsis; AKB semicirculus & KL ad AB perpendicularis; erit KL ad RL in ratione constante DC ad EC (§. 599 *part.* 1.), adeoque segmentum circulare BKL ad segmentum ellipticum BRL ut KL ad RL. Tab. II. *Fig.* 23.

COROLLARIUM II.

141. Quodsi ex foco F ducantur rectæ FR & FK, erunt quoque triangula FKL & FRL ut KL ad RL (§. 389 *Geom.*). Quamobrem sector circularis EFK est ad sectorem ellipticum BFR ut KL ad RL (§. 187 *Arithm.*). Cum itaque KL : RL = CD : CE (§. 599 *part.* 1.) & ut CD ad CE ita Circulus integer ad Ellipsin integram (§. 128); erit quoque sector KFB ad sectorem RFB ut Circulus ad Ellipsin (§. 167. *Arithm.*), consequenter ut sector KFB ad aream integri Circuli, ita sector RFB ad integram Ellipsis aream (§. 173 *Arithm.*).

SCHOLION.

142. *Quoniam sectores ex arcuum elementis derivantur; de iis quadrandis agemus Capite sequente, ubi arcuum rectificatio docetur.*

CAPUT III.

De usu Calculi integralis in Rectificatione Curvarum.

DEFINITIO VII.

143. *Rectificatio curvæ* est inventio rectæ, cui æqualis est linea curva.

COROLLARIUM.

144. Cum linea curva concipiatur constare ex innumeris lineolis rectis infinite exiguis; si una earum inveniatur per calculum differentialem, summa dabit longitudinem curvæ. Nimirum cum ex superioribus constet, esse MR $= dx$, mR $= dy$ (§. 20); erit Mm seu elementum curvæ $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Quodsi itaque ex æquatione differentiali ad curvam specialem substituatur Tab. I. *Fig.* 2.

ſtituatur valor vel ipſius dx^2, vel ipſius dy^2; habetur elementum ſpeciale: quod integratum prodit longitudinem curvæ.

SCHOLION.

145. *Interdum elementum curvæ commodius ex circumſtantiis ſpecialibus eruitur, prout exempla mox afferenda loquentur.*

PROBLEMA XLVIII.

146. *Parabolam rectificare*,

Pro Parabola $adx = 2ydy$ (§. 21)

$$a^2 dx^2 = 4y^2 dy^2$$

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(dy^2 + 4y^2 dy^2 : a^2)} = dy \sqrt{(aa + 4yy)} : a.$$

Ut hoc elementum curvæ integrabile fiat, reſolvatur in ſeriem infinitam (§. 99 *part.* 1.); erit in Theoremate generali

$$n = 2,\ m = 1,\ P = a^2,\ Q = 4y^2 : a^2$$

$$P^{m:n} = a = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = \tfrac{1}{2}a.\ 4y^2 : a^2 = 2y^2 : a = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{1}{4}.\frac{2y^2}{a}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{2y^4}{a^3} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{2y^4}{a^3}.\frac{4y^2}{a^2} = \frac{4y^6}{a^5} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{4y^6}{a^5}.\frac{4y^2}{a^2} = -\frac{10y^8}{a^7}\ \&c.$$

in infinitum.

Quare $dy \sqrt{(aa + 4yy)} : a = dy + \frac{2y^2 dy}{a^2} - \frac{2y^4 dy}{a^4} + \frac{4y^6 dy}{a^6} - \frac{10y^8 dy}{a^8}$ &c. cujus integrale $y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - \frac{10y^9}{9a^8}$ &c. in infinitum exprimit arcum parabolicum.

COROLLARIUM I.

Tab.II. Fig.24. 147. Sint AC & DC ſemiaxes conjugati Hyperbolæ æquilateræ; erit $AC = DC = a$ (§. 505 *part.* 1). Sit $CQ = MP = 2y$; erit (§. 534 *part.* 1) $QM = \sqrt{(4yy + aa)}$. Quodſi *qm* intelligatur ipſi QM infinite propinqua; erit $Qq = dy$, adeoque elementum areæ $CQMA = dy \sqrt{(aa + 4yy)}$. Pendet itaque rectificatio Parabolæ a quadratura ſpatii Hyperbolici CQMA.

COROLLARIUM II.

Tab. IV. Fig.48. 148. Sit AMR Parabola, cujus parameter AC, & circa communem axem deſcripta Hyperbola æquilatera ANT, cujus axis 2CA. Si fiat $CQ = AV = QN = 2PM$, & rectangulum CORA ſpatio curvilineo CQNA æquale; erit AR æqualis arcui AM (§. 146, 147), conſequenter $RV = AM - 2PM$, ſeu differentia inter ordinatam & arcum reſpondentem, & $ORVQ = VNA$.

SCHOLION.

149. *Probe notandum eſt, omnes ſummationes reduci ad quadraturas curvarum, quocunque in caſu iiſdem utamur. Unde ut ſint perfectæ, in omnibus obſervanda eſt regula ſupra tradita de quadraturis* (§. 109).

PROBLEMA XLIX.

150. *Rectificare Parabolam ſecundi generis, ad quam* $ax^2 = y^3$, *ſeu ſumto* $a = 1$, $x^2 = y^3$.

Quoniam $x^2 = y^3$

erit $2xdx = 3y^2 dy$

$$4x^2 dx^2 = 9y^4 dy^2$$

$$dx^2 = 9y^4 dy^2 : 4x^2 = 9y^4 dy^2 : 4y^3 = \tfrac{9}{4} y dy^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(\tfrac{9}{4} y dy^2 + dy^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(9ydy^2 + 4dy^2)} = \tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, fiat

$$\sqrt{(9y + 4)} = v$$

erit $9y + 4 = v^2$

$$9dy = 2vdv$$

$$\tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)} = \tfrac{1}{9}v^2 dv$$

$$\int \tfrac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)} = \tfrac{1}{27}v^3$$

$$= \tfrac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y + 4)}.$$

Ut

Ut vero summa exprimat longitudinem arcus, fiat $y = 0$; erit residuum $= \frac{4}{27}\sqrt{4} = \frac{8}{27}$: adeoque arcus $\frac{1}{27}(9y + 4)\sqrt{(9y+4)} - \frac{8}{27}$ (§. 109).

COROLLARIUM.

Tab.II. Fig.19. 151. Sit parameter Parabolæ *Apollonianæ* 1, $AP = 1$, $PQ = \frac{9}{4}y$, erit $AQ = \frac{9}{4}y + 1$, & ob parametrum 1, $QN^2 = \frac{9}{4}y + 1 = (9y + 4) : 4$ (§.388 *part.* 1.), consequenter $QN = \frac{1}{2}\sqrt{(9y + 4)}$. Est adeo elementum $QNnq$ spatii parabolici $PMNQ = \frac{1}{2}dy\sqrt{(9y + 4)}$; quod divisum per 1, sive parametrum, dat elementum arcus Parabolæ secundi generis, ad quam $ax^2 = y^3$. Pendet adeo hujus rectificatio a quadratura Parabolæ *Apollonianæ*; quæ cum dari possit (§.103), mirum non est, illam quoque rectificabilem esse.

PROBLEMA L.

152. *Infinitas Parabolas rectificare.*

Si parameter $= 1$, pro infinitis parabolis (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$
$$my^{m-1}\,dy = dx$$
$$m^2y^{2m-2}\,dy^2 = dx^2$$

h. e. si brevitatis gratia fiat $2m - 2 = r$

$$m^2y^r\,dy^2 = dx^2$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(m^2y^r\,dy^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(m^2y^r + 1)}.$$

Ut elementum integrabile reddatur, ex $m^2y^r + 1$ extrahenda est radix per Theorema generale (§. 99 *part.* 1); in quo erit

$$m = 1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = m^2y^r$$
$$P^{m:n} = 1 = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = \frac{1}{2}m^2y^r = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}m^2y^r.\,m^2y^r = -\frac{1}{2.4}m^4y^{2r} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{1}{2.4}m^4y^{2r}.\,m^2y^r = +\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r} = D.$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.\frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}.\,m^2y^r = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8}m^8y^{4r} = E$$
$$\frac{m-4n}{5n}EQ = -\tfrac{7}{10}.-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}.\,m^2y^r = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}$$

&c. in infinitum.

Habemus itaque $dy\sqrt{(1 + m^2y^r)}$ $dy + \frac{1}{2}m^2y^r\,dy - \frac{1}{2.4}m^4y^{2r}dy + \frac{1.3}{2.4.6}m^6y^{3r}\,dy - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}m^8y^{4r}\,dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}m^{10}y^{5r}dy$ &c. in infinit. cujus integrale $y + \frac{1}{2(r+1)}m^2y^{r+1} - \frac{1}{2.4(2r+1)}m^4y^{2r+1} + \frac{1.3}{2.4.6(3r+1)}m^6y^{3r+1} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(4r+1)}m^8y^{4r+1} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10(5r+1)}m^{10}y^{5r+1}$. &c. in infinitum, indefinite exprimit arcum parabolicum cujuscunque generis.

Quodsi pro r substituatur valor ipsius $2m - 2$; prodibit idem arcus $= y + \frac{1}{2(2m-1)}m^2y^{2m-1} - \frac{1}{2.4(4m-3)}m^4y^{4m-3} + \frac{1.3}{2.4.6(6m-5)}m^6y^{6m-5} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8(8m-7)}m^8y^{8m-7} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.10(10m-9)}m^{10}y^{10m-9}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LI.

153. *Dato sinu* PQ *arcus* AP; *invenire arcum* AP. Tab. I. Fig. 7.

Sit radius $AI = 1$, $PQ = y$, $AQ = x$; erit (§. 377 *part.* 1)

2x-

Tab.I. *Fig.*7.

$$2x - xx = yy$$

$$2dx - 2xdx = 2ydy$$

$$dx = ydy : (1 - x)$$

$$dx^2 = y^2dy^2 : (1 - 2x + xx) = y^2dy^2 : (1 - y^2)$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{y^2 dy^2}{1 - y^4} + dy^2$$

$$= (y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2) : (1 - y^2) = dy^2 : (1 - y^2)$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy : \sqrt{(1 - y^2)} = dy(1 - y^2)^{-1:2}.$$

Resolvatur hoc elementum in seriem infinitam per extractionem radicis, vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1), in quo erit

$$m = -1,\ n = 2,\ P = 1,\ Q = -y^2$$

$$P^{m:n} = 1 = A$$

$$\frac{m}{n} AQ = -\tfrac{1}{2}.1. - y^2 = \tfrac{1}{2}y^2 = B$$

$$\frac{m-n}{2n} BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}y^2. - y^2 = \tfrac{1.3}{2.4}y^4 = C$$

$$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}y^4. - y^2 = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6 = D$$

$$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}y^6. - y^2 = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8$$ &c. in infinit.

Est adeo $dy \cdot \sqrt{(1 - y^2)} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{1.3}{2.4}y^4dy + \frac{1.3.5}{2.4.6}y^6dy + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}y^8dy$ &c. in infinitum, cujus integrale $y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ &c. est arcus AP, cujus sinus PQ $= y$, sinu toto existente 1. Si terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. & secundus multiplicetur per $\frac{1}{1}$, tertius per $\frac{3}{3}$, quartus per $\frac{3.5}{3.5}$, quintus per $\frac{3.5.7}{3.5.7}$ &c. cum sit

$$A = y$$

$$B = \frac{1}{2.3}y^3 = \frac{1.1}{2.3} Ay^2$$

$$C = \frac{1.3}{2.4.5}y^5 = \frac{1.3.3}{2.3.4.5}y^5 = \frac{3.3}{4.5} By^2$$

$$D = \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 = \frac{1.3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7}y^7 = \frac{5.5}{6.7} Cy^2$$

$$E = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9 = \frac{1.3.3.5.5.7.7}{2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 = \frac{7.7}{8.9} Dy^2$$

series inventa in hanc degenerat: $y + \frac{1.1}{2.3} Ay^2 + \frac{3.3}{4.5} By^2 + \frac{5.5}{6.7} Cy^2 + \frac{7.7}{8.9} Dy^2$ &c.

Si cosinus QI $= x$, erit (§. 417 *Geom.*) PQ $= \sqrt{(1 - xx)}$. Sit pq ipsi PQ infinite propinqua, & PO ad pq perpendicularis: cum anguli Q & q sint recti, *per hyp.* PO $= Qq = dx$ & $\triangle\triangle\, pOP$ atque PQI rectangula. Quare cum OPQ sit rectus (§. 230 *Geom.*) & pPI itidem rectus (§. 38); erit etiam pPO $=$ IPQ (§. 91 *Arithm.*), consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$PQ : PI = PO : Pp$$

$$\sqrt{(1 - xx)} : 1 = dx : \frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

Cum adeo hoc elementum coincidat cum anteriore, evidens est, si in serie anteriore pro y substituatur x, prodire seriem pro arcu, qui est illius complementum ad 90°.

Tab.I. *Fig.*7.

COROLLARIUM I.

154. Quoniam elementum arcus Mm $= dy : \sqrt{(1 - y^2)}$, si MC $= 1$, PM $= y$ (§. 153); Tab.II.
erit sector elementaris MCm $= dy : 2\sqrt{(1 - y^2)}$ *Fig.*20.
(§. 435 *Geom.*); consequenter sector BCM $= \frac{1}{2}\int dy : \sqrt{(1 - y^2)} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{4.4.5}y^5 + \frac{3.5}{4.4.6.7}y^7 + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}y^9$ &c. in infin.

COROLLARIUM II.

Tab.II. *Fig.*20. 155. Quodsi MC $=1$, PC $=y$, erit denuo $Mm = dy : \sqrt{(1-y^2)}$ (§.153); consequenter & $MCm = dy : 2\sqrt{(1-y^2)}$: Summa vero exhibet sectorem MCO.

COROLLARIUM III.

156. Si fiat $y=1$, sector BCM vel MCO degenerat in quadrantem, qui adeo erit $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4.3} + \frac{3}{4.4.5} + \frac{3.5}{4.4.6.7} + \frac{3.5.7}{4.4.6.8.9}$ &c. sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{3}{80} + \frac{5}{224} + \frac{35}{2304}$ &c. in infinit. Eadem series integrum Circulum exprimit, si fuerit diameter $=1$.

PROBLEMA LII.

Tab.I. *Fig.*7. 157. *Dato sinu verso* AQ; *invenire arcum* AP.

Sit AQ $=x$, diameter AB $=1$, erit QP $= \sqrt{(x-xx)}$ (§.377 *part.*1) & *vi Probl. prec.* $Pp = dx : 2\sqrt{(x-xx)} = \frac{1}{2}dx\,(x-xx)^{-1:2}$. Cum adeo sit, in Theoremate generali (§.99 *part.*1), $m=-1$, $n=2$, $P=x$, $Q=-x$; erit

$$P^{m:n} = x^{-1:2} = A$$
$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.x^{-1:2}.-x = \tfrac{1}{2}x^{1:2} = B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}.x^{1:2}.-x = \tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2} = C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\tfrac{1.3}{2.4}x^{3:2}.-x = \tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2} = D$$
$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.\tfrac{1.3.5}{2.4.6}x^{5:2}.-x = \tfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^{7:2}$$

&c. in infinitum.

Hinc $\frac{1}{2}dx : \sqrt{(x-xx)} = \frac{1}{2}x^{-1:2}dx + \frac{1}{4}x^{1:2}dx + \frac{1.3}{4.4}x^{3:2}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}x^{5:2}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{7:2}dx$ &c. in infinitum, cujus integrale $x^{1:2} + \frac{1}{2.3}x^{3:2} + \frac{1.3}{2.4.5}x^{5:2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^{7:2} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^{9:2}$ Tab. I. &c. in infinitum, seu $\sqrt{x}(1 + \frac{1}{2.3}x$ *Fig.*7. $+ \frac{1.3}{2.4.5}x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^4$ &c. in infinitum) exprimit arcum AP, quia $x^{1:2} = \sqrt{x}$.

PROBLEMA LIII.

158. *Data tangente* BK; *invenire arcum* BM. Tab.II. *Fig.*20.

Sit tangens BK $=x$, radius BC $=1$, erit $Mm = dx : (1+x^2) = dx - x^2dx + x^4dx - x^6dx + x^8dx - x^{10}dx$ &c. in infinitum (§.124). Hujus seriei summa $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. in infinitum, dat arcum BM.

Cum tangens 45° sit radio æqualis (§. 32 *Trigon.*), si pro x ponatur 1; prodibit arcus 45° seu dimidius quadrans $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum, quæ eadem series quadranti satisfacit, si diameter $=1$.

PROBLEMA LIV.

160. *Dato arcu* BM; *invenire sinum* PM.

Sit sinus PM $=y$, radius BC $=1$, arcus BM $=v$; erit $v = y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum (§.153). Valor ipsius y invenietur extrahendo radicem ex $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5$ &c. in infinitum. Est nimirum in Theoremate generali (§.366 *part.*1) $a=1$, $c=\frac{1}{6}$, $e=\frac{3}{40}$ &c. adeoque

$$v : a = v$$
$$-acv^3 : a^4 = -\tfrac{1}{6}v^3$$
$$+(3a^2c^2 - a^3e)v^5 : a^7 = (\tfrac{3}{36} - \tfrac{3}{40})v^5$$
$$= (\tfrac{1}{12} - \tfrac{3}{40})v^5$$
$$= \tfrac{40-36}{12.40}v^5$$
$$= \tfrac{4}{12.40}v^5 = \tfrac{1}{120}v^5$$

Hinc

Hinc $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5$ &c. in infinitum $= \frac{1}{1}v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5$ &c. in infinitum: unde lex progressionis manifesta est. Nimirum $y = v - \frac{1}{1.2.3}v^3$

$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7$$
$$+ \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9 \text{ \&c.}$$

Quodsi Theorema generale supponere non libet, reperietur valor ipsius y eodem modo, quo (§. 366 *part.* 1.) Theorema generale investigavimus. Sit nempe

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 + \text{\&c.}$$

erit (§. 95 *part.* 1.)

$$y^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 + \text{\&c.}$$
$$+ 3a^2cv^7 + \text{\&c.}$$
$$y^5 = a^5v^5 + 5a^4bv^7 + \text{\&c.}$$
$$y^7 = a^7v^7 + \text{\&c.}$$

Habemus itaque

$$y = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$\tfrac{1}{6}y^3 = + \tfrac{1}{6}a^3v^3 + \tfrac{1}{2}a^2bv^5 + \tfrac{1}{2}ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}a^2cv^7$$
$$\tfrac{3}{40}y^5 = + \tfrac{3}{40}a^5v^5 + \tfrac{3}{8}a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$\tfrac{5}{112}y^7 = + \tfrac{5}{112}a^7v^7 \text{ \&c.}$$
$$-v = -v$$

$$a - 1 = 0 \qquad b + \tfrac{1}{6}a^3 = 0$$
$$a = 1 \qquad b = -\tfrac{1}{6}$$

$$c + \tfrac{1}{2}a^2b + \tfrac{3}{40}a^5 = 0$$

h.c. $c - \frac{1}{12} + \frac{3}{40} = 0$

$$c = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{40-36}{12.\ 40} = \frac{1}{120}$$

$$d + \tfrac{1}{2}ab^2 + \tfrac{1}{2}a^2c + \tfrac{3}{8}a^4b + \tfrac{5}{112}a^7 = 0$$

h.c. $d + \frac{1}{72} + \frac{1}{240} - \frac{1}{16} + \frac{5}{112} = 0$

seu $d + \frac{1}{5040} = 0$

$$d = -\tfrac{1}{5040}$$

Nimirum $\frac{1}{72} + \frac{1}{240} = \frac{13}{720}$, $\frac{13}{720} - \frac{1}{16} = -\frac{2}{45}$ tandem $\frac{5}{112} - \frac{2}{45} = \frac{1}{5040}$.

Habemus itaque ut ante $y = v - \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{120}v^5 - \frac{1}{5040}v^7$ &c. in infin.

PROBLEMA LV.

161. *Dato arcu* BM; *invenire tangentem* BK. Tab.II. Fig.20.

Sit tangens $= x$, radius $= 1$, arcus $= v$; erit (§.158) $v = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11}$ &c. Unde eodem modo, quo in Problemate præcedente, reperitur $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c. (§. 366 *part.* 1).

Est nimirum, vi Theorematis generalis,

$$x = \frac{v}{a} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}v^3 +$$
$$\frac{14b^4 + 6a^2bd - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}v^5 \text{ \&c.}$$

Jam vero $a = 1$, $b = 0$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = \frac{1}{5}$, per legem comparationis, adeoque

$$-\frac{ac}{a^5} = -c = -\tfrac{1}{3}$$
$$\frac{3a^2c^2 - a^3e}{a^9} = 3c^2 - e = \tfrac{3}{9} - \tfrac{1}{5}$$
$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \frac{5-3}{3.5} = \tfrac{2}{15}$$

Quare $x = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5$ &c.

Potest etiam valor ipsius x eodem modo inveniri, quo in Problemate præcedente.

Ponamus nempe $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. $= 0$; erit (§.95 *part.* 1)

$$x^3 = a^3v^3 + 3a^2bv^5 + 3ab^2v^7 \text{ \&c.}$$
$$+ 3a^2cv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^5 = + a^5v^5 + 5a^4bv^7 \text{ \&c.}$$
$$x^7 = + a^7v^7 \text{ \&c.}$$

Habemus adeo, ob

$$x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 \text{ \&c.} = v$$

$$-v = -v$$
$$x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{3}x^3 = \quad -\tfrac{1}{3}a^3v^3 - a^2bv^5 - ab^2v^7 \text{\&c.}$$
$$\qquad\qquad -a^2cv^7$$
$$+\tfrac{1}{5}x^5 = \quad +\tfrac{1}{5}a^5v^5 + a^4bv^7 \text{\&c.}$$
$$-\tfrac{1}{7}x^7 = \quad -\tfrac{1}{7}a^7v^7 \text{\&c.}$$

Quamobrem

$$a-1=0 \qquad b-\tfrac{1}{3}a^3=0 \qquad c-a^2b+\tfrac{1}{5}a^5=0$$
$$a=1 \qquad b=\tfrac{1}{3} \qquad c=b-\tfrac{1}{5}=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}$$
$$=\frac{5-3}{15}=\frac{1}{15}$$
$$d-ab^2-a^2c+a^4b-\tfrac{1}{7}a^7=0$$
$$d-\tfrac{1}{9}-\tfrac{2}{15}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}=0$$
$$d=\tfrac{2}{15}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{2}{9}=\frac{126+135-210}{945}$$
$$=\frac{51}{945}=\frac{17}{315}$$

His ergo valoribus coëfficientium a, b, c, d &c. in æquatione affumtitia $x = av + bv^3 + cv^5 + dv^7$ &c. fubftitutis, prodit $x = v + \tfrac{1}{3}v^3 + \tfrac{2}{15}v^5 + \tfrac{17}{315}v^7$ &c.

SCHOLION.

162. *Me non monente apparet, fi plures termini defiderentur, affumtitiam quoque ex pluribus conftandam effe.*

PROBLEMA LVI.

Tab.I. Fig. 7. 163. *Dato arcu* AP; *invenire finum verfum* AQ.

Quodfi formulam defideres, quam NEWTONUS dedit[a]; radius fupponi debet 1. In formula fuperiori, quam pro arcu ex finu verfo eruimus (§. 157), diameter eft 1. Quamobrem hæc prius eadem, qua fupra ufi fumus, methodo eruenda. Sit igitur $AI=1$, $AQ=x$, erit $AB=2$, $PQ=\sqrt{(2x-x^2)}$ & per demonftrata (§. 153)

$$PQ : PI = PO : Pp$$
$$\sqrt{(2x-x^2)} : 1 = dx : Pp$$

(a) In *Epiftola ad* LEIBNITIUM, quæ legitur apud WALLISIUM Vol. III. Oper. f. 625.

confequenter $Pp = dx : \sqrt{(2x-x^2)} = dx\,(2x-x^2)^{-1:2}$ cumque fit (§. 99 *part.* I.)

$m=-1$ $n=2$, $P=2x$, $Q=-x^2:2x=-\tfrac{1}{2}x$, erit

$$P^{m:n}=(2x)^{-1:2}=\frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}}=A,$$
$$\frac{m}{n}AQ=-\tfrac{1}{2}.\frac{x^{-1:2}}{\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x=+\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}}=B$$
$$\frac{m-n}{2n}BQ=-\tfrac{3}{4}.\frac{x^{1:2}}{4\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x=+\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}}=C$$
$$\frac{m-2n}{3n}CQ=-\tfrac{5}{6}.\frac{3x^{3:2}}{32\sqrt{2}}.-\tfrac{1}{2}x=+\frac{5x^{5:2}}{128\sqrt{2}}$$
&c.

Eft itaque $Pp=\frac{x^{-1:2}dx}{\sqrt{2}}+\frac{x^{1:2}dx}{4\sqrt{2}}+\frac{3x^{3:2}dx}{32\sqrt{2}}+\frac{5x^{5:2}dx}{128\sqrt{2}}$ &c.

adeoque arcus $AP=\frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}}+\frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}+\frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}+\frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

$$\text{Nam } \frac{x^{3:2}}{4\sqrt{2}.\frac{3}{2}}=\frac{2x^{3:2}}{3.4\sqrt{2}}=\frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}$$
$$\frac{3x^{5:2}}{32\sqrt{2}.\frac{5}{2}}=\frac{2.3x^{5:2}}{5.32\sqrt{2}}=\frac{3x^{5:2}}{80\sqrt{2}}$$
$$\frac{5x^{7:2}}{128\sqrt{2}.\frac{7}{2}}=\frac{2.5x^{7:2}}{128.7\sqrt{2}}=\frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}.$$

Sit jam $AP=v$,

erit $v=\frac{2x^{1:2}}{\sqrt{2}}+\frac{x^{3:2}}{6\sqrt{2}}+\frac{3x^{1:2}}{80\sqrt{2}}+\frac{5x^{7:2}}{448\sqrt{2}}$ &c.

adeoque

$$v^2=\frac{4x}{2}+\frac{4x^2}{2.6}+\frac{x^3}{2.36} \text{ \&c.} + \frac{4.3x^3}{2.80}$$

hoc eft, $v^2=2x+\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{1}{72}x^3+\tfrac{1}{40}x^3$

Ponatur.

Ponatur

$$x = av^2 + bv^4 + cv^6 \text{ \&c.}$$

erit $\quad x^2 = \qquad a^2v^4 + 2abv^6$

$\qquad x^3 = \qquad\qquad + a^3v^6$

adeoque

$$2x = 2av^2 + 2bv^4 + 2cv^6 \text{ \&c.}$$

$+ \frac{1}{3}x^2 = \qquad + \frac{1}{3}a^2v^4 + \frac{2}{3}abv^6$

$+ \frac{1}{72}x^3 = \qquad\qquad + \frac{1}{72}a^3v^6$

$+ \frac{3}{40}x^3 = \qquad\qquad + \frac{3}{40}a^3v^6$

$- v^2 = - v^2$

Quamobrem

$2a - 1 = 0 \qquad 2b + \frac{1}{3}a^2 = 0$

$2a = 1 \qquad 2b = - \frac{1}{3}a^2$

$a = \frac{1}{2} \qquad b = - \frac{1}{6}a^2 = - \frac{1}{6.4} = - \frac{1}{24}$

$2c + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{72}a^3 + \frac{3}{40}a^3 = 0$

$c = - \frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 - \frac{3}{80}a^3$

$- \frac{1}{3}ab = + \frac{1}{144} = + \frac{8}{144.8}$

$- \frac{1}{144}a^3 = - \frac{1}{144.8}$

$- \frac{1}{3}ab - \frac{1}{144}a^3 = \frac{7}{144.8} = \frac{7}{1152}$

$- \frac{3a^3}{80} = - \frac{3}{80.8} = - \frac{3}{640}$

$c = \frac{4480 - 3456}{1152.640} = \frac{1024}{1252.640}$

$= \frac{16}{1152.10} = \frac{1}{720}$

Est igitur $x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{24}v^4 + \frac{1}{720}v^6$ &c. Enimvero $2 = 1.2$, $24 = 1.2.3.4$, $720 = 1.2.3.4.5.6$. Quare $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{1.2.3.4}v^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6$ &c. Quodsi jam terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C &c. erit $x = \frac{1}{1.2}v^2 - \frac{1}{3.4}Av^2 + \frac{1}{5.6}Bv^2 - \frac{1}{7.8}Cv^2$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

164. Quoniam radius $= 1$, erit sinus complementi, seu cosinus arcus $v = 1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6}v^6 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}v^8$ &c.

COROLLARIUM II.

165. Si $1 - \frac{1}{1.2}v^2 + \frac{1}{1.2.3.4}v^4$, sive $1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$ praxi satisfacit pro sinu complementi arcus, & cosinus iste dicatur c; erit $c = 1 - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{24}v^4$, consequenter $v = \sqrt{(6 + \sqrt{(24c + 12)})}$ (§. 143 *part.* 1).

PROBLEMA LVII.

166. *Dato arcu* BM; *invenire secantem* KC. Tab. II. Fig. 20.

Sit $BC = 1$, arcus $= v$, erit $KB = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{15}v^5 +$ &c. (§. 161); adeoque $BC^2 = 1$, $KB^2 = v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6$ &c. consequenter (§. 417 *Geom.*) ob $\frac{1}{9}v^6 + \frac{4}{15}v^6 = \frac{17}{45}v^6$, $KC^2 = 1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c. Quodsi inde radix vulgari modo extrahatur, prodit $KC = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \frac{61}{720}v^6$ &c. quemadmodum typus exempli ostendit.

$1 + v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6 \text{ \&c.} \; (1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{5}{24}v^4 + \text{ \&c.}$

1

$+ v^2 + \frac{2}{3}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c.

(2)

$+ v^2 + \frac{1}{4}v^4$

$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{17}{45}v^6$ &c.

$(2 + v^2)$

$+ \frac{5}{12}v^4 + \frac{5}{24}v^6$ &c.

$+ \frac{61}{360}v^6$ &c.

$(2 + v^4 + \frac{5}{12}v^4)$

$+ \frac{61}{360}v^6$ &c.

&c. &c.

SCHOLION.

167. *Seriem pro sinu & sinu verso ex arcu, atque pro arcu ex iisdem determinando invenit* NEWTONUS (l); *seriem pro tangente & secante ex arcu, atque arcu ex tangente determinando,* Jacobus GREGORIUS (m). *Existimavit autem* LEIBNITIUS *series istas Trigonometriam canonicam ad quantamcunque exactitudinem in numeris a Tabularum necessitate liberare.*

PROBLEMA LVIII.

Tab.I. 168. *Rectificare Cycloidem.*

Fig. 7. Sit $AQ=x$, $AB=1$, erit $Qq=MS=dx$, $PQ=\sqrt{(x-xx)}$ (§. 377 *part.* 1) & hinc $AP=\sqrt{x}=x^{1:2}$ (§. 417 *Geom.*), consequenter ob △△ APQ & MmS similitudinem supra demonstratam (§. 131)

$$AQ : AP = MS : Mm$$
$$x : x^{1:2} = dx : x^{-1:2}\, dx$$

Est ergo Mm differentiale arcus cycloidici $AM=x^{-1:2}dx$. Unde $\int x^{-1:2}dx = 2x^{1:2} = 2AP$ est arcus AM, seu arcus Cycloidis AM est chordæ arcus circuli genitoris ipsi respondentis AP duplus.

PROBLEMA LIX.

Tab. IV. 169. *Data chorda arcus* AP; *invenire arcum cognominem, quem subtendit.*

Fig. 49. Sit $AB=1$, $AP=x$: cum angulus APB sit rectus (§. 317 *Geom.*) erit $PB=\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 417 *Geom.*). Sit porro Ap ipsi AP infinite propinqua. Quoniam angulus $AQB = APB + PAp$ (§. 239 *Geom.*) & PAp, cujus mensura est $\frac{1}{2}$ Pp (§. 314 *Geom.*) infinite parvus; erit $AQB=APB$ (§. 4), consequenter rectus (§. 145 *Geom.*) Est igitur & $PQp=AQB$ (§ 156 *Geom.*) rectus (§. 145 *Geom.*) itidemque AQP rectus (§. 65 *Geom.*) adeoque ipsi APQ æqualis (§. 145 *Geom.*) & hinc $AP=AQ$ (§. 253, 89 *Geom.*); consequenter Qp differentiale chordæ AP (§. 6) $= dx$. Porro anguli PAB mensura est arcus dimidius PB & anguli QPp mensura $\frac{1}{2}pB$ (§. 314 *Geom.*): quare cum arcus PB & pB, ob infinite parvum Pp, sint æquales (§ 4), erit angulus $PAB=QPp$ (§. 141 *Geom.*). Habemus itaque (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AB = pQ : Pp$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : 1 = dx : Pp$$

adeoque $Pp = dx : \sqrt{(1-x^2)}$, & hinc porro arcus $AP = \int (dx : \sqrt{(1-x^2)})$. Eadem igitur formula satisfacit arcui AP ex chorda cognomine determinando, quam supra invenimus pro eodem ex sinu PM determinando (§. 153), nimirum arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9$ &c. in infinitum.

Quodsi $PB=x$, erit $PQ=dx$ & $AP=(\sqrt{1-x^2})$, atque eodem prorsus modo reperitur arcus $PB=\int(dx:\sqrt{(1-x^2)})$, ut adeo eadem series satisfaciat utrique arcui AP & PB inveniendo.

PROBLEMA LX.

170. *Data chorda arcus* AP; *invenire segmentum circuli cognomine.*

Sit diameter circuli $AB=1$, chorda $AP=x$, erit, per demonstrata in Problemate præcedente, $PB=\sqrt{(1-x^2)}$ & $pQ=dx$, nec non △ APB ∽ △PQp: erit etiam (§. 267 *Geom.*)

$$PB : AP = pQ : PQ$$
$$\sqrt{(1-x^2)} : x = dx : PQ$$

adeo-

(l) Vide *Commercium epistolicum* D. Joh. COLLINS p. 40. 52.

(m) Ibidem p. 45.

Tab. IV. Fig.49. adeoque $PQ = x dx : \sqrt{(1-x^2)}$, consequenter cum PQ haberi possit pro arcu infinite parvo ex centro A radio AP descripto (§. 38), adeoque APQ pro sectore circulari, erit $APQ = x^2 dx : 2\sqrt{(1-x^2)}$ (§. 435 *Geom.*) $= \frac{1}{2}x^2 dx (1-x^2)^{-1:2}$.

Est vero $(1-x^2)^{-1:2}$ seu $1:\sqrt{(1-x^2)}$ $= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^8$ &c. (§. 153), adeoque

$APQ = \frac{1}{2}x^2 dx (1-x^2)^{-1:2} = \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{4}x^4 dx + \frac{1.3}{4.4}x^6 dx + \frac{1.3.5}{4.4.6.}x^8 dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}x^{10} dx$ &c. in infinit.

Ergo segmentum circuli $AP = \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1}{4.5}x^5 + \frac{1.3}{4.4.7}x^7 + \frac{1.3.5}{4.4.6.9}x^9 + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.11}x^{11}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXI.

171. *Dato arcu* AP; *invenire chordam cognominem.*

Sit diameter circuli $AB = 1$, $AP = x$, erit arcus $AP = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. (§. 169). Dicatur idem arcus v, erit $v = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7$ &c. adeoque $AP = x = v - \frac{1}{1.2.3}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}v^9$ &c. in infinitum, ut supra (§. 160).

Quodsi diameter dicatur d, non 1, reperietur arcus $AP = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5d^4}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}x^7$ &c. & vicissim chorda $AP = v - \frac{1}{1.2.3d^2}v^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5d^4}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7d^6}v^7 + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9d^8}v^9$ &c. id quod calculos superiores repetenti apparet. Tab. IV. Fig.49.

PROBLEMA LXII.

172. *Rectificare arcum Ellipsis* GM. Tab.I. Fig.10.
Sit $CG = c$, $AC = a$, $PC = x$, $PM = y$, erit (§. 432 *part.* 1)

$$a^2 y^2 = a^2 c^2 - c^2 x^2$$
$$2a^2 y dy = -2c^2 x dx$$
$$a^4 y^2 dy^2 = c^4 x^2 dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^4 x^2 dx^2}{a^4 y^2} = \frac{c^4 x^2 dx^2}{a^4 c^2 - a^2 c^2 x^2} = \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2} = \frac{a^4 dx^2 - a^2 x^2 dx^2 + c^2 x^2 dx^2}{a^4 - a^2 x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{\sqrt{(a^4 - a^2 x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Ut elementum hoc integrabile reddatur, tam numerator $\sqrt{(a^4 - a^2 x^2 + c^2 x^2)}$, quam denominator $a\sqrt{(a^2 - x^2)}$, resolvendus est in seriem & series prior per posteriorem dividenda eo modo, quem mox subjiciemus. Est itaque (§. 99 *part.* 1.), in casu primo, $m = 1$, $n = 2$, $P = a^4$, $Q = -(a^2 - c^2)x^2 : a^4$

Fiat

Fiat $a^2 - c^2 = b^2$ ob commoditatem calculi, erit $Q = -b^2x^2 : a^4$.

Unde porro obtinetur

$$P^{m:n} = a^2 = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = \tfrac{1}{2}.\,a^2.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^2x^2}{2a^2} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{1}{4}.-\frac{b^2x^2}{2a^2}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^4x^4}{8a^6} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{3}{6}.-\frac{b^4x^4}{8a^6}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{b^6x^6}{16a^{10}} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{5}{8}.-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}.-\frac{b^2x^2}{a^4} = -\frac{5b^8x^8}{128a^{14}} \text{ \&c.}$$

Est itaque $\sqrt{(a^4 - b^2x^2)} = \sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)} = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$ &c. in infinitum $= K$

Enimvero $\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. in infin. (§. 126).

Quare $a\sqrt{(a^2 - x^2)} = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$ &c. in infin. $= L$.

Seriem adeo primam K per alteram L divisurus probe observare debes omnes terminos in divisione emergentes, in quibus x ad eandem dimensionem assurgit, haberi pro uno, cum pro coefficientibus omnibus simul sumtis substitui possit unus, qualis etiam in casu singulari revera prodiret, ubi a & b in numeris dantur, si fractiones ad eandem denominationem reductæ in unam summam colligerentur. Quamobrem terminus unusquisque dividendæ dividitur per a^2, quotcunque partibus fuerit auctus in ipso divisionis actu, & integra series dividens ducitur in quotum atque a dividenda subtrahitur, quemadmodum in communi divisione fieri solet: id quod ex typo exempli subjecti attento lectori obvium.

$$K = a^2 - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$

$$L = a^2 - \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{8a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$\text{Resid. I.} - \frac{b^2x^2}{2a^2} - \frac{b^4x^4}{8a^6} - \frac{b^6x^6}{16a^{10}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{10}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{8a^2} + \frac{x^6}{16a^4} + \frac{5x^8}{128a^6}$$

$$L.B = -\frac{b^2x^2}{2a^2} + \frac{b^2x^4}{4a^4} + \frac{b^2x^6}{16a^6} + \frac{b^2x^8}{32a^8}$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^2 - \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{16a^4} - \frac{x^8}{32a^6}$$

A. B. C. D. E.

$$1 - \frac{b^2x^2}{2a^4} - \frac{b^4x^4}{8a^8} - \frac{b^6x^6}{16a^{12}} - \frac{5b^8x^8}{128a^{16}}$$

$$+ \frac{x^2}{2a^2} - \frac{b^2x^4}{4a^6} - \frac{b^4x^6}{16a^{10}} - \frac{b^6x^8}{32a^{14}}$$

$$+ \frac{3x^4}{8a^4} - \frac{3b^2x^6}{16a^8} - \frac{3b^4x^8}{64a^{12}}$$

$$+ \frac{5x^6}{16a^6} - \frac{5b^2x^8}{32a^{10}}$$

$$+ \frac{35x^8}{128a^8}$$

Resid.

Refid. II.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6}-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4}-\frac{b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2}+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{9x^8}{128a^6}$$

L. C =

$$-\frac{b^4x^4}{8a^6}+\frac{b^4x^4}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^4}+\frac{b^2x^6}{8a^6}+\frac{b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^2}-\frac{3x^6}{16a^4}-\frac{3x^8}{64a^6}$$

Refid. III. =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8}-\frac{b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6}-\frac{b^2x^8}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{15x^8}{128a^6}$$

L. D =

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{10}}+\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^8}+\frac{b^4x^8}{32a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^6}+\frac{3b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^4}+\frac{5x^8}{32a^6}$$

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{14}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{12}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{10}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^8}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^6}$$

&c. &c.

 Subfti-

Substituatur jam valor ipsius b. Quoniam

$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^4 = a^4 - 2a^2c^2 + c^4$$
$$b^6 = a^6 - 3a^4c^2 + 3a^2c^4 - c^6$$
$$b^8 = a^8 - 4a^6c^2 + 6a^4c^4 - 4a^2c^6 + c^8$$

erit

1.

$$-\frac{b^2x^2}{2a^4} = -\frac{x^2}{2a^2} + \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$+\frac{x^2}{2a^2} = +\frac{x^2}{2a^2}$$
$$B = +\frac{c^2x^2}{2a^4}$$

2.

$$-\frac{b^4x^4}{8a^8} = -\frac{x^4}{8a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$-\frac{b^2x^4}{4a^6} = -\frac{x^4}{4a^4} + \frac{c^2x^4}{4a^6}$$
$$+\frac{3x^4}{8a^4} = +\frac{3x^4}{8a^4}$$
$$C = +\frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$

3.

$$-\frac{b^6x^6}{16a^{12}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8} - \frac{3c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$-\frac{b^4x^6}{16a^{10}} = -\frac{x^6}{16a^6} + \frac{c^2x^6}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{16a^{10}}$$
$$-\frac{3b^2x^6}{16a^8} = -\frac{3x^6}{16a^6} + \frac{3c^2x^6}{16a^8}$$
$$+\frac{5x^6}{16a^6} = +\frac{5x^6}{16a^6}$$
$$D = +\frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{4c^4x^6}{16a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$

4.

$$-\frac{5b^8x^8}{128a^{16}} = -\frac{5x^8}{128a^8} + \frac{5c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{30c^4x^8}{128a^{12}} + \frac{5c^6x^8}{32a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}$$
$$-\frac{b^6x^8}{32a^{14}} = -\frac{x^8}{32a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{32a^{12}} + \frac{c^6x^8}{32a^{14}}$$
$$-\frac{3b^4x^8}{64a^{12}} = -\frac{3x^8}{64a^8} + \frac{3c^2x^8}{32a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{64a^{12}}$$
$$-\frac{5b^2x^8}{32a^{10}} = -\frac{5x^8}{32a^8} - \frac{5c^2x^8}{32a^{10}}$$
$$+\frac{35x^8}{128a^8} = +\frac{35x^8}{128a^8}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}.$$

Habemus itaque

$$A = 1$$
$$B = \frac{c^2x^2}{2a^4}$$
$$C = \frac{c^2x^4}{2a^6} - \frac{c^4x^4}{8a^8}$$
$$D = \frac{c^2x^6}{2a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} + \frac{c^6x^6}{16a^{12}}$$
$$E = \frac{c^2x^8}{2a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}}.$$

Quamobrem prolixo satis calculo, quem tamen distincte hic explicari consultum fuit, ut sit exemplar in casibus similibus, tandem reperitur

$$\frac{\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$
$$\begin{array}{l} 1 + \frac{c^2x^2}{2a^4} + \frac{c^2x^4}{2a^6} + \frac{c^2x^6}{2a^8} + \frac{c^2x^8}{2a^{10}} \text{ \&c.} \\ \qquad - \frac{c^4x^4}{8a^8} - \frac{c^4x^6}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8}{8a^{12}} \\ \qquad\qquad + \frac{c^6x^6}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8}{16a^{14}} \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{5c^8x^8}{128a^{16}} \end{array}$$

Est

Tab. I. Fig. 10. Est igitur elementum arcus

$$\frac{dx\sqrt{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 - x^2)}} =$$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} + \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} + \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}}$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} - \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} + \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

&c. in infinitum.

Tandem adeo arcus GM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} + \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} - \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} + \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

Quodsi terminorum homogeneorum coëfficientes reducas ad eandem denominationem; erit $GM = x + \frac{c^2x^3}{6a^4} + \frac{4a^2c^2 - c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 - 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 + \frac{64a^6c^2 - 48a^4c^4 + 24a^2c^6 - 5c^8}{1152a^{16}}x^9$

COROLLARIUM I.

173. Quodsi ponamus esse GC : AC = 1 : *m* adeoque AC = *mc*; erit $GM = x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 + \frac{4m^2 - 1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4 - 4m^2 + 1}{112m^{12}c^6}x^7 + \frac{64m^6 - 48m^4 + 24m^2 - 5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Quare si species Ellipsis in casu dato determinetur, hoc est, *m* per numerum determinatum explicetur; prodibit series multo simplicior. Sit enim $m = 2$, erit GM = Tab. I. Fig. 10.

$$x + \frac{1}{96c^2}x^3 + \frac{3}{2048c^4}x^5 + \frac{113}{458752c^6}x^7 + \frac{3419}{75497472c^8}x^9 \text{ \&c.}$$

COROLLARIUM II.

174. Quodsi $c = a$, Ellipsis degenerat in Circulum & series pro Circulo evadit

$$x + \frac{x}{6a^2} + \frac{3x^5}{40a^4} + \frac{5x^7}{112a^6} + \frac{35x^9}{1152a^8} \text{ \&c.}$$

hoc est, si $a = 1$, series $= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9$ &c. prorsus ut supra (§. 153).

PROBLEMA LXIII.

175. *Rectificare arcum Hyperbolæ AM.* Tab. II. Fig. 24.

Sit BC = AC = c, CQ = PM = x, dimidius axis conjugatus = a, CP = y, erit BP = $y + c$, AP = $y - c$

$$AP \cdot PB = y^2 - c^2$$

Quare (§. 469 *part.* 1)

$$a^2 : c^2 = x^2 : y^2 - c^2$$
$$a^2y^2 - a^2c^2 = c^2x^2$$
$$a^2y^2 = a^2c^2 + c^2x^2$$
$$2a^2ydy = 2c^2xdx$$
$$a^4y^2dy^2 = c^4x^2dx^2$$

h.c. $a^4c^2dy^2 + a^2c^2x^2dy^2 = c^4x^2dx^2$

$$a^4dy^2 + a^2x^2dy^2 = c^2x^2dx^2$$
$$dy^2 = \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$= \frac{a^4dx^2 + a^2x^2dx^2 + c^2x^2dx^2}{a^4 + a^2x^2}$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx\sqrt{(a^4 + a^2x^2 + c^2x^2)}}{a\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

 Ele-

Tab.II. *Fig.*24. Elementum hoc nonnisi signis differt ab elemento Ellipsis (§.172). Quamobrem, eodem prorsus modo quo in Problemate præcedente, reperitur elementum arcus $Mm =$

$$dx + \frac{c^2x^2dx}{2a^4} - \frac{c^2x^4dx}{2a^6} + \frac{c^2x^6dx}{2a^8} - \frac{c^2x^8dx}{2a^{10}} \&c.$$
$$- \frac{c^4x^4dx}{8a^8} + \frac{c^4x^6dx}{4a^{10}} - \frac{3c^4x^8dx}{8a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^6dx}{16a^{12}} - \frac{3c^6x^8dx}{16a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^8dx}{128a^{16}}$$

Quare arcus AM =

$$x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{c^2x^5}{10a^6} + \frac{c^2x^7}{14a^8} - \frac{c^2x^9}{18a^{10}} \&c.$$
$$- \frac{c^4x^5}{40a^8} + \frac{c^4x^7}{28a^{10}} - \frac{c^4x^9}{24a^{12}}$$
$$+ \frac{c^6x^7}{112a^{12}} - \frac{c^6x^9}{48a^{14}}$$
$$- \frac{5c^8x^9}{1152a^{16}}$$

hoc est, reductione coëfficientium in eodem termino ad eandem denominationem facta, $x + \frac{c^2x^3}{6a^4} - \frac{4a^2c^2 + c^4}{40a^8}x^5 + \frac{8a^4c^2 + 4a^2c^4 + c^6}{112a^{12}}x^7 - \frac{64a^6c^2 + 48a^4c^4 + 24a^2c^6 + 5c^8}{1152a^{16}}x^9$ &c.

Quodsi denuo Hyperbolæ axes ponantur inter se ut 1 ad m, hoc est, si sit $a = mc$, reperietur arcus AM $= x + \frac{1}{6m^4c^2}x^3 - \frac{4m^2+1}{40m^8c^4}x^5 + \frac{8m^4+4m^2+1}{112m^{12}c^6}x^7 - \frac{64m^6+48m^4+24m^2+5}{1152m^{16}c^8}x^9$ &c.

Et si species Hyperbolæ determinetur, explicando m per numerum determinatum 2, erit AM $= x + \frac{1}{96c^2}x^3 - \frac{17}{1024c^4}x^5 + \frac{145}{458752c^6}x^7 - \frac{4965}{75497472c^8}x^9$ &c. Tab.II. *Fig.*24.

Series adeo pro arcu hyperbolico à serie pro arcu elliptico non differt nisi signis, in formula generali.

COROLLARIUM.

176. Si Hyperbola fuerit æquilatera erit $c = a$, & series pro arcu AM multo simplicior evadit. Est nempe $= x + \frac{x^3}{6a^2} - \frac{5x^5}{40a^4} + \frac{13x^7}{112a^6} - \frac{141x^9}{1152a^8}$ &c.

PROBLEMA LXVI.

177. *Rectificare Logarithmicam.* Tab.I. *Fig.*8.

Sit curvæ subtangens $= a$, PM $= y$, P$p = dx$, erit (§.54)

$$\frac{ydx}{dy} = a$$
$$ydx = ady$$
$$dx = \frac{ady}{y}$$
$$dx^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$
$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2} + dy^2$$
$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)}$$

Ut elementum hoc mM integrabile reddatur, ex $a^2 : y^2 + 1$ extrahenda est radix. Erit itaque, in Theoremate generali (§.99 *part.*1)

$m = 1$

Tab. I. *Fig.* 8.

$m = 1, n = 2, P = \frac{a^2}{y^2}, Q = 1 : \frac{a^2}{y^2} = \frac{y^2}{a^2}$

$P^{m:n} = \frac{a}{y} = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . \frac{a}{y} . \frac{y^2}{a^2} = \frac{y}{2a} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{y}{2a} . \frac{y^2}{a^2} = -\frac{y^3}{8a^3} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{y^3}{8a^3} . \frac{y^2}{a^2} = +\frac{y^5}{16a^5} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{y^5}{16a^5} . \frac{y^2}{a^2} = -\frac{5y^7}{128a^7}$ &c.

Est itaque $\sqrt{(\frac{a^2}{y^2} + 1)} = \frac{a}{y} + \frac{y}{2a} - \frac{y^3}{8a^3} + \frac{y^5}{16a^5} - \frac{5y^7}{128a^7}$ &c. in infinitum.

Eadem series prodit, si ex $\sqrt{(a^2 + y^2)}$ extrahatur radix (§. *cit.*) &, quæ provenit, $a + \frac{y^2}{2a} - \frac{y^4}{8a^3} + \frac{y^6}{16a^5} - \frac{5y^8}{128a^7}$ porro dividatur per y. Habemus itaque elementum M*m* arcus interminati MI $= \frac{a}{y}dy + \frac{y}{2a}dy - \frac{y^3}{8a^3}dy + \frac{y^5}{16a^5}dy - \frac{5y^7}{128a^7}dy$ &c.

Quare arcus MI $= \int \frac{ady}{y} + \frac{y^2}{4a} - \frac{y^4}{32a^3} + \frac{y^6}{96a^5} - \frac{5y^8}{1024a^7}$ &c.

Ponatur SQ $= z$, erit arcus interminatus SI $= \int \frac{adz}{z} + \frac{z^2}{4a} - \frac{z^4}{32a^3} + \frac{z^6}{96a^5} - \frac{5z^8}{1024a^7}$ &c.

Est igitur arcus MS $= \int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z} + \frac{y^2 - z^2}{4a} - \frac{y^4 - z^4}{32a^3} + \frac{y^6 - z^6}{96a^5} - \frac{5y^8 - 5z^8}{1024a^7}$ &c.

$\int \frac{ady}{y} - \int \frac{adz}{z}$ est spatium hyperbolicum asymptoticum inter duas $a^2 : y$ & $a^2 : z$ comprehensum, & per a divisum (§. 118).

Est autem a latus potentiæ Hyperbolæ, y & z sunt abscissæ in asymptoto sumtæ (§. 488 *part.* 1). Pendet adeo rectificatio curvæ Logarithmicæ a quadratura Hyperbolæ, quæ per series infinitas in superioribus data (§. 120).

Potest etiam alia adhuc ratione extrahi radix. Nimirum poni potest $P = 1$, $Q = \frac{a^2}{y^2} = a^2 y^{-2}$. Quare cum sit ut ante $m = 1$, $n = 2$; erit

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . 1 . a^2 y^{-2} = \frac{1}{2} a^2 y^{-2} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{1}{2} a^2 y^{-2} . a^2 y^{-2} = -\frac{1}{8} a^4 y^{-4} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{1}{8} a^4 y^{-4} . a^2 y^{-2} = +\frac{1}{16} a^6 y^{-6} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{1}{16} a^6 y^{-6} . a^2 y^{-2} = -\frac{5}{128} a^8 y^{-8}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dy + \frac{1}{2} a^2 y^{-2} dy - \frac{1}{8} a^4 y^{-4} dy + \frac{1}{16} a^6 y^{-6} dy - \frac{5}{128} a^8 y^{-8} dy$ &c. in infinitum.

Quare longitudo curvæ $= y - \frac{1}{2} a^2 y^{-1} + \frac{1}{24} a^4 y^{-3} - \frac{1}{80} a^6 y^{-5} + \frac{5}{896} a^8 y^{-7}$ &c. $= y - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{5a^8}{896y^7}$ &c.

Sit jam alia semiordinata SQ $= z$, erit longitudo curvæ $= z - \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

Ergo arcus inter semiordinatas y & z interceptus $MS = y - z - \frac{a^2}{2y} + \frac{a^2}{2z} + \frac{a^4}{24y^3} - \frac{a^4}{24z^3} - \frac{a^6}{80y^5} + \frac{a^6}{80z^5} + \frac{5a^8}{896y^7} - \frac{5a^8}{896z^7}$ &c.

COROLLARIUM.

178. Quoniam series istæ satisfaciunt quæsito, quatenus convergunt, & termini continuo minores fiunt (§. 53 *part.* 1), in Logarithmica autem y continuo fit minor, ita ut tandem infra subtangentem a decrescat; serie prima utendum est, si $a > y$; posteriori autem si $y > a$.

PROBLEMA LXV.

179. *Rectificare Hyperbolam ex æquatione ad Hyperbolam intra asymptotos.*

Quoniam $xy = a^2$ (§. 488 *part.* 1), erit

$$y = a^2 : x = a^2 x^{-1}$$
$$dy = -a^2 x^{-2} dx$$
$$dy^2 = a^4 x^{-4} dx^2$$
$$dy^2 + dx^2 = dx^2 + a^4 x^{-4} dx$$
$$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dx \sqrt{(1 + a^4 x^{-4})}$$

Elementum hoc arcus Hyperbolici non multum differt ab elemento arcus Logarithmicæ (§. 177).

Vi Theorematis generalis (§. 99 *part.* 1)

$m = 1$, $n = 2$, $P = 1$, $Q = a^4 x^{-4}$

$P^{m:n} = 1 = A$

$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} . 1 . a^4 x^{-4} = \frac{1}{2} a^4 x^{-4} = B$

$\frac{m-n}{2n} BQ = -\frac{1}{4} . \frac{1}{2} a^4 x^{-4} . a^4 x^{-4} = \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} = C$

$\frac{m-2n}{3n} CQ = -\frac{3}{6} . -\frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} . a^4 x^{-4} = + \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} = D$

$\frac{m-3n}{4n} DQ = -\frac{5}{8} . \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} . a^4 x^{-4} = -\frac{1.3.5.}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16}$ &c.

Est igitur elementum curvæ $dx + \frac{1}{2} a^4 x^{-4} dx - \frac{1}{2.4} a^8 x^{-8} dx + \frac{1.3}{2.4.6} a^{12} x^{-12} dx - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} a^{16} x^{-16} dx$, &c. consequenter longitudo curvæ $= x - \frac{1}{2.3} a^4 x^{-3} + \frac{1}{2.4.7} a^8 x^{-7} - \frac{1.3}{2.4.6.11} a^{12} x^{-11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15} a^{16} x^{-15}$ &c. $= x - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}}$ &c. in infinitum.

Quodsi alia abscissa sit z; erit longitudo curvæ $z - \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c.

Arcus igitur inter semiordinatas abscissis x & z respondentes interceptus $= x - z - \frac{a^4}{2.3x^3} + \frac{a^4}{2.3z^3} + \frac{a^8}{2.4.7x^7} - \frac{a^8}{2.4.7z^7} - \frac{1.3a^{12}}{2.4.6.11x^{11}} + \frac{1.3.a^{12}}{2.4.6.11z^{11}} + \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15x^{15}} - \frac{1.3.5a^{16}}{2.4.6.8.15z^{15}}$ &c. in infinitum.

Eadem prorsus series prodit, si in elemento curvæ generali $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ substituatur valor ipsius dx^2, ut elementum curvæ speciale evadat $dy \sqrt{(1 + a^4 y^{-4})}$. Enimvero cum y continuo decrescat, nec unquam fit major latere potentiæ a; series hæc altera parum convergit.

Quod-

Quodsi a dicatur 1, erit series pro arcu intercepto $x - z - \frac{1}{2.3\,x^3} + \frac{1}{2.3\,z^3} + \frac{1}{2.4.7\,x^7} - \frac{1}{2.4.7\,z^7} - \frac{1.3.}{2.4.6.11\,x^{11}} + \frac{1.3}{2.4.6.11\,z^{11}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,x^{15}} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8.15\,z^{15}}$ &c. in infinitum $= x - z - \frac{1}{6x^3} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{56x^7} - \frac{1}{56z^7} - \frac{1}{176x^{11}} + \frac{1}{176z^{11}} + \frac{5}{1920x^{15}} - \frac{5}{1920z^{15}}$ &c. in infinitum.

PROBLEMA LXVI.

180. *Data area Hyperbolæ intra asymptotos; invenire abscissam eidem respondentem.*

Sit area Hyperbolæ $= t$, abscissa a fine lateris potentiæ Hyperbolæ computata $= x$, erit (§. 120)

$$t = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 \text{ \&c.}$$

Fiat $x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

crit $x^2 = \quad + a^2t^2 + 2abt^3 + b^2t^4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad + 2act^4$

$x^3 = \qquad + a^3t^3 + 3a^2bt^4$

$x^4 = \qquad + a^4t^4$

adeoque

$x = at + bt^2 + ct^3 + dt^4$ &c.

$-\tfrac{1}{2}x^2 = -\tfrac{1}{2}a^2t^2 - abt^3 - \tfrac{1}{2}b^2t^4$
$\qquad\qquad\qquad\qquad - act^4$

$+\tfrac{1}{3}x^3 = \qquad + \tfrac{1}{3}a^3t^3 + a^2bt^4$

$-\tfrac{1}{4}x^4 = \qquad - \tfrac{1}{4}a^4t^4$

$-t = -t$

Habemus itaque

$a - 1 = 0 \qquad b - \tfrac{1}{2}a^2 = 0$

$a = 1 \qquad b = \tfrac{1}{2}$

$c - ab + \tfrac{1}{3}a^3 = 0$

h. e. $c - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = 0$

$c = \tfrac{3}{6} - \tfrac{2}{6} = \tfrac{1}{6}$

$d - \tfrac{1}{2}b^2 - ac + a^2b - \tfrac{1}{4}a^4 = 0$

h. e. $d - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} = 0$

$d = \tfrac{14}{48} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{7}{24} - \tfrac{6}{24} = \tfrac{1}{24}$

Est igitur $x = t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{24}t^4$ &c. $= \tfrac{1}{1}t + \frac{1}{1.2}t^2 + \frac{1}{1.2.3}t^3 + \frac{1}{1.2.3.4}t^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}t^5$ &c. in infinitum. Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $x = t + \tfrac{1}{2}At + \tfrac{1}{3}Bt + \tfrac{1}{4}Ct + \tfrac{1}{5}Dt$ &c. in infinitum.

SCHOLION.

181. *Eodem prorsus modo in aliis casibus inveniri potest basis, si figuræ area datur per seriem infinitam, ut pluribus exemplis non sit opus.*

PROBLEMA LXVII.

182. *Quadrare Cycloidem, ex supposita arcus Circuli rectificatione vi sinus versi.*

In Cycloide est arcus AP $=$ PM (§. 575 *part.* 1). Jam si AQ $= x$, arcus AP, (§. 157) consequenter Tab. I. Fig. 7.

$$\text{PM} = x^{1:2} + \tfrac{1}{6}x^{3:2} + \tfrac{7}{40}x^{5:2} + \tfrac{5}{112}x^{7:2} \text{ \&c.}$$

$$\text{PQ} = x^{1:2} - \tfrac{1}{2}x^{3:2} - \tfrac{1}{8}x^{5:2} - \tfrac{1}{16}x^{7:2} \; (\text{§. } 124)$$

$$\text{QM} = 2x^{1:2} - \tfrac{1}{3}x^{3:2} - \tfrac{1}{20}x^{5:2} - \tfrac{1}{56}x^{7:2}$$

Quare elementum QM$mq = 2x^{1:2}dx - \tfrac{1}{3}x^{3:2}dx - \tfrac{1}{20}x^{5:2}dx - \tfrac{1}{56}x^{7:2}dx$ &c. prorsus ut supra (§. 131).

SCHO-

SCHOLION.

183. *Methodo hac quadrandi Cycloidem usus est* NEWTONUS (*a*): *quam ideo superiori addidimus, ut appareat, quomodo subinde quadraturæ curvarum ex aliarum rectificationibus deducantur. Etenim pro Circulo substitui possunt curvæ aliæ, quarum arcui* AP *æqualis est* PM. *Dari etiam possunt exempla, in quibus arcus datur non per abscissam, ut in exemplo præsente, sed per semiordinatam, veluti si* AP *sit Parabola* (*§.* 146).

PROBLEMA LXVIII.

184. *Data chorda arcus cujuscunque invenire chordam arcus alterius, qui sit ad illum in ratione data.*

Sit diameter circuli $= d$
chorda arcus dati $= a$
ratio arcuum $= 1 : n$
chorda arcus quæsiti $= x$
erit (§. 169).

arcus datus $= a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{1.3a^5}{2.4.5d^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7d^6}a^7$ &c $= a + \frac{1}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c.

arcus quæsitus $= x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7$ &c.

Quoniam arcus datus ad quæsitum ut 1 ad n; erit (§. 297 *Arithm.*)

$$na + \frac{n}{2.3d^2}a^3 + \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \text{ \&c.} = x + \frac{1}{2.3d^2}x^3 + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 + \frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 \text{ \&c.}$$

consequenter si prima series sit $=$ A altera B, erit B $-$ A $= 0$.

Fiat

$$\begin{aligned} x &= ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.} \\ x^3 &= \quad + h^3a^3 + 3h^2ia^5 + 3h^2ka^7 \\ &\qquad\qquad\qquad + 3hi^2a^7 \\ x^5 &= \qquad + h^5a^5 + 5h^4ia^7 \\ x^7 &= \qquad\qquad + h^7a^7 \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} x &= ha + ia^3 + ka^5 + la^7 \text{ \&c.} \\ +\frac{1}{2.3d^2}x^3 &= +\frac{1}{2.3d^2}h^3a^3 + \frac{1}{2d^2}h^2ia^5 + \frac{1}{2d^2}h^2ka^7 \text{ \&c.} \\ &\qquad + \frac{1}{2d^2}hi^2a^7 \text{ \&c.} \\ +\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}x^5 &= +\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5a^5 + \frac{3.3}{2.3.4d^4}h^4ia^7 \text{ \&c.} \\ +\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}x^7 &= +\frac{3.3.5.5}{2.3.4.5.6.7d^6}h^7a^7 \text{ \&c.} \\ \text{\&c \&c} & \qquad \text{\&c} \end{aligned}$$

$$-\text{A} = -na - \frac{n}{2.3d^2}a^3 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4}a^5 - \frac{3.3.5.5n}{2.3.4.5.6.7d^6}a^7 \text{ \&c.}$$

(*a*) In *Analysi per æquationes numero terminorum infinitas.* p. 18.

Habemus

Habemus itaque

$$h - n = 0$$
$$h = n$$
$$i + \frac{1}{2.3d^2}h^3 - \frac{n}{2.3d^2} = 0$$
$$i = \frac{n-n^3}{2.3d^2} = \frac{n.(1-n^2)}{2.3d^2}$$
$$k + \frac{1}{2d^2}h^2 i + \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} = 0$$
$$k = \frac{3.3n}{2.3.4.5d^4} - \frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 - \frac{1}{2d^2}h^2 i$$

Est vero

$$h^5 = n^5 \qquad h^2 = n^2$$
$$\frac{3.3}{2.3.4.5d^4}h^5 = \frac{9n^5}{2.3.4.5d^4} \qquad i = \frac{n-n^3}{2.3d^2}$$
$$h^2 i = \frac{n^3-n^5}{2.3d^2}$$
$$\frac{1h^2 i}{2d^2} = \frac{n^3-n^5}{3.4d^4}$$
$$= \frac{10n^3-10n^5}{2.3.4.5d^4}$$

Quamobrem

$$k = \frac{9n-9n^5-10n^3+10n^5}{2.3.4.5d^4}$$
$$= \frac{9n-10n^3+n^5}{2.3.4.5d^4}$$
$$= \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{2.3.4.5d^4}$$

Eodem modo reperitur $l = \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{2.3.4.5.6.7d^6}$

Est igitur chorda arcus quaesiti $= na + \frac{n.(1-n^2)a^3}{1.2.3d^2} + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2)}{1.2.3.4.5d^4}a^5 + \frac{n.(1-n^2).(9-n^2).(25-n^2)}{1.2.3.4.5.6.7d^6}a^7$ &c. in infinitum.

S C H O L I O N.

185. *Cum sinus sit arcus dupli subtensa dimidia* (§. 2 Trigon.); *formula praesens sinibus computandis inservit.*

P R O B L E M A LXIX.

186. *Quadrare sectorem Ellipsis* DCM.

Ducatur Cm ex centro C ipsi CM infinite propinqua, & ex eodem centro C radio CM describatur arcus MN, erit angulus ad N rectus (§. 38), & sector infinite parvus CMN = MN. ½ CM (§. 435 *Geom.*). Est vero $Mm^2 - Nm^2 = MN^2$ (§. 417 *Geom.*) Tab. IV. *Fig.* 50.

Sit jam $AC = a$, parameter $= b$,

$$PC = x,\ PM = y$$

erit

$$AP = a - x$$
$$PB = a + x$$
$$AP.\ PB = a^2 - x^2$$

consequenter (§. 420 *part.* I)

$$b : AB = PM^2 : AP.\ PB$$
$$b : 2a = y^2 : a^2 - x^2$$
$$y^2 = \frac{a^2b - bx^2}{2a} = \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$

Porro $CP^2 = x^2$

$$PM^2 = \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$
$$CM^2 = x^2 + \frac{2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$
$$= \frac{4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2}{4a^2}$$
$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2)}$$
$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2a^3b - 2abx^2)^{1:2}$$

Tab. IV. *Fig.* 50.

$$Nm = \frac{2axdx - bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Jam $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + c^2x^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$ (§. 172)

Est vero $c = \frac{1}{2}ab$ (§. 423 *part.* 1)

Ergo $Mm^2 = \frac{(a^4 - a^2x^2 + \frac{1}{2}abx^2)dx^2}{a^4 - a^2x^2}$

$$= \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2}$$

Habemus itaque

$$NM^2 = \frac{(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)dx^2}{2a^3b - 2abx^2} + \frac{-(4a^2x^2 - 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b}$$

Quodsi jam partes has ipsius NM^2 reducas ad eandem denominationem, prodibit $(2a^3b - 2abx^2 + b^2x^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b) = 8a^5bx^2 - 8a^3bx^4 + 8a^2b^2x^4 - 8a^4b^2x^2 - 2ab^3x^4 + 4a^6b^2 + 2a^3b^3x^2$ & $(-4a^2x^2 + 4abx^2 - b^2x^2)(2a^3b - 2abx^2) = -8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 - 2a^3b^3x^2 + 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 + 2ab^3x^4$.

Quare $NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^2}{(2a^3b - 2abx^2)(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$

adeoque $NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}}$

Jam cum sit $\frac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 - 2abx^2 + 2a^3b)}$; erit tandem elementum sectoris CMN $= \frac{a^2bdx}{2\sqrt{(2a^3b - 2abx^2)}}$

$$= \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{2ab}.\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Est vero $\sqrt{2ab} = 2c$. Ergo CMN $= \frac{2acdx}{4\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{acdx}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; consequenter sector BCM $= \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ Tab. IV. *Fig.* 50.

Enimvero $\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ est elementum arcus circuli LE radio CA descripti, cujus sinus est PC (§. 153). Quare cum in superioribus hunc arcum quadrare docuimus, non alia re opus est, quam ut is ducatur in $\frac{1}{2}c$, sive quartam partem axis minoris CD, ut prodeat sector ellipticus DCM.

COROLLARIUM.

187. Quodsi fiat $c = a$, hoc est CD = CE, Ellipsis degenerat in circulum, & formula pro sectore DCM degenerat in $\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \frac{1}{2}$CE. LE, adeoque sector ellipticus DCM in sectorem circuli ECL (§. 435 *Geom.*). Est itaque

$$DCM : ECL = \frac{1}{2}c\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} : \frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$$

$$= c : a \quad (\text{§. 124 } part.\ 1)$$

$$= CD : EL$$

hoc est, sector ellipticus DCM est ad sectorem circuli circa axem majorem descripti, sinu arcuum PC utrobique existente eodem, ut axis minor ad majorem.

SCHOLION.

188. *Pendet adeo quadratura sectoris elliptici à quadratura sectoris circuli.*

PROBLEMA LXX.

189. *Quadrare sectorem hyperbolicum* CAM, *radio* CM *ex centro* C *ducto.*

Intelligatur radius Cm ipsi CM infinite propinquus, & radio CM describatur Tab. IV. *Fig.* 51.

Tab. IV. *Fig.* 51.

batur arcus Circuli MN, erit ad N angulus rectus (§. 38), $MN^2 = Mm^2 - Nm^2$ (§. 417 *Geom.*) & $\frac{1}{2}$ CM. MN sector infinite parvus CMN (§. 435 *Geom.*), seu elementum sectoris hyperbolici quadrandi CAM.

Sit jam $PC = x$

$AC = CB = a$ erit $AP = x - a$

Parameter $= b$ $PB = x + a$

$AP.\,PB = x^2 - a^2$

adeoque (§ 459 *part.* 1)

$AB : b = AP.\,PB : PM^2$

$2a : b = x^2 - a^2 : PM^2$

Quare

$$PM^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$CP^2 = x^2$$

$$CM^2 = x^2 + \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{2ax^2 + bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$= \frac{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}{4a^2}$$

$$CM = \frac{1}{2a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$= \frac{1}{2a}(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)^{1:2}$$

$$Nm = \frac{2axdx + bxdx}{\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$Nm^2 = \frac{dx^2\,(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$\text{Jam } y^2 = \frac{bx^2 - ba^2}{2a}$$

$$2ydy = \frac{2bxdx}{2a}$$

$$y^2dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2}$$

$$dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{4a^2y^2}$$

$$= \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$dx^2 + dy^2 = \frac{b^2x^2dx^2}{2abx^2 - 2a^3b} + dx^2$$

$$\text{h. e. } Mm^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$Nm^2 = \frac{(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

$$NM^2 = \frac{(b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)dx^2}{2abx^2 - 2a^3b}$$

$$+ \frac{-(4a^2x^2 + 4abx^2 + b^2x^2)dx^2}{4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b}$$

Si fiat reductio ad eandem denominationem (§. 235 *Arithm.*), reperitur

$$b^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$
$$4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b$$

$$- 2a^3b^3x^2 - 4a^4b^2x^2 + 4a^6b^2$$
$$+ 2ab^3x^4 + 4a^2b^2x^4 - 4a^4b^2x^2$$
$$+ 4a^2b^2x^4 + 8a^3bx^4 - 8a^5bx^2$$

&

$$- 4a^2x^2 - 4abx^2 - b^2x^2$$
$$2abx^2 - 2a^3b$$

$$+ 8a^5bx^2 + 8a^4b^2x^2 + 2a^3b^3x^2$$
$$- 8a^3bx^4 - 8a^2b^2x^4 - 2ab^3x^4$$

consequenter productis hisce in unam summam collectis,

$$NM^2 = \frac{4a^6b^2dx^6}{(2abx^2 - 2a^3b)(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

$$NM = \frac{2a^3bdx}{\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}}$$

$$\text{Jam } \tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4a}\sqrt{(4a^2x^2 + 2abx^2 - 2a^3b)}$$

 $\frac{1}{2}$ CM.

Tab. IV. *Fig.* 51.

$$\tfrac{1}{2}\text{CM. NM.} = \frac{2a^2bdx}{4\sqrt{(2abx^2 - 2a^3b)}} = \frac{adx\sqrt{2ab}}{4\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Est vero $\sqrt{2ab}$ axis conjugatus (§. 461 *part.* 1) qui si dicatur $2c$; erit sectoris hyperbolici elementum

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

Jam in Hyperbola æquilatera $a = c$ (§. 505 *part.* 1). Ergo elementum sectoris $= \frac{a^2dx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}}$.

Resolvatur $1 : \sqrt{(x^2 - a^2)} = (x^2 - a^2)^{-1:2}$ in seriem (§. 99 *part.* 1) erit

$$m = -1, n = 2, \text{P} = x^2, \text{Q} = -\frac{a^2}{x^2} = -a^2x^{-2}$$

$$\text{P}^{m:n} = x^{-1} = \text{A}$$

$$\frac{m}{n}\text{AQ} = -\tfrac{1}{2}x^{-1}. -a^2x^{-2} = +\tfrac{1}{2}a^2x^{-3} = \text{B}$$

$$\frac{m-n}{2n}\text{BQ} = -\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{2}a^2x^{-3}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5} = \text{C}$$

$$\frac{m-2n}{3n}\text{CQ} = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7} = \text{D}$$

$$\frac{m-3n}{4n}\text{DQ} = \tfrac{7}{8}.\frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}. - a^2x^{-2} = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}$$

Habemus itaque

$$\frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} = x^{-1}dx + \tfrac{1}{2}a^2x^{-3}dx + \frac{1.3}{2.4}a^4x^{-5}dx + \frac{1.3.5}{2.4.6}a^6x^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}a^8x^{-9}dx \text{ \&c. in infinitum.}$$

Quare $\frac{acdx}{2\sqrt{(x^2 - a^2)}} = \tfrac{1}{2}acx^{-1}dx + \tfrac{1}{4}a^3cx^{-3}dx + \frac{1.3}{4.4}a^5cx^{-5}dx + \frac{1.3.5}{4.4.6}a^7cx^{-7}dx + \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8}a^8cx^{-9}dx$ &c.

Tab. IV. *Fig.* 51.

Habemus itaque sectorem CAM

$$= \tfrac{1}{2}a\textstyle\int cx^{-1}dx - \frac{1}{2.4}a^3cx^{-2} - \frac{1.3}{4.4.4}a^5cx^{-4} - \frac{1.3.5}{4.4.6.6}a^7cx^{-6} - \frac{1.3.5.7}{4.4.6.8.8}a^9cx^{-8}$$

$$\text{\&c.} = \tfrac{1}{2}ac\textstyle\int x^{-1}dx - \frac{a^3c}{2.4x^2} - \frac{1.3}{4.4.4x^4}a^5c - \frac{1.3.5a^7c}{4.4.6.6x^6} - \frac{1.3.5.7a^9c}{4.4.6.8.8x^8} \text{ \&c. in inf.}$$

Quoniam $\tfrac{1}{2}ac\int x^{-1}dx$ pendet a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos (§. 120); evidens est quadraturam sectoris hyperbolici in hoc casu supponere quadraturam Hyperbolæ intra asymptotos.

Quodsi Hyperbola ad axem secundum referenda, fiat dimidius axis secundus CD $= c$, CA $=$ CB $= a$, CQ $=$ PM $= x$, CP $=$ QM $= y$, erit PM² $= x^2$, AP. PB $= y^2 - a^2$ & (§. 469 *part.* 1).

$$\text{AC}^2 : \text{CD}^2 = \text{AP. PB} : \text{PM}^2$$

$$a^2 : c^2 = y^2 - a^2 : x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} - c^2 = x^2$$

$$\frac{c^2y^2}{a^2} = x^2 + c^2$$

Quoniam linea, quæ est tertia proportionalis ad axem secundum 2CD & primarium AB dicitur parameter respectu axis secundi, quemadmodum parameter

Tab. IV. Fig. 51. rameter respectu axis primarii AB est tertia proportionalis ad AB & 2CD (§. 461 *part.* 1); si parameter respectu axis 2CD dicatur p, erit $c : a = 2a : p$, adeoque $2a^2 : c = p$, consequenter $2a^2 : c^2 = p : c$, & $c^2 : a^2 = 2c : p$. Hoc valore ipsius $c^2 : a^2$ in æquatione substituto, prodit

$$\frac{2cy^2}{p} = x^2 + c^2$$

$$y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

Jam $PM^2 = x^2$

$$\text{Ergo } CM^2 = x^2 + \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{2cx^2 + px^2 + pc^2}{2c}$$

$$= \frac{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}{4c^2}$$

$$CM = \frac{1}{2c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$Nm = \frac{2cxdx + pxdx}{\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\text{Porro } y^2 = \frac{px^2 + pc^2}{2c}$$

$$\text{adeoque } 2ydy = \frac{2pxdx}{2c}$$

$$dy^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{4c^2y^2}$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Mm^2 = \frac{p^2x^2dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3} + dx^2$$

$$= \frac{p^2x^2dx^2 + 2pcx^2dx^2 + 2pc^3dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$Nm^2 = \frac{(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3}$$

Tab. IV. Fig. 51.

$$NM^2 = \frac{(p^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)dx^2}{2pcx^2 + 2pc^3}$$

$$+ \frac{-(4c^2x^2 + 4pcx^2 + p^2x^2)dx^2}{4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3} =$$

$$\frac{4p^2c^6dx^2}{(2pcx^2 + 2pc^3)(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$NM = \frac{2pc^3dx}{\sqrt{(2pcx^2 + 2pc^3)}.\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}}$$

$$\tfrac{1}{2}CM = \frac{1}{4c}\sqrt{(4c^2x^2 + 2pcx^2 + 2pc^3)}$$

$$CMN = \frac{2pc^2dx}{4\sqrt{2pc}.\sqrt{(x^2 + c^2)}} = \frac{cdx\sqrt{2pc}}{4\sqrt{(c^2 + x^2)}}$$

$$= \frac{acdx}{2\sqrt{(c^2 + x^2)}} \text{ ob } \sqrt{2pc} = 2a$$

$$= \tfrac{1}{2}acdx(c^2 + x^2)^{-1:2}$$

Resolvatur $1 : \sqrt{(c^2 + x^2)}$ in seriem: erit in Theoremate generali (§. 99 *part.* 1.)

$$m = -1,\ n = 2,\ P = c^2,\ Q = \frac{x^2}{c^2}$$

$$P^{m:n} = c^{-1} = \frac{1}{c} = A$$

$$\frac{m}{n}AQ = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{c}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{x^2}{2c^3} = B$$

$$\frac{m-n}{2n}BQ = -\tfrac{3}{4}.-\frac{x^2}{2c^3}.\frac{x^2}{c^2} = +\frac{1.3x^4}{2.4c^5} = C$$

$$\frac{m-2n}{3n}CQ = -\tfrac{5}{6}.\frac{1.3x^4}{2.4c^5}.\frac{x^2}{c^2} = -\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7} = D$$

$$\frac{m-3n}{4n}DQ = -\tfrac{7}{8}.-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6c^7}.\frac{x^2}{c^2} = \frac{1.3.5.7x^8}{2.4.6.8c^9} \text{ \&c.}$$

 Est

Tab. IV. Fig. 51. Est itaque $\frac{acdx}{2\sqrt{(c^2+x^2)}} = \frac{1}{2}adx - \frac{ax^2dx}{4c^2} + \frac{1.3ax^4dx}{4.4c^4} - \frac{1.3.5ax^6dx}{4.4.6c^6} + \frac{1.3.5.7ax^8dx}{4.4.6.8c^8}$ &c. consequenter CMA $= \frac{1}{2}ax - \frac{ax^3}{3.4c^2} + \frac{1.3ax^5}{4.4.5c^4} - \frac{1.3.5ax^7}{4.4.6.7c^6} + \frac{1.3.5.7ax^9}{4.4.6.8.9c^8}$ &c.

Patet igitur, quadraturam sectoris hyperbolici CAM hoc in casu non pendere a quadratura Hyperbolæ intra asymptotos. Quoniam tamen x ultra a in infinitum excrescit; ubi procul a vertice discesseris, series posterior minus convergit priori; sed quandiu $x < a$, eadem magis convergit.

COROLLARIUM I.

190. Quoniam in Hyperbola $y^2 = (bx^2 + bc^2) : 2c$; erit $2c : b = x^2 + c^2 : y^2$, hoc est, axis secundus seu conjugatus est ad ipsius parametrum ut quadratum semiordinatæ PM & dimidii axis conjugati CD ad quadratum distantiæ semiordinatæ a centro CP.

COROLLARIUM II.

191. Cum in Hyperbola æquilatera sit $c = a$, sector hyperbolicus est $\int(a^2 dx : 2\sqrt{(a^2+x^2)}) = \frac{1}{2}ax - \frac{x^3}{3.4a} + \frac{1.3x^5}{4.4.5a^3} - \frac{1.3.5x^7}{4.4.6.7a^5} + \frac{1.3.5.7x^9}{4.4.6.8.9a^7}$ &c.

PROBLEMA LXXI.

Tab. IV. Fig. 52. 192. *Data tangente* AE *arcus elliptici* AM; *invenire sectorem* AMC.

Quoniam tangens AE axi conjugato DC est parallela (§. 448, 444 *part.* 1), DC vero ad AB perpendicularis; erit etiam EA perpendicularis ad AB (§. 230 *Geom.*), adeoque angulus ad A rectus (§. 78 *Geom.*). Sit jam AC $= a$, CD $= 1$, AE $= x$, PM $= y$. Ducatur Ce ipsi CE infinite propinqua, & ex centro C radio CE arcus EN, atque radio CM arcus MO. Erit $\triangle$ EeN $\backsim \triangle$ AEC, quemadmodum supra in casu simili (§. 124) demonstratum est, Ee $= dx$, & ob EC^2 = AE^2 + AC^2 (§. 417 *Geom.*) EC $= \sqrt{(x^2 + a^2)}$. Jam cum sit (§. 267 *Geom.*)

$$EC : AC = Ee : EN$$
$$\sqrt{(x^2 + a^2)} : a = dx : EN$$

erit $EN = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}}$

Porro, ob parallelismum rectarum AE & PM (§. 256 *Geom.*), erit (§. 268 *Geom.*)

$$EA : AC = PM : PC$$
$$x : a = y : PC$$

adeoque $PC = \frac{ay}{x}$

$$PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Porro (§. 432 *part.* 1)

$$CD^2 : AC^2 = PM^2 : AC^2 - PC^2$$
$$1 : a^2 = y^2 : a^2 - \frac{a^2y^2}{x^2}$$

Quare (§. 297 *Arithm.*)

$$a^2y^2 = \frac{a^2x^2 - a^2y^2}{x^2}$$
$$x^2y^2 = x^2 - y^2$$
$$x^2y^2 + y^2 = x^2$$
$$PM^2 = y^2 = \frac{x^2}{x^2+1}$$

PC^2

Tab. IV. *Fig.* 52. $PC^2 = \frac{a^2y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2+1}$

$CM^2 = \frac{x^2+a^2}{x^2+1}$

$CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}}$

Denique ob sectores similes CEN & CMO (§. 137, 412 *Geom.*)

CE : EN = CM : OM

$\sqrt{(x^2+a^2)} : \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{\sqrt{(x^2+1)}} : OM$

adeoque $OM = \frac{adx}{\sqrt{(x^2+a^2)}\sqrt{(x^2+1)}}$

Jam $\frac{1}{2} CM = \frac{\sqrt{(x^2+a^2)}}{2\sqrt{(x^2+1)}}$

Ergo $CMO = \frac{\frac{1}{2} adx}{1+x^2}$

Est igitur elementum sectoris elliptici ACE idem cum sectore circuli (§. 124), si CD = 1.

Quare sector $AMC = \frac{1}{2}a(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$ &c. in infinit.).

PROBLEMA LXXII.

Tab. IV. *Fig.* 52. 193. *Dato sectore* KFB, *recta* KF *ex foco Ellipsis ducta; invenire semiordinatam* KQ.

Sit $AC = CB = a$, $QK = y$,
$FB = b$, sector $KFB = \frac{1}{2}v$,
$CD = c$, erit differentiale ejus $\frac{1}{2}dv$ & ob $QB.QA = BC^2 - QC^2$ (§. 431 *part.* 1) ex natura Ellipsis (§. 430 *part.* 1)

$CD^2 : CB^2 = QK^2 : CB^2 - QC^2$

adeoque $CD^2 : QK^2 = CB^2 : CB^2 - QC^2$ (§. 124 *part.* 1.)

$CD^2 : CD^2 - QK^2 = CB^2 : QC^2$

$c^2 : c^2 - y^2 = a^2 :$

consequenter $CQ^2 = a^2(c^2 - y^2) : c^2$

$CQ = a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
$CB = a$

$QB = a - a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
$FB = b$

$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$

Differentiale ipsius $FQ = \frac{aydy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$KQ = y$

Elementum segmenti $KQB = \frac{ay^2dy}{c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

Porro

$FQ = b - a + a\sqrt{(c^2 - y^2)} : c$
$\frac{1}{2} QK = \frac{1}{2}y$

$\triangle FQK = \frac{1}{2}by - \frac{1}{2}ay + ay\sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$

differentiale $\triangle FQK = \frac{1}{2}bdy - \frac{1}{2}ady - \frac{ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}} + ady\sqrt{(c^2 - y^2)} : 2c$

hoc est, reductione ad eandem denominationem facta.

$d\triangle FQK = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)}dy + (ac^2 - 2ay^2)dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$dKQB = \frac{2ay^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$

$dFKB = \frac{(bc - ac)\sqrt{(c^2 - y^2)}dy + ac^2dy}{2c\sqrt{(c^2 - y^2)}}$
$= \frac{ac + (b-a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}}dy$

Habemus itaque

$\frac{ac + (b-a)\sqrt{(c^2 - y^2)}}{2\sqrt{(c^2 - y^2)}}dy = \frac{1}{2}dv$

$(ac + (b-a)\sqrt{(c^2 - y^2)})dy = dv\sqrt{(c^2 - y^2)}$

$\frac{dy}{dv}(ac + (b-a)\sqrt{(c^2 - y^2)}) = \sqrt{(c^2 - y^2)}$

dy

$\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}=0$

Jam ut valor ipsius y per v exprimatur, quod est quod quæritur, fiat

$y=hv+iv^3+lv^5+mv^7$ &c.

erit $dy=hdv+3iv^2dv+5lv^4dv+7mv^6dv$ &c.

$$\frac{dy}{dv}=h+3iv^2+5lv^4+7mv^6, \text{ \&c.}$$

$$y^2=h^2v^2+2hiv^4+i^2v^6 + 2hlv^6 \text{ \&c.}$$

$$y^4=h^4v^4+4h^3iv^6 \text{ \&c.}$$

$$y^6=h^6v^6 \text{ \&c.}$$

Porro (§. 99 *part.* I)

$$\sqrt{(c^2-y^2)}=c-\frac{y^2}{2c}-\frac{y^4}{8c^3}-\frac{y^6}{16c^5} \text{ \&c.}$$

$$=c-\frac{h^2v^2}{2c}-\frac{2hiv^4}{2c}-\frac{i^2v^6}{2c} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{2hlv^6}{2c} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{h^4v^4}{8c^3}-\frac{4h^3iv^6}{8c^3} \text{ \&c.}$$

$$-\frac{h^6v^6}{16c^5} \text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}=bh+3biv^2+5blv^4+7bmv^6 \text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}=bch+3bciv^2+5bclv^4+7bcmv^6$$

$$-\frac{bh^3}{2c}v^2-\frac{2bh^2i}{2c}v^4-\frac{bhi^2}{2c}v^6$$

$$-\frac{2bh^2l}{2c}v^6$$

$$-\frac{bh^5}{8c^3}v^4-\frac{4bh^4i}{8c^3}v^6$$

$$-\frac{3bh^2i}{2c}v^4-\frac{bh^7}{16c^5}v^6$$

$$-\frac{6bhi^2}{2c}v^6$$

$$-\frac{5bh^2l}{2c}v^6$$

$$-\frac{3bh^4i}{8c^3}v$$

Quodsi pro b substituatur a, prodibit valor ipsius $\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)}$.

Quamobrem, si hi valores in æquatione $\frac{dy}{dv}(ac+(b-a)\sqrt{(c^2-y^2)})-\sqrt{(c^2-y^2)}$ $=0$ substituantur, prodibit

$$\frac{acdy}{dv} = ach + 3aciv^2 + 5aclv^4 + 7acmv^6 \text{ \&c.}$$

$$\frac{bdy}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = bch + 3bciv^2 + 5bclv^4 + 7bcmv^6 \text{ \&c.}$$
$$- \frac{bh^3}{2c}v^2 - \frac{5bh^2i}{2c}v^4 - \frac{bhi^2}{2c}v^6$$
$$- \frac{7bh^2l}{2c}v^6$$
$$- \frac{bh^5}{8c^3}v^4 - \frac{7bh^4i}{8c^3}v^6$$
$$- \frac{bh^7}{16c^5}v^6$$
$$- \frac{6bbi^2}{2c}v^6$$

$$-\frac{ady}{dv}\sqrt{(c^2-y^2)} = -ach - 3aciv^2 - 5aclv^4 - 7acmv^6 \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{ah^3}{2c}v^2 + \frac{5ah^2i}{2c}v^4 + \frac{ahi^2}{2c}v^6$$
$$+ \frac{7ah^2l}{2c}v^6$$
$$- \frac{ah^5}{8c^3}v^4 + \frac{7ah^4i}{8c^3}v^6$$
$$+ \frac{ah^7}{16c^5}v^6$$
$$+ \frac{6abi^2}{2c}v^6$$

$$-\sqrt{(c^2-y^2)} = -c + \frac{h^2}{2c}v^2 + \frac{2hi}{2c}v^4 + \frac{i^2}{2c}v^6 \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{2hl}{2c}v^6$$
$$+ \frac{h^4}{8c^3}v^4 + \frac{4h\,i}{8c^3}v^6$$
$$+ \frac{h^6}{16c^5}v^6 = 0$$

Habemus itaque

$$ach + bch - ach - c = 0$$
$$bch - c = 0$$
$$bh - 1 = 0$$
$$bh = 1$$
$$h = 1 : b$$
$$3aci + 3bci - \frac{bh^3}{2c} - 3aci + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$

$$3bci - \frac{bh^3}{2c} + \frac{ah^3}{2c} + \frac{h^2}{2c} = 0$$
$$6bc^2i - bh^3 + ah^3 + h^2 = 0$$
$$6bc^2i = bh^3 - ah^3 - h^2$$
$$= \frac{1}{b^2} - \frac{a}{b^3} - \frac{1}{b^2}$$
$$= -\frac{a}{b^3}$$
$$i = -\frac{a}{6b^4c^2}$$

$$5acl + 5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} - 5acl$$
$$+ \frac{5ah^2i}{2c} + \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

hoc eſt, $5bcl - \frac{5bh^2i}{2c} - \frac{bh^5}{8c^3} + \frac{5ah^2i}{2c}$
$$+ \frac{ah^5}{8c^3} + \frac{2hi}{2c} + \frac{h^4}{8c^3} = 0$$

$$40bc^4l - 20bc^2h^2i - bh^5 + 20ac^2h^2i$$
$$+ ah^5 + 8c^2hi + h^4 = 0$$

$$40bc^4l = 20bc^2h^2i + bh^5 - 20ac^2h^2i - ah^5$$
$$- 8c^2hi - h^4$$

$$h^2 = \frac{1}{b^2} \qquad bh^5 = \frac{1}{b^4}$$

$$i = -\frac{a}{6b^4c^2} \qquad -ah^5 = -\frac{a}{b^5}$$

$$h^2i = -\frac{a}{6b^6c^2} \qquad hi = -\frac{a}{6b^5c^2}$$

$$20bc^2h^2i = -\frac{10a}{3b^5} \qquad -8c^2hi = +\frac{4a}{3b^5}$$

$$-20ac^2h^2i = +\frac{10a^2}{3b^6}$$

Ergo $40bc^4l =$

$$-\frac{10a}{3b^5} + \frac{1}{b^4} + \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{3a}{3b^5} + \frac{4a}{3b^5} - \frac{1}{b^4}$$
$$= \frac{10a^2}{3b^6} - \frac{9a}{3b^5} = \frac{10a^2 - 9ab}{3b^6}$$

$$l = \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}$$

Reperitur eodem modo $m = -\frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}$, adeoque tandem $y = \frac{1}{b}v - \frac{a}{6b^4c^2}v^3 + \frac{10a^2 - 9ab}{120b^7c^4}v^5 - \frac{280a^3 + 504a^2b - 225ab^2}{5040b^{10}c^6}v^7$, &c.

PROBLEMA LXXIII.

194. *Quadrare ſectorem hyperbolicum* CAM, *data tangente ad verticem* AE. Tab. IV. Fig. 53.

Calculus prorſus idem, qui ſupra pro Ellipſi in caſu ſimili (§. 192). Si enim $AC = CB = a$ $PM = y$

$AE = x$ $CD = 1$

erit $Ee = dx$ $EC = \sqrt{(x^2 + a^2)}$ &, ob △△ AEC & EeN ſimilitudinem, $EN = adx : \sqrt{(x^2 + a^2)}$; ob ſimilitudinem vero △△CPM & CAE, ut in Ellipſi, $PC = ay : x$, atque, ob analogiam $CD^2 : AC^2 = PM^2 : PC^2 - AC^2$ ex natura hyperbolæ (§. 469 *part.* I) $a^2y^2 = (a^2y^2 - a^2x^2) : x^2$. Hinc ut ſupra reperitur $CM = \sqrt{(a^2 + x^2)} : \sqrt{(1 - x^2)}$, & ob $CE : EN = CM : OM$, porro $OM = adx : \sqrt{(a^2 + x^2)}\sqrt{(1 - x^2)}$, tandemque elementum MOC ſectoris CMA $= \frac{\frac{1}{2}adx}{1 - x^2}$: quod idem prorſus eſt, quod pro Ellipſi & Circulo reperimus, (§. 124, 192) niſi quod illic ſit $+x^2$, hic $-x^2$. Unde prodit, ut ſupra, ſector CMA, $\frac{1}{2}a\,(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$, &c. in infin.).

COROLLARIUM.

195. Eadem ergo ſeries ſectoribus circuli, ellipſis, atque hyperbolæ ex data tangente inveniendis inſervit, niſi quod pro hyperbola ſigna omnia ſint poſitiva.

CAPUT

CAPUT IV.

De usu Calculi integralis in cubandis Solidis & dimetiendis superficiebus eorundem.

DEFINITIO VIII.

196. *Solidum cubare* idem est ac spatium solido comprehensum dimetiri.

PROBLEMA LXXIV.

Tab.II. Fig.19. 197. *Cubare solidum ex rotatione figuræ planæ* ANQ *circa rectam* AQ *tanquam axem facta genitum.*

RESOLUTIO.

Sit semiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua: parallelogrammulum PMR*p* haud differet a trapeziolo PM*mp* (§. 99). Cylindrulus ergo, quem in rotatione figuræ ANQ circa axem AQ describit parallelogrammulum PMR*p* (§. 465 *Geom.*) est elementum solidi per illam rotationem producti: cujus adeo summa dat integrum solidum, quia ex innumeris cylindrulis eodem modo formatis constare concipitur.

Sit jam AP $=x$, PM $=y$, erit P*p* $=dx$. Sit porro ratio radii ad peripheriam $=r:p$, erit peripheria circuli radio PM descripti $=py:r$; consequenter area $py^2:2r$ (§. 429 *Geom.*), quæ ducta in P*p*, sive dx, dat soliditatem cylindruli seu elementi solidi $=py^2dx:2r$ (§. 541 *Geom.*).

Quodsi jam ex æquatione ad curvam speciali substituatur valor ipsius y^2; habebitur, si elementum integrari possit, soliditas segmenti, cujus altitudo AP, radius basis PM, hoc est revolutione ipsius AMP circa AP geniti.

PROBLEMA LXXV.

198. *Cubare Conum.* Tab.II. Fig.17.

Conus describitur, si triangulum ADC circa axem DC rotatur (§. 467 *Geom.*). Sit DC $=a$, AC $=r$, PM $=y$, DP $=x$; erit (§. 268 *Geom.*).

$$DP : PM = DC : CA$$
$$x : y = a : r$$

Hinc $rx : a = y$

& $r^2x^2 : a^2 = y^2$

$$py^2\,dx : 2r = pr^2x^2dx : 2a^2r = prx^2dx : 2a^2$$ (§. 197).

$$\int py^2\,dx : 2r = prx^3 : 6a^2.$$

Quodsi pro x substituatur a; habebitur soliditas totius Coni, $pra^3 : 6a^2 = \frac{1}{6}apr = \frac{1}{2}pr \cdot \frac{1}{3}a$. Basis nempe $\frac{1}{2}pr$ ducenda est in tertiam altitudinis partem $\frac{1}{3}a$, ut ex Elementis Geometriæ constat (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVI.

199. *Cubare Sphæram.*

Sphæra cum describatur per rotationem semicirculi circa diametrum ejus (§. 470 *Geom.*); erit, si diameter sit $2r$,

$$yy = 2rx - x^2 \quad (\text{§. } 377\ part.\ 1).$$

Unde $py^2dx : 2r = pxdx - px^2dx : 2r$

$$\int py^2dx : 2r = \tfrac{1}{2}px^2 - px^3 : 6r$$

Habemus adeo indefinitam cubationem segmenti sphærici, cujus diameter $2r$, altitudo x.

Quodsi ergo pro x substituatur diameter $2r$; prodibit soliditas sphæræ integræ $2pr^2 - 8pr^3 : 6r = 2pr^2 - \frac{4}{3}pr^2 = \frac{2}{3}pr^2 = 2rp . \frac{1}{3}r$. Nimirum rectangulum ex diametro $2r$ in peripheriam p multiplicandum est per tertiam radii, aut sextam diametri partem $\frac{1}{3}r$. Denique si diameter $2r$ sit 1; erit soliditas sphæræ $\frac{1}{6}p$.

COROLLARIUM I.

200. Sphæra igitur æquatur pyramidi quadrangulari, cujus basis est rectangulum ex diametro sphæræ $2r$ in peripheriam eadem descriptam, altitudo semidiameter sphæræ (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

201. Cylindri sphæræ circumscripti soliditas est pr^2 (§. 541 *Geom.*). Est itaque ad sphæram ut pr^2 ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, seu ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXVII.

202. *Cubare Conoides parabolicum, ex rotatione parabolæ cujuscunque generis circa axem suum genitum.*

Sit parameter $= 1$, erit æquatio ad infinita parabolarum genera (§. 519 *part.* 1)

$$y^m = x$$

$$y = x^{1:m}$$

$$y^2 = x^{2:m}$$

$$py^2dx : 2r = px^{2:m}\,dx : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = mpx^{2:m+1} : (4 + 2m)\,r$$

$$= mpy^2x : (4 + 2m)\,r$$

Sit altitudo totius conoidis $= a$, diameter baseos $2r$: erit a pro x, & r pro y substituto, soliditas totius conoidis

$$mpr^2a : (4 + 2m)\,r = \frac{m}{4 + 2m}apr$$

$$= \frac{1}{2}pr . \frac{m}{2 + m}a.$$

Ex. gr. Si parabola genitrix fuerit *Apolloniana*, erit $m = 2$, adeoque $m : (2 + m) = 2 : (2 + 2) = \frac{1}{2}$. Basis ergo ducenda est in dimidiam altitudinem: consequenter conoides cylindri super eadem basi & ejusdem altitudinis subduplum (§. 541 *Geom.*).

PROBLEMA LXXVIII.

203. *Cubare sphæroides ellipticum ex rotatione Ellipsis* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Ellipsin *Apollonianam* (§. 420 *part.* 1).

$$y^2 = bx - bx^2 : a$$

$$\text{erit } py^2dx : 2r = pbxdx : 2r - pbx^2dx : 2ar$$

$$\int py^2\,dx : 2r = pbx^2 : 4r - pbx^3 : 6ar$$

Quodsi pro abscissa x substituatur axis a, prodibit soliditas integri sphæroidis $pba^2 : 4r - pba^3 : 6ar = pba^2 : 4r - pba^2 : 6r = (6pba^2 - 4pba^2) : 24r = pba^2 : 12r$.

COROLLARIUM I.

204. Quodsi $2r$ ponatur axi conjugato æqualis; erit $4r^2 = ab$ (§. 423 *part.* 1). Unde soliditas sphæroidis habetur $4par^2 : 12r = \frac{1}{3}par$; hoc est, sphæroides ellipticum æquatur cono, cujus altitudo axi majori a æqualis, basis vero dupla circuli circa axem minorem descripti (§. 548 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

205. Quoniam cylindri circumscripti altitudo $= a$, diameter $= 2r$, adeoque soliditas $= \frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); erit sphæroides ellipticum ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{1}{3}apr$ ad $\frac{1}{2}apr$, hoc est, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, seu ut 2 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

COROLLARIUM III.

206. Si diameter sphæræ $= a$, erit peripheria circuli maximi (posita ratione radii ad peripheriam $= r:p$) $= ap:2r$; consequenter sphæra $= a^3p : 12r$. Est adeo sphæroides ellipticum ad sphæram axe majore a descriptam ut $\frac{1}{3}apr$ ad $a^3p : 12r$, hoc est, (dividendo per $\frac{1}{3}ap$)

$\frac{1}{3}ap$) ut r ad $a^2 : 4r$, seu ut $4r^2$ ad a^2, nempe ut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.

COROLLARIUM IV.

207. Si diameter sphæræ $= 2r$, erit soliditas $= \frac{2}{3}pr^2$ (§. 199). Est itaque sphæroides ellipticum ad sphæram axe minore $2r$ descriptam, ut $\frac{1}{3}par$ ad $\frac{2}{3}pr^2$, hoc est, ut a ad $2r$ (§. 124 *part.* 1.), seu ut axis major ad minorem.

PROBLEMA LXXIX.

208. *Cubare Conoid*[●] *hyperbolicum ex rotatione hyperbolæ* Apollonianæ *circa axem genitum.*

Quoniam ad Hyperbolam scalenam (§. 459 *part.* 1)

$$y^2 = bx + bx^2 : a$$

erit $py^2dx : 2r = pbxdx : 2r + pbx^2dx : 2ar$

& $\int py^2dx : 2r = pbx^2 : 4r + pbx^3 : 6ar$.

Et quia ad Hyperbolam æquilateram (§. 507 *part.* 1.)

$$y^2 = ax + x^2$$

erit $py^2dx : 2r = (apxdx + px^2dx) : 2r$

& $\int py^2dx : 2r = apx^2 : 4r + px^3 : 6r$

COROLLARIUM.

209. Si altitudo conoidis fuerit axi transverso æqualis, hoc est, si $x = a$; erit soliditas conoidis in casu priore $pba^2 : 4r + pba^3 : 6ar = (6pba^2 + 4pba^2) : 24r = 10pba^2 : 24r = 5pba^2 : 12r$.

PROBLEMA LXXX.

Tab.II. Fig. 22. 210. *Cubare solidum ex rotatione Cissoidis circa axem* AB *genitum.*

Sit AB $= 1$, AP $= x$, PM $= y$; erit (§. 548 *part.* 1.)

$$y^2 = x^3 : (1 - x)$$

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : 2r(1 - x)$$

hoc est, quia $2r = \text{AB} = 1$,

$$py^2 dx : 2r = px^3 dx : (1 - x).$$

Est vero $x^3 : (1 - x) = x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $py^2 dx : 2r = px^3 dx + px^4 dx + px^5 dx + px^6 dx + px^7 dx + px^8 dx$ &c. in infinitum. Tab.II. Fig. 22.

Et hinc $\int py^2 dx : 2r = \frac{1}{4}px^4 + \frac{1}{5}px^5 + \frac{1}{6}px^6 + \frac{1}{7}px^7 + \frac{1}{8}px^8 + \frac{1}{9}px^9$, &c. definit solidum portione APM descriptum. Quodsi pro x substituatur AB $= 1$; prodit solidum integrum $\frac{1}{4}p + \frac{1}{5}p + \frac{1}{6}p + \frac{1}{7}p + \frac{1}{8}p + \frac{1}{9}p$ &c. seu $p(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ &c. in infinitum.).

PROBLEMA LXXXI.

211. *Cubare solidum ex rotatione Logistica circa asymptotum* AH *genitum.* Tab. I. Fig. 8.

In Logistica, cujus subtangens $= a$, est (§. 54).

$$ydx = ady$$

$$dx = ady : y$$

$$py^2dx : 2r = paydy : 2r$$

$$\int py^2dx : 2r = pay^2 : 4r$$

Quodsi pro y substituatur AB $= r$, erit integrum solidum $par^2 : 4r = \frac{1}{4}apr$.

COROLLARIUM.

212. Cylindrus, cujus altitudo $= a$, radius basis $= r$, est $\frac{1}{2}apr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum logisticum ut $\frac{1}{2}apr$ ad $\frac{1}{4}apr$, hoc est, ut 2 ad 1 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

213. *Facile hinc apparet, quod inventis methodo hactenus exposita expressionibus solidorum, ea inter se facile comparentur, unumque in alterum transformetur.*

PROBLEMA LXXXII.

214. *Cubare solidum ex rotatione Parabolæ circa semiordinatam* QN *genitum.* Tab.II. Fig. 25.

Ex resolutione Problematis 74 (§. 197) manifestum est, elementum solidi esse circulum radio MR descriptum & in differentiale Rr ipsius NR ductum.

Tab.II. Fig. 25. Sit itaque ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AQ = r$, $AP = x$, $QN = b$, $PM = y$, erit $Rr = dy$, $MR = PQ = AQ - AP = r - x$, peripheria radio MR descripta $= p - px : r$; consequenter area circuli $\frac{1}{2} pr - px + px^2 : 2r$ (§. 429 *Geom.*) & hinc elementum solidi $\frac{1}{2} prdy - pxdy + px^2 dy : 2r$.

Si jam parameter parabolæ 1; erit $y^2 = x$ (§. 388 *part.* 1) & $y^4 = x^2$; quibus valoribus in expressione elementi generali substitutis, erit id $\frac{1}{2} prdy - py^2 dy + py^4 dy : 2r$. Hujus integrale $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} py^3 + py^5 : 10r$ indefinite exprimit solidum ex rotatione portionis MNR circa NR genitum.

Quodsi pro y^2 ponatur x; habebimus pro eodem solido $\frac{1}{2} pry - \frac{1}{3} pxy + px^2 y : 10r = p(\frac{1}{2} ry - \frac{1}{3} xy + x^2 y : 10r)$.

Denique si pro y substituatur b, pro x vero r; prodibit solidum integrum $p(\frac{1}{2} br - \frac{1}{3} br + \frac{1}{10} br) = (30 - 20 + 6)$ $pbr : 60 = \frac{8}{30} pbr = \frac{1}{2} pr . \frac{8}{15} b$, hoc est, basis seu circulus radio AQ descriptus ducitur in $\frac{8}{15}$ altitudinis QN.

COROLLARIUM.

215. Cylindrus super eadem basi & ejusdem altitudinis est $\frac{1}{2} pbr$ (§. 541 *Geom.*); adeoque ad solidum hoc parabolicum ut $\frac{1}{2} pbr$ ad $\frac{1}{2} pbr . \frac{8}{15}$, hoc est, ut 1 ad $\frac{8}{15}$, seu ut 15 ad 8 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA LXXXIII.

Tab.II. Fig. 26. 216. *Cubare solidum ex rotatione spatii interminati hyperbolici juxta asymptotum CD tanquam axem genitum.*

Sit $AB = a$, $AC = b$, $CP = x$ $PM = y$; erit $Pp = dx$, & posita peripheria radio AC descripta $= p$, peripheria radio PC descripta $px : b$, quæ ducta in $PM = y$, dat superficiem cylindri parallelogrammo CPMR descripti $= pxy : b$ (§. 541 *Geom.*). Tab.II. Fig. 26. Hæc vero si ulterius ducatur in $Pp = dx$, prodibit cylindrulus cavus, parallelogrammulo Pp QM descriptus, seu elementum solidi $= pxydx : b$.

Est vero ex natura hyperbolæ intra asymptotos

$$xy = ab \text{ (§. 502 } part. \text{ 1).}$$

Quare $pxydx : b = pabdx : b = padx$

$$\int pxydx : b = pax.$$

Quodsi pro x substituatur b; prodibit solidum integrum pab.

COROLLARIUM.

217. Cylindrus ex rotatione parallelogrammi ACSB circa axem CS geniti est $\frac{1}{2} pba$ (§. 541 *Geom.*), adeoque ad solidum hyperbolicum ut $\frac{1}{2} pba$ ad pba, hoc est ut $\frac{1}{2}$ ad 1, seu ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

SCHOLION.

218. *Possunt etiam figuræ planæ rotari circa tangentes, vel alias lineas quascunque; Sed cum nihil in his difficultatis sit, plura non addimus.*

PROBLEMA LXXXIV.

219. *Metiri superficiem corporis rotatione figuræ ANQ circa axem AQ geniti.* Tab.II. Fig. 19.

RESOLUTIO.

Sit ratio radii ad peripheriam $= r : p$, $AP = x$, $PM = y$, erit $Pp = MR = dx$, $mR = dy$; $Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, peripheria radio PM descripta $= py : r$, quæ ducta in Mm dat elementum superficiei solidi ex rotatione circa axem AQ geniti $py \sqrt{(dx^2 + dy^2)} : r$.

Quodsi jam ex natura figuræ ANQ valor ipsius dx^2 substituatur, & elementum integrabile fiat; superficies desiderata per summationem habetur.

PRO-

PROBLEMA LXXXV.

Tab. II. Fig. 17. 220. *Invenire superficiem Coni.*

Cum Conus gignatur ex rotatione trianguli ACD circa axem DC; ex æquatione ad triangulum in expressione generali ante (§. 198) inventa substituendus est valor ipsius dx^2. Sit nempe $CD = a$, $AC = r$, $DP = x$, $PM = y$; erit (§. 268 *Geom.*)

$$x : y = a : r$$
$$x = ay : r$$
$$dx = ady : r$$
$$dx^2 = a^2dy^2 : r^2$$

$$py \surd (dx^2 + dy^2) : r$$
$$= py \surd (a^2dy^2 + r^2 dy^2) : r^2$$
$$= pydy \surd (a^2 + r^2) : r^2$$

$\int py \surd (dx^2 + dy^2) : r = py^2 \surd (a^2 + r^2) : 2r^2$ Quodsi pro y ponatur r, prodibit superficies coni integri $= \frac{1}{2} p \surd (a^2 + r^2) = \frac{1}{2} p$. AD; est nempe æqualis facto ex semiperipheria basis coni in latus AD, prorsus ut in Elementis Geometriæ demonstratum (§. 548 *Geom.*).

PROBLEMA LXXXVI.

Tab. I. Fig. 3. 221. *Invenire superficiem Sphæræ.*

Sit diameter circuli genitoris $= 1$, $AP = x$, erit elementum arcus Mm (§. 157) $= dx : 2\surd (x - xx)$, quod ductum in peripheriam radio PM descriptam $= 2p\surd (x - xx)$ producit elementum superficiei sphæricæ (§. 219) pdx. Hujus integrale px indefinite metitur superficiem segmenti sphærici, cujus altitudo x.

Quodsi pro x substituatur diameter 1; erit superficies sphæræ integræ $= p$. 1; seu, si $1 = a$, pa.

COROLLARIUM.

222. Est ergo quodlibet segmentum superficiei sphæricæ ad superficiem sphæræ integram ut px ad $p.1$, seu ut x ad 1 (§. 124 *part.* 1), hoc est ut altitudo segmenti ad diametrum sphæræ.

PROBLEMA LXXXVII.

223. *Invenire superficiem Conoidis parabolici.*

Ad parabolam est $adx = 2ydy$ (§. 21).

$$dx^2 = 4y^2 dy^2 : a^2$$

$$py \surd (dx^2 + dy^2) : r$$
$$= py \surd (4y^2dy^2 + a^2dy^2) : ar$$
$$= pydy \surd (4y^2 + a^2) : ar$$

Fiat $\surd (4y^2 + a^2) = v$

erit $4y^2 + a^2 = v^2$

$$8ydy = 2vdv$$
$$ydy = \tfrac{1}{4} vdv$$
$$pydy \surd (4y^2 + a^2) : ar = pv^2dv : 4ar$$

$\int pydy \surd (4y^2 + a^2) : ar = pv^3 : 12ar = p (4y^2 + a^2) \surd (4y^2 + a^2) : 12ar$. Fiat $y = 0$, relinquetur $pa^2 \surd a^2 : 12ar = pa^3 : 12r$. Unde superficies segmenti conoidis parabolici $=$
$p(4y^2 + a^2) \surd (4y^2 + a^2) : 12ar - pa^3 : 12r$

CAPUT

CAPUT V.

De usu Calculi integralis in Methodo tangentium inversa.

DEFINITIO IX.

224. *Methodus Tangentium inversa* est, qua ex data tangente, aut linea quacunque alia cujus determinatio a tangente pendet, invenitur æquatio ad curvam aut constructio curvæ.

COROLLARIUM.

225. Cum expressiones differentiales tangentis, subtangentis, subnormalis, normalis & arcus, itemque areæ curvæ superius traditæ fuerint (§.20, 34, 35, 44, 98, 144); si valor datus expressioni differentiali æquetur, & æquatio differentialis vel summetur, vel, si id fieri nequeat, construatur; curva desiderata innotescit.

PROBLEMA LXXXVIII.

226. *Invenire lineam curvam, cujus subtangens* $= 2yy : a$.

Quoniam subtangens lineæ algebraicæ $= ydx : dy$ (§.20); erit

$$ydx : dy = 2yy : a$$
$$aydx = 2y^2dy$$
$$adx = 2ydy$$
$$ax = y^2$$

Est adeo curva quæsita parabola (§.388 *part.* I), cujus constructio ex superioribus manifesta (§.393 *part.* I).

PROBLEMA LXXXIX.

227. *Curvam invenire, cujus subnormalis est constans, ex. gr.* $= a$.

Quoniam subnormalis lineæ algebraicæ (§.35) $= ydy : dx$; erit

$$ydy = adx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = ax$$
$$y^2 = 2ax$$

Est adeo curva quæsita parabola, cujus parameter $= 2a$.

PROBLEMA XC.

228. *Invenire curvam, cujus subnormalis* $= r - x$.

Quoniam $ydy : dx = r - x$ (§.35); erit

$$ydy = rdx - xdx$$
$$\tfrac{1}{2}y^2 = rx - \tfrac{1}{2}xx$$
$$y^2 = 2rx - xx$$

Est adeo curva quæsita circulus, cujus radius r seu diameter $2r$ (§.377 *part.* I).

PROBLEMA XCI.

229. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r - x$ & y.

Quoniam (§.20)

$$r - x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit $r - x : y = dy : dx$ (§.124 *part.* I)

$$rdx - xdx = ydy$$
$$rx - \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$
$$2rx - xx = y^2$$

Est adeo curva quæsita denuo circulus, cujus diameter $2r$.

PROBLEMA XCII.

230. *Invenire curvam, cujus subtangens est tertia proportionalis ad* $r + x$ & y.

Quoniam (§.20)

$$r + x : y = y : \frac{ydx}{dy}$$

erit

erit $r + x : y = dy : dx$ (§. 124 *part.* 1)

$$rdx + xdx = ydy$$

$$rx + \tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}y^2$$

$$2rx + x^2 = y^2$$

Eſt adeo curva quæſita Hyperbola æquilatera, cujus axes conjugati & parameter $= 2r$ (§. 507 *part.* 1).

PROBLEMA XCIII.

231. *Invenire curvam in qua ſubtangens multiplo abſciſſæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$mx = ydx : dy$$

erit $mxdy = ydx$

$$mxdy - ydx = 0$$

Ut hæc æquatio integrari poſſit, multiplicetur per $y^{m-1} : x^2$ (§. 95).

erit $(my^{m-1}xdy - y^m dx) : x^2 = 0$

$$y^m : x = a^{m-1}$$

$$y^m = a^{m-1}x$$

Satisfaciunt ergo propoſito infinita Parabolarum genera.

PROBLEMA XCIV.

232. *Invenire lineam, in qua ſubtangens ſemiordinatæ æqualis.*

Quoniam (§. 20)

$$ydx : dy = y$$

$$ydx = ydy$$

$$dx = dy$$

$$x = y$$

Patet adeo, lineam quæſitam eſſe rectam ad cathetum trianguli rectanguli æquicruri tanquam axem relatam, ſeu hypothenuſam trianguli rectanguli æquicruri (§. 89 *Geom.*). Quodſi vero x ſumatur pro arcu circuli; erit linea quæſita Cyclois (§. 572 *part.* 1, & §. 52 *part.* 2).

PROBLEMA XCV.

233. *Invenire curvam, cujus ſubnormalis* $= \sqrt{ax}$.

Quoniam $ydy : dx = \sqrt{ax}$ (§. 35)

erit $ydy = a^{1:2}x^{1:2}dx$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \tfrac{2}{3}a^{1:2}x^{3:2}$$

$$y^2 = \tfrac{4}{3}\sqrt{ax^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{4ax^3}$$

Patet adeo, quadrata ſemiordinatarum hujus curvæ exprimere ſpatia Parabolæ, cujus parameter $4a$ (§. 103). Sunt igitur ſemiordinatæ ipſæ mediæ proportionales inter abſciſſas & $\tfrac{2}{3}$ ſemiordinatarum Parabolæ circa communem axem deſcriptæ (§. *cit.*).

SCHOLION.

234. *Curva hæc dici poteſt Quadratrix Parabolæ. Solent enim Geometræ* Quadratricem *alicujus curvæ appellare curvam circa eundem axem deſcriptam, cujus ſemiordinatis datis datur quadratura partium reſpondentium in altera curva. Ex. gr. ſi fuerit ut in noſtro caſu* APMA = PN², *vel* APMA = AP. PN, *vel* APMA = PN. *a, &c. erit* AND Quadratrix *ipſius* AMC. Tab.II. Fig.27.

PROBLEMA XCVI.

235. *Invenire curvam, cujus normalis conſtans eſt.*

Sit conſtans linea $= a$, abſciſſa $= x$, ſemiordinata $= y$; erit (§. 44)

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} : dx = a$$

$$y\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = adx$$

$$y^2dy^2 + y^2dx^2 = a^2dx^2$$

$$y^2dy^2 = a^2dx^2 - y^2dx^2$$

$$ydy = dx\sqrt{(a^2 - y^2)}$$

$$-\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} = -dx$$

$$\sqrt{(a^2 - y^2)} = a - x \quad (§. 95).$$

Est itaque curva quæsita circulus.

PROBLEMA XCVII.

236. *Invenire curvam, cujus area indefinite exprimitur per $a\sqrt{ax}$.*

Quoniam differentiale areæ $= ydx$ (§. 98);

erit $\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2}dx = ydx$

$\frac{1}{2}a^{3:2}x^{-1:2} = y$

$\frac{1}{4}a^3x^{-1} = \frac{1}{4}a^3 : x = y^2$

$\frac{1}{4}a = xy^2$

Est adeo curva Hyperbola secundi generis intra asymptotos.

COROLLARIUM.

237. Cum $\sqrt{ax}$ sit semiordinata Parabolæ, cujus parameter $= a$; evidens est Parabolam *Apollonianam* esse quadratricem Hyperbolæ intra asymptotos, ad quam $\frac{1}{4}a^3 = xy^2$.

PROBLEMA XCVIII.

238. *Invenire curvam, cujus quadratura indefinita $= x^3 : a$.*

Quoniam $x^3 : a = \int ydx$

erit $3x^2dx : a = ydx$

$x^2 = \frac{1}{3}ay$

Tab.II. Est adeo curva quæsita Parabola ex-
*Fig.*28. terior, cujus parameter $\frac{1}{3}a$. Sit enim $AQ = PM = x$, $PQ = AM = y$, erit $\frac{1}{3}ay = x^2$ (§. 388 *part.* 1).

PROBLEMA XCIX.

239. *Invenire curvam, cujus area $= a\sqrt{(aa+xx)}$.*

Quoniam $axdx : \sqrt{(aa+xx)} = ydx$

$ax : \sqrt{(aa+xx)} = y$

$a^2x^2 : (aa+xx) = y^2$

hoc est, $y^2 : x^2 = a^2 : aa+xx$

Quæ analogia naturam curvæ definit, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera, axibus conjugatis & parametro existentibus a (§. 507 *part.* 1, & §. 234 *part.* 2).

PROBLEMA C.

240. *Invenire curvam, cujus area $= x\sqrt{(aa+xx)}$.*

Quon. $\frac{x^2dx}{\sqrt{(aa+xx)}} \quad dx\sqrt{(aa \cdot xx)} = ydx$

erit $\frac{2x^2+aa}{\sqrt{(aa+xx)}} = y$

$(2x^2+aa)^2 = y^2 (aa+xx)$

$y^2 : aa+2xx = aa+2xx : aa+xx$

Quæ analogia definit itidem naturam curvæ, cujus quadratrix est Hyperbola æquilatera.

SCHOLION.

241. *Ex Problematibus his apparet, quod data quadratrice semper inveniatur quadranda facili negotio. Et hac quidem methodo inveniri possunt curvæ innumeræ quadrabiles, construique curvarum quadrabilium, seu, quod perinde est, formularum summabilium canones.*

PROBLEMA CI.

242. *Invenire curvam, cujus subtangens est linea constans a.*

Quoniam $ydx : dy = a$ (§. 20)

erit $dx = ay^{-1}dy$

$\int dx = x = \int ay^{-1}dy$

Quodsi $ay^{-1}dy$ multiplicetur per a; erit $a^2y^{-1}dy$ elementum Hyperbolæ intra asymptotos (§. 118) & quidem æquilateræ, in qua asymptoti junguntur ad angulos rectos (§. 510 *part.* 1). Quodsi ergo y sumatur pro abscissa, erit respondens semiordinata $x = a\int y^{-1}dy$ æqualis spatio hyperbolico asymptotico per constantem a, quæ latus est potentiæ in Hyperbola æquilatera (§. 477 *part.* 1), diviso. Unde constructio

curvæ

curvæ quæsitæ a quadratura Hyperbolæ pendet.

COROLLARIUM I.

243. Quoniam linea, ad quam $x = \int ay^{-1}dy$, est logarithmica ad asymptotum relata (§. 54) atque x in asymptoto sumta logarithmus semiordinatæ ipsi respondentis (§. 553 *part. 1*); erit quoque $\int ay^{-1}dy$ logarithmus ejusdem semiordinatæ y, consequenter $\int ay^{-1}dy = a\int dy : y = ly$; ($ly$ denotat logarithmum ipsius y in logistica sumtum, cujus subtangens $= a$). Unde liquet, quomodo differentiale logarithmi aut quantitatis, quam logarithmus ingreditur, sit inveniendum. Quoniam enim $ady : y = dly$ erit etiam $d(ly)^n = n(ly)^{n-1}\, ady : y$ ubi a notat subtangentem logisticæ.

COROLLARIUM II.

244. Et quia $a\int\frac{dy}{y}$ est spatium hyperbolicum per latus potentiæ Hyperbolæ divisum; spatia hyperbolica per idem latus divisa exprimunt logarithmos, quorum numeri sunt ut semiordinatæ ad asymtotum relatæ.

PROBLEMA CII.

245. *Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita $\sqrt{(aa - yy)}$ ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa - yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a : 1 = dy\sqrt{(aa - yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa - yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa - yy)} : a = x$

Tab. I. Fig. 3. Quoniam $\int dy\sqrt{(aa - yy)}$ est portio circuli CDPM, cujus radius AC $= a$, abscissa PC $= y$ (§. 124): constructio curvæ a quadratura circuli pendet, hoc est, circulus est quadratrix curvæ quæsitæ (§. 234). Retentis nempe abscissis PC, semiordinatæ x erunt æquales spatio PMDC per constantem a diviso.

PROBLEMA CIII.

246. *Invenire curvam, in qua est ut a ad y ita $\sqrt{(aa + yy)}$ ad subtangentem.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$a : y = \sqrt{(aa + yy)} : \frac{ydx}{dy}$$

hoc est, $a : 1 = dy\sqrt{(aa + yy)} : dx$

erit $dy\sqrt{(aa + yy)} : a = dx$

$\int dy\sqrt{(aa + yy)} : a = x$

Quoniam $\int dy\sqrt{(aa + yy)} : a$ est arcus Parabolæ AM, cujus parameter $2a$ (§. 146); si semiordinata Parabolæ PM sumatur pro abscissa curvæ quæsitæ, erit semiordinata ejusdem arcui parabolico AM æqualis. Tab. II. Fig. 19.

SCHOLION.

247. *Apparet adeo, interdum constructionem pendere a rectificatione curvarum. Præstat autem eam ad curvarum potius rectificationem, quam quadraturam reducere; quia in priori casu praxis est facilior, ubi arcum filo metiri datur. In posteriori autem spatiorum quadratura ope serierum infinitarum definienda est in numeris prope veris, & inde similiter in istiusmodi numeris semiordinata curvarum quæsitarum sunt computanda.*

PROBLEMA CIV.

248. *Invenire curvam, in qua est subtangens ad y ut quantitas constans r ad $\sqrt{(r^2 - y^2)}$.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

hoc est, $dx : dy = r : \sqrt{(r^2 - y^2)}$

erit $dx = rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)}$

$x = \int(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})$.

Quia $\int(rdy : \sqrt{(r^2 - y^2)})$ est arcus circuli AM, cujus radius AC $= r$, PM $= y$ (§. 153); constructio curvæ pendet a rectificatione peripheriæ circuli. Tab. I. Fig. 3.

Tab.I. *Fig.* 3. Nempe si semiordinatæ in circulo PM sumantur pro abscissis curvæ quæsitæ; erunt ejusdem semiordinatæ arcubus AM æquales.

PROBLEMA CV.

249. *Invenire curvam, in qua subtangens est ad y ut r^2 ad r^2+y^2.*

Quoniam *per hypoth.* & §. 20

$$\frac{ydx}{dy} : y = r^2 : r^2+y^2$$

hoc est, $dx : dy = r^2 : r^2+y^2$

erit $dx = r^2 \; dy : (r^2+y^2)$

Quoniam $\int(r^2 \, dy : (r^2+y^2))$ aut, si $r=1$, $\int(dy : (1+y^2))$ est elementum Tab.II. *Fig.* 20. arcus BM, cujus tangens $BK=y$ (§. 158); evidens est, constructionem curvæ quæsitæ denuo pendere a rectificatione arcuum circuli indefinita. Sumtis nempe tangentibus arcuum BK pro abscissis curvæ quæsitæ; semiordinatæ ejusdem erunt arcubus BM æquales, radio circuli existente *r*.

PROBLEMA CVI.

250. *Invenire curvam, in qua tangens est constans.*

Sit constans illa $=a$, abscissa$=x$, semiordinata *y*: erit (§. 34)

$$y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dy = a$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2}{y^2}$$

$$dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$$

$$x = \int\left(\frac{dy}{y}\sqrt{(a^2 - y^2)}\right).$$

Tab.I. *Fig.* 8. Curva, in qua tangens constans est, describitur puncto M, si alterum extremum rectæ TM in recta AR incedit, diciturque *Tractoria*. Ad ejus adeo Tab.I. *Fig.* 8. descriptionem non opus est, nisi bacillo, in cujus utroque extremo cuspis infixa, ita ut cuspis in M premarur in planum elatere, vel pondere. Est itaque æquatio inventa ad Tractoriam.

Eadem æquatio sic eruitur. Quoniam $TM=a$, $PM=y$; erit $PT=\sqrt{(a^2-y^2)}$. Sed $PT=ydx : dy$ (§. 20. Ergo $ydx : dy = \sqrt{(a^2-y^2)}$; consequenter $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y$; aut, quia semiordinatæ continuo decrescentis differentiale negativum, $dx = -dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y$.

COROLLARIUM I.

251. Si fuerit $x=0$, erit etiam $dx=0$, adeoque

$$-dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y = 0$$

$$\sqrt{(a^2-y^2)} = 0$$

$$a^2 - y^2 = 0$$

$$a = y$$

Est igitur in A, ubi origo indeterminatæ *x*, $AB=a$; id quod etiam ex descriptione liquet.

COROLLARIUM II.

252. Quoniam $dx = dy\sqrt{(a^2-y^2)} : y$, erit $ydx = dy\sqrt{(a^2-y^2)}$; adeoque spatium indeterminatum $RPMI = \int dy\sqrt{(a^2-y^2)}$. Quadratura igitur tractoriæ pendet a quadratura circuli (§. 124), cujus radius est *a*, abscissæ a centro computatæ sunt *y*.

COROLLARIUM III.

253. Similiter quia $dx^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2}$ erit

$$dx^2 + dy^2 = \frac{a^2dy^2 - y^2dy^2}{y^2} + dy^2$$

$$= a^2dy^2 : y^2$$

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{ady}{y}$$

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \int\frac{ady}{y}$$

Quare

Quare cum $\int \frac{ady}{y}$ sit logarithmus ipsius y; arcus tractoriæ sunt ut logarithmi, semiordinatæ ut numeri.

Et quia $\int (ady : y)$ est abscissa logarithmicæ, cujus subtangens $= a$; arcus tractoriæ rectificantur per abscissas logarithmicæ.

COROLLARIUM IV.

254. Si $BO = v$, erit $OA = PM = a - v$, adeoque $a - v = y$, & $- dv = dy$; consequenter $dx = - dy \surd (a^2 - y^2) : y = dv \surd (2av - v^2) : (a - v)$. Habemus adeo æquationem, quæ Tractoriam definit respectu axis BA.

CAPUT VI.

De usu Calculi integralis in Logarithmorum doctrina.

PROBLEMA CVII.

255. *Dato numero, invenire logarithmum.*

Tab. III. Fig. 30. Sit Logarithmicæ MBN ordinata $AB = 1$, eademque subtangenti, quæ constans est (§. 54) æqualis, erit PM numerus unitate major, QN numerus unitate minor, AP logarithmus numeri unitate majoris, AQ logarithmus numeri unitate minoris.

Quodsi jam differentia inter AB & PM sit y; erit $PM = 1 + y$; consequenter AP, seu logarithmus unitate majoris numeri, $\int (dy : (1 + y))$ (§. 243). Est vero $1 : (1 + y) = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $dy : (1 + y) = dy - ydy + y^2 dy - y^3 dy + y^4 dy$ &c. in infinitum; consequenter $\int (dy : (1 + y))$, seu logarithmus numeri $1 + y$ unitate majoris, $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

Quodsi differentia inter AB & QN sit y, erit $QN = 1 - y$; consequenter AQ, seu logarithmus numeri unitate minoris, $= \int (-dy : (1 - y))$. Est vero $-1 : (1 - y) = -1 - y - y^2 - y^3 - y^4 -$ &c. in infinitum (§. 45 *part.* 1). Ergo $- dy : (1 - y) = - dy - ydy - y^2 dy - y^3 dy - y^4 dy$, &c. in infinitum; consequenter $\int (-dy : (1 - y))$, seu logarithmus numeri unitate minoris, $= - y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM I.

256. Si latus potentiæ Hyperbolæ AB, vel BC, fuerit 1, $BP = y$; erit $AP = 1 + y$, & spatium hyperbolicum asymptoticum $= y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Tab. II. Fig. 29. Et ubi $BQ = y$, erit $AQ = 1 - y$, adeoque (si $QN = v$) ob $1 = v - vy$ (§. 490 *part.* 1), elementum spatii hyperbolici asymptotici $= 1ydy : (1 - y)$; consequenter spatium $= - y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 120). Possunt ergo etiam logarithmi per hyperbolam exhiberi: nimirum si latus potentiæ $AB = 1$, abscissa AP est numerus unitate major, spatium asymptoticum BCMP logarithmus numeri unitate majoris; similiter abscissa AQ est numerus unitate minor & spatium hyperbolicum asymptoticum QNCB logarithmus numeri unitate minoris.

COROLLARIUM II.

257. Quodsi $y = 1$, erit $1 + y = 2$; adeoque logarithmus hyperbolicus binarii $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c. in infinitum.

COROLLARIUM III.

258. Quoniam logarithmus ipsius $1 : (1 + x)$ & numeri integri $1 + x$ idem est (§. 351 *Arithm.*), fractio vero $1 : (1 + x)$

numerus unitate minor; pro $1-y$ ponatur $1:(1+x)$, formula posterior inveniendis logarithmis tam numerorum unitate majorum, quam minorum satisfacit. Nempe cum sit ex hypothesi

$$1-y=1:(1+x)$$

erit

$$1-1:(1+x)=y$$

hoc est, $\frac{1+x-1}{1+x}=\frac{x}{1+x}=y$

adeoque in formula $y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. pro y substitui debet $x:(1+x)$, si numeri unitate majoris logarithmus desideretur.

SCHOLION.

259. *Formula posterior si in casu quoque priore, ubi numerus cujus logarithmus quaeritur unitate major, adhibetur, inventio logarithmi faciliori opera absolvitur; quia series citius convergit, quam si priori formula utamur. Enimvero probe notandum, logarithmos hyperbolicos coincidere cum* Neperianis, *adeoque diversos esse a* Briggianis, *quibus communiter utimur. Cum autem hyperbolici sint ad* Briggianos *ut logarithmus denarii hyperbolicus ad logarithmum denarii* Briggianum, *sitque logarithmus binarii hyperbolicus* 2. 302585092994 &c. Briggianus 1. 000000000000; *hyperbolici ad* Briggianos, *quibus vulgo utimur, facile reducuntur.*

PROBLEMA CVIII.

260. *Dato logarithmo invenire numerum.*

Sit logarithmus l, numerus $1+y$ erit $l=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. Quare cum $y=l+bl^2+(2b^2-c)\,l^3+(5bc-5b^3-d)\,l^4+(14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e)\,l^5$ &c. (§. 366 *part.* 1) ob $a=1$, & $b=-\frac{1}{2}$, $c=+\frac{1}{3}$, $d=-\frac{1}{4}$, $e=+\frac{1}{5}$ &c. erit

$$2b^2-c=\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$5bc-5b^3-d=-\frac{5}{6}+\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=\frac{-40+30+12}{48}=\frac{2}{48}=+\frac{1}{24}$$

$$14b^4+6bd-21b^2c+3c^2-e$$

$$=\frac{14}{16}+\frac{6}{8}-\frac{21}{12}+\frac{3}{9}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{6}{8}-\frac{14}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{40-15-24}{120}=+\frac{1}{120}$$

adeoque

$$y=l+\frac{1}{2}l^2+\frac{1}{6}l^3+\frac{1}{24}l^4+\frac{1}{120}l^5 \text{ \&c.}$$

in infinit. $=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2}+\frac{l^3}{1.2.3}+\frac{l^4}{1.2.3.4}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5}$ &c. in infinit.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, quartus D &c. erit $y=l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Quoniam vero l est logarithmus numeri $1+y$; erit numerus $1+y=1+l+\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum.

Si l fuerit logarithmus numeri unitate minoris $1-y$; erit $l=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{5}y^5$ &c. & eodem ut ante modo reperietur $y=l-\frac{1}{1.2}l^2+\frac{1}{1.2.3}l^3-\frac{1}{1.2.3.4}l^4+\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$, &c. in infinitum, consequenter $1-y=1-\frac{l}{1}+\frac{1}{1.2}l^2-\frac{1}{1.2.3}l^3+\frac{1}{1.2.3.4}l^4-\frac{1}{1.2.3.4.5}l^5$ &c. in infinitum.

Quodsi terminus primus dicatur A, secundus B, tertius C, &c. erit $y=l-\frac{1}{2}Al+\frac{1}{3}Bl-\frac{1}{4}Cl+\frac{1}{5}Dl$ &c. in infinitum; consequenter $1-y=1-l+\frac{1}{2}Al-\frac{1}{3}Bl+\frac{1}{4}Cl-\frac{1}{5}Dl$, &c. in infinitum.

PRO-

PROBLEMA CIX.

261. *Dato sinu, invenire logarithmum.*

Sit radius $=1$, cosinus $=x$, erit sinus $=\sqrt{(1-xx)}$ (§. 377 *part.* 1) $=\sqrt{((1+x)(1-x))}$.
Sed $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$
& $l(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{6}x^6$
Ergo $l(1-xx)=-\frac{2}{2}x^2-\frac{2}{4}x^4-\frac{2}{6}x^6$ (§. 337 *Arith.*)
& $l\sqrt{(1-xx)}=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6$ &c. (§. 338 *Ar.*).

PROBLEMA CX.

262. *Data tangente, invenire logarithmum.*

Sit radius, seu sinus totus, hoc est, tangens 45° (§. 32 *Trigon*) $=1$; tangens arcus 45° majoris $=1+x$; tangens arcus 45° minoris $=1-x$; erit logarithmus tangentis in casu posteriore $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum; in casu posteriore $-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5$ &c. in infinitum (§. 255.)

SECTIO TERTIA.
DE CALCULO EXPONENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi exponentialis.

DEFINITIO X.

263. Calculus exponentialis est methodus differentiandi quantitates exponentiales & differentialia exponentialium summandi.

DEFINITIO XI.

264. *Quantitas exponentialis* est dignitas, cujus exponens variabilis, ex. gr. x^x, a^x.

PROBLEMA CXI.

265. *Quantitatem exponentialem differentiare.*

RESOLUTIO.

Non alia re opus est, quam ut quantitates exponentiales ad logarithmicas revocentur: quo facto, differentiatio succedit per §. 243.

E. gr. Quaeritur differentiale quantitatis exponentialis x^y. Fiat

$$x^y = z$$

erit $ylx = lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$lxdy + ydx : x = dz : z \text{ (§. 243)}$$

$$zlxdy + zydx : x = dz$$

hoc est, $x^y lxdy + yx^{y-1} dx = dz$

Sit quantitas exponentialis differentianda secundi gradus v^{x^y}. Fiat, ut ante,

$$v^{x^y} = z$$

erit $x^y lv = lz$ (§. 341 *Arithm.*)

$$(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + x^y dv : v = dz : z \text{ (§. 243)}$$

$$z(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + zx^y dv : v = dz$$

hoc est,

$$v^{x^y}(x^y lxdy + yx^{y-1} dx) lv + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz$$

seu

$$v^{x^y} x^y lxlvdy + v^{x^y} yx^{y-1} lvdx + v^{x^y} v^{-1} x^y dv = dz$$

Eadem

Eadem ratione inveniri poteſt differentiale quantitatis exponentialis cujuſcunque alterius.

PROBLEMA CXII.

266. *Differentiale logarithmicum integrare.*

Sit differentiale integrandum $xlxdx$. Fiat

$$x = 1 + y$$

erit $lx = l(1+y)$

& $dx = dy$

$$xlxdx = l(1+y)(1+y)\,dy.$$

Eſt vero $l(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum (§. 255). Ergo $l(1+y)(1+y)\,dy = (1+y)\,dy\,(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum) = [multiplicatione actu facta]

$$ydy - \tfrac{1}{2}y^2dy + \tfrac{1}{3}y^3dy - \tfrac{1}{4}y^4dy + \tfrac{1}{5}y^5dy \text{ \&c.}$$
$$+ y^2dy - \tfrac{1}{2}y^3dy + \tfrac{1}{3}y^4dy - \tfrac{1}{4}y^5dy \text{ \&c.}$$

h. e. $ydy + \frac{1}{2}y^2dy - \frac{1}{6}y^3dy + \frac{1}{12}y^4dy - \frac{1}{20}y^5dy$ &c.

Unde tandem habetur $\int xlxdx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{60}y^5 - \frac{1}{120}y^6$ &c. $= \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{1.2.3}y^3 - \frac{1}{2.3.4}y^4 + \frac{1}{3.4.5}y^5 - \frac{1}{4.5.6}y^6$ &c. in infinitum: in qua ſerie $y = x - 1$.

PROBLEMA CXIII.

267. *Differentiale exponentialem quantitatem involvens integrare.*

Sit differentiale integrandum $x^x dx$. Fiat $x = 1 + y$, erit $x^x = (1+y)^{1+y}$, & $dx = dy$, adeoque $x^x dx = (1+y)^{1+y}dy$. Fiat $(1+y)^{1+y} = 1 + v$

erit $(1+y)\,l(1+y) = l(1+v)$

hoc eſt, $(1+y)(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$ &c. in infinitum) $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 255); ſeu per calculum præcedentem, $y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{12}y^4 - \frac{1}{20}y^5$ &c. in infinitum $= v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{5}v^5$ &c. in infinitum (§. 266).

Fiat porro

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$

erit
$$v^2 = +y^2 + 2yk^3 + k^2y^4 + 2kmy^5 + 2my^4 + 2ny^5$$
$$v^3 = +y^3 + 3ky^4 + 3k^2y^5 + 3my^5$$
$$v^4 = +y^4 + 4ky^5$$
$$v^5 = +y^5$$

(§. 95 *part.* 1). Unde

$$v = y + ky^2 + my^3 + ny^4 + py^5 \text{ \&c.}$$
$$-\tfrac{1}{2}v^2 = -\tfrac{1}{2}y^2 - ky^3 - \tfrac{1}{2}k^2y^4 - kmy^5 \text{ \&c.} - my^4 - ny^5$$
$$+\tfrac{1}{3}v^3 = +\tfrac{1}{3}y^3 + ky^4 + k^2y^5 \text{ \&c.} + my^5$$
$$-\tfrac{1}{4}v^4 = -\tfrac{1}{4}y^4 - ky^5 \text{ \&c.}$$
$$+\tfrac{1}{5}v^5 = +\tfrac{1}{5}y^5 \text{ \&c.}$$
$$-y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{6}y^3 - \tfrac{1}{12}y^4 + \tfrac{1}{20}y^5 = 0$$

Habemus ergo

$$1 - 1 = 0 \qquad k - \tfrac{2}{2} = 0 \qquad m - k + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = 0$$
$$1 = 1 \qquad k = 1 \qquad m = 1 - \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

$$n - \tfrac{1}{2}k^2 - m + k - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} = 0$$
$$n = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - 1 + \tfrac{4}{12} = \tfrac{1}{3}$$

$$p - km - n + k^2 + m - k + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{20} = 0$$
$$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - 1 - \tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{5}{20} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{4}{12} - \tfrac{3}{12} = \tfrac{1}{12}.$$

Conſequenter

$(1+y)^{1+y} = 1 + v = 1 + y + y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{12}y^5$ &c. in infinitum.

Quare differentiale ad integrandum propoſitum $(1+y)^{1+y}dy = dy + ydy + y^2dy + \frac{1}{2}y^3dy + \frac{1}{3}y^4dy + \frac{1}{12}y^5dy$ &c. in infinitum, adeoque $\int(1+y)^{1+y}dy = y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{15}y^5 + \frac{1}{72}y^6$ &c.

PRO-

PROBLEMA CXIV.

268. *Quantitatem exponentialem, consequenter curvam exponentialem, cujus æquatio datur, construere.*

RESOLUTIO.

Quantitates exponentiales reducendæ sunt ad logarithmicas, quæ per abscissas Logarithmicæ exhiberi possunt.

Ex. gr. Sit construenda curva exponentialis, ad quam $x^x = y$, erit (§. 341 *Arithm.*)
Tab. $xlx = ly$. Supponamus Logarithmicam MBN
III. descriptam, & in ea semiordinatam $AB = 1$.
Fig. 30. Sit $PM = x$; erit $AP = lx$. Est vero $1 : lx = x : ly$ (§. 299 *Arithm.*). Ergo ly reperiri potest (§. 271 *Geom.*): cui si æqualis in axe Logisticæ sumatur AH, erit $HI = y$ (§. 553 *part.* 1).

Quodlibet adeo curvæ exponentialis punctum G reperitur sequentem in modum: Tab. III.
Fiat $AC = x$, & ducatur MC ipsi AP parallela, quæ Logisticam in M secabit; erit $MC = AP = lx$. Fiat $CD = AB = 1$, & $DE = AC$, ducaturque LE ipsi MC parallela; erit $LE = ly$. Ducatur LH ipsi EA parallela; erit $HI = y$. Quodsi ergo AC sumatur pro axe curvæ exponentialis, fiatque $CG = HI$; erit G punctum in curva quæsita. *Fig.* 30.

Porro cum $x = 0$, erit $ly = 0$. Sed 0 est logarithmus unitatis. Ergo y est unitas, consequenter $= AB$. Quare si fiat $AF = AB$; erit F punctum curvæ exponentialis.

Similiter quando $AB = 1 = x$, erit $lx = 0$, adeoque ad AB applicata y est 1, seu ipsi AB æqualis. Quamobrem si fiat $BK = BA$; erit K punctum curvæ exponentialis.

CAPUT II.

De usu Calculi exponentialis in Curvarum exponentialium symptomatis investigandis.

DEFINITIO XII.

269. *Curva exponentialis* est, quæ definitur per æquationem exponentialem.

DEFINITIO XIII.

270. *Æquatio exponentialis* est, quam ingreditur quantitas exponentialis.

PROBLEMA CXV.

271. *Invenire subtangentem curvæ, in qua $a^x = y$.*

Quoniam $a^x = y$

erit $xla = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

Ergo subtangens $ydx : dy$ (§. 20) $= ydy : ylady = 1 : la$.

Constructio. Sit descripta Logistica quæcunque MBN & in ea $AB = 1$. Fiat $AC = a$, ducaturque CM ipsi AP & MP ipsi AC parallela: erit $PM = AC = a$ & $AP = la$ (§. 554 *part.* 1). Fiat porro $PQ = AB = 1$, itemque QT ipsi AB parallela; erit $TQ = 1 : la$ (§. 302 *Arithm.* & §. 268 *Geom.*). Tab. III. *Fig.* 31.

COROLLARIUM.

272. Quoniam curvæ subtangens $1 : la$ constans: æquatio proposita ad Logarithmicam est.

SCHOLION.

273. *Nempe si subtangens Logisticæ fuerit $1 : la$; ea definitur per $a^x = y$.*

PRCBLEMA CXVI.

Tab. I. 274. *Quadrare ſpatium Logiſticum*
Fig. 8. *interminatum* HPMI.

Sit Logiſticæ ſubtangens $P\Gamma = 1 : la$: $PM = y$, $Pp = dx$; erit

$a^x = y$ (§. 273).

$x\,la = ly$

$ladx = dy : y$ (§. 243)

$dx = dy : yla$

$ydx = ydy : yla = dy : la$

$\int ydx = y : la = y\,(1 : la) = PM.PT$

COROLLARIUM I.

275. Spatium Logiſticum interminatum HPMI eſt trianguli ſubtangente PT, tangente TM, & ſemiordinata PM contenti duplum (§. 392 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

276. Quoniam Spatium HPMI = PM.PT & ISQH = SQ. PT (§. 274); erit QPMS = (PM − SQ) PT, hoc eſt, ſpatium inter duas ſemiordinatas interceptum æquale rectangulo ex ſubtangente in differentiam ſemiordinatarum.

PROBLEMA CXVII.

277. *Cubare ſolidum Logiſticum ex rotatione ſpatii interminati* HPMI *circa aſymptotum* PH *geniti.*

Quoniam (§. 274)

$dx = dy : yla$ erit (§. 197)

$py^2dx : 2r = py^2\,dy : 2ryla \quad pydy : 2rla$

$\int py^2dx : 2r = py^2 : 4rla.$

COROLLARIUM I.

278. Quoniam $py^2 : 2r$ eſt circulus radio $PM = y$ deſcriptus (§. 197), $py^2 : 4rla$ eſt cylindrus, cujus baſis eadem eſt cum baſi ſolidi logiſtici, altitudo vero $1 : 2la$ ſeu $\frac{1}{2}$PT (§. 541 *Geom.*).

COROLLARIUM II.

279. Eſt ergo ſolidum iſtud logiſticum ad conum, cujus altitudo ſubtangens PT $= 1 : la$, ſemidiameter baſis $PM = y$, ut Tab.I.
$py^2 : 4rla$ ad $py^2 : 6rla$, hoc eſt, ut $\frac{1}{4}$ ad $\frac{1}{6}$, Fig.8.
ſeu ut 6 ad 4, aut ut 3 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CXVIII.

280. *Determinare ſubnormalem Logiſticæ.*

Quoniam $ladx = dy : y$ (§. 274).

erit $dy = yladx$

$ydy : dx = y^2ladx : dx$ (§. 35).

$= y^2\,la = y^2 : \frac{1}{la}$

Eſt adeo ſubnormalis tertia proportionalis ad tangentem $P\Gamma = 1 : la$ & ſemiordinatam $PM = y$.

COROLLARIUM.

281. Quodſi ergo Parabola deſcribatur, cujus parameter ſubtangenti Logiſticæ æqualis; ſemiordinatæ Parabolæ eædem ſunt cum ſemiordinatis Logiſticæ, illius autem abſciſſis hujus ſubnormales æquantur.

PROBLEMA CXIX.

282. *Determinare ſubtangentem curvæ exponentialis, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $xlx = ly$

erit $lxdx + xdx : x = dy : y$

$ylxdx + ydx = dy$

Ergo ſubtangens $ydx : dy = ydx : (ylxdx + ydx) = 1 : (lx + 1)$.

Eſt itaque PT tertia proportionalis Tab.
ad $AB + AP = 1 + lx$ & $AB = 1$ (§. 268). III.
Fig. 30.

PROBLEMA CXX.

283. *Determinare ſubnormalem curvæ, ad quam* $x^x = y$.

Quia $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282); erit ſubnormalis (§. 35) $ydy : dx = (y^2lxdx + y^2dx) : dx = y^2lx + y^2 = y^2\,(lx + 1)$.

Quærenda igitur eſt ad $AB = 1$, & $PM = y$, tertia proportionalis y^2 & hinc porro ad $AB = 1$, $AB + AP = 1 + lx$,

atque

atque lineam inventam y^2 quarta proportionalis.

PROBLEMA CXXI.

Tab. III. Fig. 30. 284. *Determinare minimam applicatam* SR *in curva exponentiali, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam $ylxdx + ydx = dy$ (§. 282);
fiat $ylxdx + ydx = 0$ (§. 63).

erit $lx + 1 = 0$

$1 = -lx$

Fiat ergo AT $=$ AB $= 1$; erit TV $=$ AR $= x$ (§. 554 *part.* 1).

Quodsi pro lx in æquatione curvæ $xlx = ly$ substituatur valor modo inventus -1; prodibit $x = -ly$. Fiat igitur AQ $=$ VT $= -x$: erit NQ $=$ SR $= y$ §. *cit part.* 1).

PROBLEMA CXXII.

285. *Quadrare curvam exponentialem, ad quam* $x^x = y$.

Quoniam elementum areæ ydx (§. 98) erit area curvæ $= \int x^x dx =$ [si pro x ponatur $1 + y$] $v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{8}v^4 + \frac{1}{15}v^5 + \frac{1}{72}v^6$ &c. in infinitum (§ 267).

PROBLEMA CXXIII.

286. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subtangens* $= 1 : (1 + lx)$.

Quoniam $1 : (1 + lx) = ydx : dy$ (§. 20)

erit $dy = y(1 + lx)dx$

$dy : y = dx + lxdx$

$\int(dy : y) = ly, \int(dx + lxdx) = xlx$

$ly = xlx$

$y = x^x$ (§. 341 *Arithm.*)

PROBLEMA CXXIV.

287. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2(lx + 1)$.

Quoniam $y^2(lx + 1) = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2(lx + 1)dx = ydy$

$lxdx + dx = dy : y$

$xlx = ly$ (§ 243)

$x^x = y$ (§. 341 *Arithm.*).

PROBLEMA CXXV.

288. *Invenire æquationem ad curvam, cujus subnormalis* $y^2 la$.

Quoniam $y^2 la = ydy : dx$ (§. 35)

erit $y^2 ladx = ydy$

$ladx = dy : y$

$xla = ly$ (§. 243)

$a^x = y$ (§ 341 *Arithm.*)

Est ergo Curva quæsita Logarithmica vulgaris, seu Logistica (§. 273).

PROBLEMA CXXVI.

289. *Invenire æquationem ad curvam, cujus area* $(2x^2 lx - x^2) : 4la$.

Quoniam (§. 98)

$(4xlxdx + 2xdx - 2xdx) : 4la = ydx$

erit $4xlx = 4yla$

$xlx = yla$

$x^x = a^y$ (§. 341 *Arithm.*)

Curva hæc vi Probl. 114 (§. 268) ita construitur, ope Logarithmicæ vulgaris MBN. Sit nempe AB $= 1$, quæ in infinitum producatur. Fiat AD $= a$, & AC $= x$, ducanturque DL & CM ipsi AP, HL & PM ipsi AC parallelæ; erit DL $=$ AH $= la$ & CM $=$ AP $= lx$ (§. 268). Fiat AF $=$ AH & ducatur FE ipsi CG parallela, per A vero & E recta AG ipsi CM continuatæ in G occurrens, erit CG $= xlx : la = y$ (§. 268 *Geom.*); adeoque punctum G in curva quæsita, quæ definitur per $x^x = a^y$. Tab. III. Fig. 32.

Corollarium I.

Tab. III. Fig. 32.

290. Quia $lxdx + dx = lady$ (§. 243)
erit $dx = lady : (lx + 1)$
$ydx : dy = yla : (lx + 1)$ (§. 20).
Est ergo subtangens curvæ hujus exponentialis quarta proportionalis ad AB + AP, CG & constantem AH.

Corollarium II.

291. Quia $(lxdx + dx) : la = dy$ (§. 290); erit $ydy : dx = y(lx + 1) : la$, adeoque subnormalis curvæ hujus exponentialis est quarta proportionalis ad constantem AH, ad AP + AB & ad CG. Tab. III. Fig. 32.

Corollarium III.

292. Est ergo subtangens ad subnormalem ut $yla : (lx + 1)$ ad $y(lx + 1) : la$, hoc est, ut la^2 ad $(lx + 1)^2$ (§. 124 part. 1) Quare quadratum compositæ ex constante AB & variabili AP est ad quadratum constantis AH ut subnormalis curvæ exponentialis ad ejus subtangentem.

SECTIO QUARTA.

DE CALCULO DIFFERENTIO-DIFFERENTIALI.

CAPUT I.

De natura Calculi differentio-differentialis.

Definitio XIV.

293. Calculus differentio-differentialis est methodus quantitates differentiales denuo differentiandi.

Corollarium.

294. Quoniam signum differentialis est *d* (§. 8): differentiale ipsius *dx* erit *ddx*: differentiale ipsius *ddx* erix *dddx*, & ita porro.

Hypothesis.

295. *Scribantur ddx, dddx, ddddx* &c. *compendiosius* d^2x, d^3x, d^4x &c.

Definitio XV.

296. *Differentiale primi gradus* est infinitesima quantitatis ordinariæ, ut *dx*. *Differentiale secundi gradus* est infinitesima quantitatis differentialis primi gradus, veluti *ddx*, *dxdx* vel dx^2, *dxdy*. *Differentiale tertii gradus* est infinitesima quantitatis differentialis secundi gradus, ut *dddx*, dx^3, *dxdydz* & ita porro.

Problema CXXVII.

297. *Invenire regulas differentiandi differentialia quæcunque data.*

Resolutio.

Eodem prorsus modo investigari possunt, quo supra invenire docuimus regulas differentiandi quantitates ordinarias (§ 17, 19): id quod uno alteroque exemplo ostendere libet.

Ex. gr. I. Sit investigandum differentiale ipsius *xdx*.

Fiat $xdx = v$
erit $dx = v : x$
$d^2x = (xdv - vdx) : x^2$ (§. 19)
$x^2 d^2 x = xdv - vdx$
$vdx + x^2 d^2 x = xdv$

hoc

hoc est, ob $v = xdx$

$$xdx^2 + x d^2x = xdv$$

$$dx^2 + xd^2x = dv$$

Differentiatur ergo xdx eodem modo, quo duæ quantitates ordinariæ se mutuo multiplicantes differentiari solent (§.12).

II. Sit differentiale ipsius $x : dx$ investigandum.

Fiat $x : dx = v$

$$x = vdx$$

$$dx = vd^2x + dxdv, \textit{ per cas. præc.}$$

$$dx - vd^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = x : dx$

$$dx - xd^2x : dx = (dx^2 - xd^2x) : dx = dxdv$$

$$(dx^2 - xd^2x) : dx^2 = dv$$

Differentiatur itaque $x : dx$ eodem modo, quo quantitates ordinariæ se mutuo dividentes differentiari solent (§.19).

III. Sit differentiale ipsius dx^2 investigandum.

Fiat $dx^2 = v$

erit $dx = v : dx$

$$d^2x = (dxdv - vd^2x) : dx^2, \textit{ per cas. 2.}$$

$$dx^2d^2x = dxdv - vd^2x$$

$$vd^2x + dx^2d^2x = dxdv$$

hoc est, ob $v = dx^2$

$$dx^2d^2x + dx^2d^2x = 2dx^2d^2x = dxdv$$

$$2dxd^2x = dv$$

Differentialium igitur potentiæ veluti dx^2, eodem modo differentiantur, quo potentiæ quantitatum ordinariarum differentiari solent (§. 13, seqq.).

Corollarium I.

298. Cum differentialia composita aut se mutuo multiplicent, aut se mutuo dividant, aut potentiæ, sive perfectæ, sive imperfectæ, differentialium primi gradus existant; differentialia eodem modo, quo quantitates ordinariæ, differentiantur.

Corollarium II.

299. Calculus adeo differentio-differentialis non est diversus a calculo differentiali (§. 293).

Problema CXXVIII.

300. *Differentiare differentialia.*

Resolutio.

Differentialia considerentur instar ordinariarum quantitatum, & ex circumstantiis casuum specialium dijudicetur quænam sint variabiles, quænam constantes. Ipsa vero differentiatio absolvatur per Problemata *Cap.* 1. *Sect.* 1. (vi §. 299).

Ex. gr. Sit differentiale denuo differentiandum $= 1 : dx$, & 1 quantitas constans, erit $d(1 : dx) = -d^2x : dx^2$ (§.19). Similiter reperitur $d(ydy : dx) = (dy^2 + yd^2y) : dx$, si dx constans; vel $(dxdy^2 - ydyd^2x) : dx^2$, si dy constans.

 CAPUT

CAPUT II.

De usu Calculi differentio-differentialis in inveniendo puncto flexus contrarii curvarum.

DEFINITIO XVI.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 301. *Punctum flexus contrarii* est punctum M, in quo curva flectitur in partes contrarias, ut scilicet axi, aut puncto cuidam fixo convexitatem obvertat, cum antea concavitatem obverteret. Vocatur *Punctum regressus*, si curva AMI in contrarias partes flexa regreditur versus verticem A.

PROBLEMA CXXIX.

302. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum ordinatæ sunt inter se parallelæ.*

RESOLUTIO.

Tab. III. Fig. 33. n. 1. 2. Sint duæ curvæ AMS, quarum una axi concavitatem, altera convexitatem obvertat. Ducatur tangens TM, sintque PM, *pm* & QS infinite propinquæ, & $Pp = pQ$ hoc est. *dx* sit constans. Demittantur ex punctis curvarum M & *m* perpendiculares MR & *mr*. Quoniam *pm* ipsi QS parallela, *per hypoth.* erit angulus $MmR = mSr$ (§. 233 *Geom.*). Sed $MR = Pp$ & $mr = pQ$ *per hypoth.* adeoque $MR = mr$ (§. 87 *Arithm.*). Ergo $mR = rS$ (§. 251 *Geom.*). Est vero $Sr > Vr$, quando curva axi concavitatem obvertit, & $Sr < Vr$, quando convexitas curvæ axem respicit. Quamobrem, in casu priore, differentia semiordinatarum *dy* continuo decrescit, in posteriore autem crescit, sumta abscissæ differentia *dx* pro constante. In puncto itaque flexus contrarii differentia semiordinatarum *dy* est minimum aliquod, quando curva primum ad axem concava, deinde convexa; maximum vero aliquod, quando curva ad axem primum convexa, deinde concava. Invenitur adeo illud punctum, si fiat $ddy = 0$, vel $ddy = \infty$, hoc est, si sumpta *dx* pro constante, valor ipsius *dy* denuo differentietur (§ 300) & quæ prodit differentia vel nihilo, vel infinito æqualis ponatur.

COROLLARIUM.

303. Quodsi æquatio ad curvam ignotam detur; inveniri potest, utrum convexitatem, an concavitatem axi obvertat, si ex æquatione differentiali eruatur ratio *m*R & MR. Ex. gr. In Parabola (§. 388 *part.* 1).

$$ax = y^2$$

adeoque $adx = 2ydy$

$$a : 2y = dy : dx$$

hoc est $a : 2\sqrt{ax} = dy : dx$

Crescente adeo abscissa x, decrescit ratio $a : 2\sqrt{ax}$ (§. 205 *Arithm.*). Quare cum *dx* sit constans, *per hypoth.* *dy* decrescere debet (§. 204 *Arithm.*) Parabola igitur constanter concavitatem axi obvertit, adeoque punctum flexus contrarii habet nullum.

PROBLEMA CXXX.

304. *Determinare punctum flexus contrarii* M *in Cycloide* AMN *ejus naturæ, ut sit* AQB : BN = AQ : QM. Tab. III. Fig. 34.

Sit

Tab. III. Fig. 34. Sit semiperipheria circuli genitoris AQB $= p$, BN $= a$, AB $= 1$, PQ $= v$, AQ $= z$, AP $= x$, PM $= y$. Quoniam *per hypoth.*

AQB : BN = AQ : QM

$$p : a = z : \frac{az}{p}$$

erit PM = PQ + QM $= v + az : p$

Est adeo æquatio ad curvam

$$y = v + az . p$$

unde $dy = dv + adz : p$.

vel $pdy = pdv + adz$

Sed $dz = dx : 2\sqrt{(x - xx)}$ (§. 157) & ob $v = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), $dv = (dx - 2xdx) : 2\sqrt{(x - xx)}$.

Ergo $2pdy = (pdx - 2pxdx + adx) : \sqrt{(x - xx)}$.

Quodsi adeo dx sumatur pro constante; erit (§. 300)

$$2pddy = -\frac{2p\sqrt{(x - xx)}\,dx^2}{x - xx}$$

$$\frac{pdx^2 - 4pxdx^2 + adx^2 + 4px^2dx^2 - 2axdx^2}{(x - x^2)\,2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(-4px + 4px^2 - p + 4px - a - 4px^2 + 2ax)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$

$$= \frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}}$$ Quare (§. 302)

$$\frac{(2ax - p - a)\,dx^2}{2(x - xx)\sqrt{(x - xx)}} = 0$$

$$2ax - p - a = 0$$

$$2ax = a + p$$

$$x = \tfrac{1}{2} + p : 2a$$

Ergo CP = AP — AC $= x - \frac{1}{2} = p : 2a$. Est adeo $a : p = \frac{1}{2}$: CP.

BN : AQB = BC : CP.

PROBLEMA CXXXI.

305. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $axx = (xx + aa)y$.

Quoniam $axx = (xx + aa)\,y$

erit $axx : (xx + aa) = y$

$$\frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{(xx + aa)^2} = dy$$

hoc est, $\dfrac{2a^3xdx}{x^4 + 2a^2x^2 + a^4} = dy$

Quodsi adeo dx sumatur pro constante reperietur (§. 300)

$$\frac{(2a^3x^4 + 4a^5x^2 + 2a^7)dx^2 - (8a^3x^4 + 8a^5x^2)dx^2}{(x^2 + a^2)^4}$$

$$= \frac{2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2)\,dx}{(x^2 + a^2)^4} = ddy$$

Quare (§. 302)

$$2a^7 - 6a^3x^4 - 4a^5x^2 = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\;(2a^3$$

$$a^4 - 3x^4 - 2a^2x^2 = 0$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}\;(aa + xx$$

$$aa - 3xx = 0$$

$$aa = 3xx$$

$$\tfrac{1}{3}aa = xx$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{3}aa} = x$$

Quodsi valor ipsius x^2 in æquatione data $axx = (xx + aa)\,y$ substituatur: prodibit

$$\tfrac{1}{3}a^3 = \tfrac{4}{3}aay$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}\;(\tfrac{4}{3}aa$$

$$\tfrac{1}{4}a = y$$

Quare si $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ & $\frac{1}{4}a$ jungantur ad angulos rectos, punctum flexus contrarii determinatur, utut curva nondum fuerit descripta.

PROBLEMA CXXXII.

306. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

Quoniam $4b^3x = 2b^2y^2 - y^4$

erit $4b^3dx = 4b^2y\,dy - 4y^3dy$

$$\frac{b^3\,dx}{b^2y - y^3} = dy$$

Porro quoniam dx constans, reperietur (§. 300),

ddy

$$ddy = \frac{-b^5 dxdy + 3b^3 y^2 dxdy}{(b^2 y - y^3)^2} = 0$$

$$3b^3 y^2 - b^5 = 0$$

$$3y^2 = b^2$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{3} b^2}$$

Subſtituatur hic valor in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$, erit

$$4b^3 x = \tfrac{2}{3} b^4 - \tfrac{1}{9} b^4 = \tfrac{5}{9} b^4$$

$$x = \tfrac{5}{36} b$$

Quodſi ſit $x = 0$, erit

$$2b^2 y^2 - y^4 = 0$$

$$2b^2 = y^2$$

$$\sqrt{2b^2} = y$$

Quodſi ponamus $dy = \infty$, erit ob $b^3 dx : (b^2 y - y^3) = dy$

$$b^2 y - y^3 = 0$$

$$b^2 - y^2 = 0$$

$$b^2 = y^2$$

$$b = y$$

in caſu maximi (§. 63).

Quodſi denique hic valor ſubſtituatur in æquatione ad curvam $4b^3 x = 2b^2 y^2 - y^4$; erit

$$4b^3 x = 2b^4 - b^4 = b^4$$

adeoque $x = \tfrac{1}{4} b$

Curvæ igitur hujus ductus eſt prorſus mirabilis.

PROBLEMA CXXXIII.

307. *Determinare punctum flexus contrarii in curva, ad quam* $ay^2 = x^3 - bx^2$.

Quia $ayy = x^3 - bx^2$

erit $2aydy = 3x^2 dx - 2bxdx$

$$dy = \frac{3x^2 dx - 2bxdx}{2ay}$$

$$ddy = 0 =$$

$$\frac{12axydx^2 - 4abydx^2 - 6ax^2 dxdy + 4abxdxdy}{4a^2 y^2}$$

Hinc

$$(12axy - 4aby) dx^2 = (6ax^2 - 4abx) dxdy$$

$$\frac{(6x - 2b) ydx}{3x^2 - 2bx} = dy = \frac{(3x^2 - 2bx) dx}{2ay}$$

$$(12x - 4b) ayy = (3x^2 - 2bx)^2$$

$$(12x - 4b)(x^3 - bx^2) = (3x^2 - 2bx)^2$$

hoc eſt,

$$12x^4 - 16bx^3 + 4b^2 x^2 = 9x^4 - 12bx^3 + 4b^2 x^2$$

$$3x^4 - 4bx^3 = 0$$

$$3x - 4b = 0$$

$$3x = 4b$$

$$x = \frac{4}{3} b$$

Subſtituatur valor ipſius x in æquatione data $ayy = x^3 - bx^2$; reperietur

$$ayy = \tfrac{64}{27} b^3 - \tfrac{16}{9} b^3 = \tfrac{64}{27} b^3 - \tfrac{48}{27} b^3 = \tfrac{16}{27} b^3$$

$$y = \tfrac{4}{3} \sqrt{(b^3 : 3a)}$$

PROBLEMA CXXXIV.

308. *Determinare punctum flexus contrarii in curva ad quam* $y - a = (x - a)^{3:5}$

Quoniam $y - a = (x - a)^{3:5}$

erit $dy = \tfrac{3}{5} (x - a)^{-2:5} dx$

Quodſi ergo dx ſumatur pro conſtante; reperietur

$$ddy = -\tfrac{6}{25} (x - a)^{-7:5} dx^2 = 0$$

$$-\tfrac{6}{25} (x - a)^{-7:5} = 0$$

$$-6 = 0$$

Quoniam nullus valor ipſius x prodit in hypotheſi $ddy = 0$; ponatur

$-6dx$

$$-\frac{6}{25}(x-a)^{-7:5}dx^2 = \infty$$

erit $25(x-a)^{7:5} = 0$

$$x - a = 0$$

$$x = a$$

PROBLEMA CXXXV.

309. *Determinare punctum flexus contrarii in curvis, quarum semiordinatae* CM, C*m*, *ex puncto fixo* C *ducuntur.*

Sit C*m* ipsi CM infinite propinqua
Tab. III. Fig. 35. n. 1. 2. & CM $= y$. Tangat TM curvam in puncto M, & occurrat ipsi CT ad CM perpendiculari in T. Erigatur etiam C*t* perpendicularis ad C*m*, & ducatur tangens *tm* ad punctum *m*, quae ipsi C*t* in *t* occurret. Secabit autem tangens TM perpendicularem C*t* in L, eritque C*t* < CL, quando curva puncto C seu polo convexitatem obvertit: ast eadem C*t* > CL, quando curva est versus polum C concava. Igitur in flexus contrarii puncto L*t* = 0. Describatur jam ex centro C radio CM arcus MR $= dx$ & radio CT arcus TH; erit ob MCT = *m* C*t* (§. 145 *Geom.*) MC*m* = HCT (§. 91 *Arithm.*); consequenter arcus TH ∽ MR (§. 141 *Geom.*). Porro TCM est rectus, *per construct.* MR*m* itidem rectus (§. 38), adeoque TCM = MR*m* (§. 145 *Geom.*) Et quia TMC = M*m*C + MC*m* (§. 239 *Geom.*), & MC*m* = 0; erit M*m*R = TMC, consequenter (§. 267 *Geom.*)

$$mR : MR = MC : TC$$

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

Et ob arcus MR & TH similes, *per demonstrata*, erit (§. 413 *Geom.* & §. 171 *Arithm.*)

$$CM : CT = MR : TH \qquad \text{Tab. III. Fig. 35.}$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = dx : \frac{dx^2}{dy}$$

Denique cum, ob infinite parvum LCT, angulus HLT = LTC (§. 239 *Geom.*), & H rectus (§. 38), MCT itidem rectus, *per construct.* erit (§. 267 *Geom.*)

$$CM : CT = TH : HL$$

$$y : \frac{ydx}{dy} = \frac{dx^2}{dy} : HL$$

Ergo HL $= dx^2 : dy^2$.

Est vero ob CT $= ydx : dy$, sumto arculo MR $= dx$ pro constante, tH $= (dxdy^2 - ydxddy) : dy^2$ (§. 300). Ergo tL $= t$H + HL $= (dxdy^2 - ydxddy + dx^3) : dy^2$.

Fiat jam $\frac{dxdy^2 - ydxddy + dx^3}{dy^2} = 0$

erit $dy^2 + dx^2 = yddy$

PROBLEMA CXXXVI.

310. *Determinare punctum flexus contrarii in Conchoide* NICOMEDIS.

Sit AB = qM $= a$, BC $= b$, C$q = z$, Tab. I.
CM $= y$, M$r = dx$, erit $mr = dy$ & Fig. 5.
(§. 535 *part.* 1)

$$z + a = y$$

$$dz = dy$$

Porro B$q = \sqrt{(zz - bb)}$ (§. 417 *Geom.*) & ducto arculo qt, erit ob rectos t & B, atque S & q non nisi infinite parvo angulo qCS differentes (§. 239 *Geom.*), adeoque aequales (§. 4), △Sqt ∽ △BCq (§. 267 *Geom.*); consequenter

$$Bq : BC = St : tq$$

$$\sqrt{(z^2 - b^2)} : b = dz : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2 - b^2)}}$$

Et ob sectores Cqt & CMr similes est

Tab.I. Fig.5. $Cq : qt = CM : Mr$

$$z : \frac{bdz}{\sqrt{(z^2-b^2)}} = z + a : \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{(z^2-b^2)}}$$

Unde $dx = (bzdz + abdz) : z\sqrt{(z^2 - b^2)}$

$$zdx \sqrt{(z^2-b^2)} = bzdz + abdz$$

$$\frac{zdx \sqrt{(z^2-b^2)}}{bz + ab} = dz = dy$$

Si itaque dx ſumatur pro conſtante, cum ſit differentiale ipſius $zdx\sqrt{(z^2-b^2)} = dzdx\sqrt{(z^2-b^2)} + z^2dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)} = (2z^2-b^2)dzdx : \sqrt{(z^2-b^2)}$ & differentiale denominatoris $bz + ab$ ſit bdz, reperitur $ddy = (2bz^3 - b^3z + 2abz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} - bz\sqrt{(z^2-b^2)}dzdx : (bz+ab)^2 = (bz^3 + 2abbz^2 - ab^3)dzdx : (bz+ab)^2\sqrt{(z^2-b^2)} =$ [ſubſtituto valore ipſius dz,] $(bz^4 + 2abz^3 - ab^3z)dx^2 : (bz+ab)^3$.

Quoniam in puncto flexus contrarii

$$yddy = dx^2 + dy^2 \ (\S.\ 308)$$

hinc tandem eruitur

$$b(z+a)(z^4 + 2az^3 - ab^2z)dx^2 : (bz+ab)^3$$

$$= dx^2 + (z^4 - b^2z^2)dx^2 : (bz+ab)^2$$

$$z^4 + 2az^3 - ab^2z = (bz+ab)^2 + z^4 - b^2z^2$$

$$2az^3 - ab^2z = b^2z^2 + 2ab^2z + a^2b^2 - b^2z^2$$

$$= 2ab^2z + a^2b^2$$

$$2az^3 - 3ab^2z = a^2b^2$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

Tab.I. Fig.14. Deſcribatur itaque parametro b parabola & (§.622 *part.*1) fiat $AL = \frac{5}{4}b$, & $LI = \frac{1}{4}a$. Ex centro I per verticem A deſcribatur circulus: dico eſſe $PM = z$. Nam $AI^2 = LI^2 + AL^2 = \frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb$, & $MR = z - \frac{1}{4}a$, $AP = z^2 : b$, $IR = z^2 : b - \frac{5}{4}b$. Quare ob $AI^2 = MI^2 = IR^2 + MR^2$, $\frac{1}{16}aa + \frac{25}{16}bb =$

$$\frac{z^4}{bb} - \tfrac{10}{4}z^2 + \tfrac{25}{16}b^2 + z^2 - \tfrac{1}{2}az + \tfrac{1}{16}aa$$

Tab.I. Fig.5.

$$\frac{z^4}{bb} - \tfrac{6}{4}z^2 - \tfrac{1}{2}az = 0 \qquad z : bb$$

$$z^3 - \tfrac{3}{2}b^2z - \tfrac{1}{2}ab^2 = 0$$

SCHOLION.

311. *Niſi inconſulta nobis viſa fuiſſet figurarum multiplicatio, Parabolam circa axem* CT *deſcripſiſſemus, ſtatuto vertice in* C *&* *crure ſurſum tendente.*

PROBLEMA CXXXVII.

312. *Determinare punctum flexus contrarii in Spirali parabolica* AMC, *quæ generatur, ſi axis Parabolæ in peripheriam circuli incurvatur.* Tab. III. Fig.36.

Quoniam ſemiordinatæ PM ad axem perpendiculares; in centro C concurrere debent (§. 38). Quare ſi parameter Parabolæ a, abſciſſa $AP = v$, $PM = y$; erit æquatio ad Spiralem parabolicam

$$av = y^2$$

adeoque

$$adv = 2ydy$$

$$dv = 2ydy : a$$

Sit porro radius circuli $= r$, $MR = dx$; erit $CM = r - y$, &

$$CP : Pp = CM : MR$$

$$r : dv = r - y : dx$$

$$rdx = rdv - ydv$$

$$dx = (r - y)dv : r$$

hoc eſt, ſubſtituto valore ipſius dv,

$$(2rydy - 2y^2dy) : ar = dx$$

$$(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4)dy^2 : a^2r^2 = dx^2$$

&, ſi dx ſumatur pro conſtante,

$$\frac{2rdy^2 - 4ydy^2 + 2ryddy - 2y^2ddy}{ar} = 0$$

$$(r - 2y)dy^2 + (ry - y^2)ddy = 0$$

$$(r-y)yddy = (2y - r)dy^2$$

$$yddy = (2y - r)dy^2 : (r - y)$$

Habe-

Habemus adeo

ob $dx^2 + dy^2 = yddy$ (§. 309)

$$\frac{(4r^2y^2 - 8ry^3 + 4y^4 + a^2r^2)\,dy^2}{a^2r^2} = \frac{(2y-r)\,dy^2}{r-y}$$

$$4r^3y^2 - 8r^2y^3 + 4ry^4 + a^2r^3 - 4r^2y^3 + 8ry^4 - 4y^5 - a^2r^2y = 2a^2r^2y - a^2r^3$$

$$4y^5 - 12ry^4 + 12r^2y^3 - 4r^3y^2 + 3a^2r^2y - 2a^2r^3 = 0$$

Hujus æquationis radix y eſt ſemiordinata PM in puncto flexus contrarii.

CAPUT III.

De uſu Calculi differentio-differentialis in inveſtigandis Evolutis curvarum & Radio oſculi.

DEFINITIO XVII.

Tab. III. Fig. 37. 313. Si curvæ BC filum circumplicetur & ſucceſſive iterum ab ea abducatur, extremitas ejus A in rectam MC extenſi curvam aliam deſcribit, quam HUGENIUS inventor (*k*) *Curvam ex evolutione deſcriptam*; ſicut alteram, quæ evolvitur, *Evolutam* vocat.

DEFINITIO XVIII.

314. Portio fili MC appellatur *Radius Evolutæ*, item *Radius curvedinis*, *Radius oſculi*. Circulus enim, qui radio evolutæ MC ex centro C deſcribitur, dicitur curvam ex evolutione deſcriptam in M *oſculari*.

COROLLARIUM I.

315. Evoluta igitur BC eſt locus centrorum omnium circulorum curvam ex evolutione deſcriptam AMI oſculantium.

COROLLARIUM II.

316. Quando punctum B cadit in A, radius evolutæ MC æquatur arcui BC, alias aggregato ex AB & arcu BC.

COROLLARIUM III.

317. Quia elementum arcus M*m* in curva ex evolutione deſcripta eſt arcus circuli radio CM deſcriptus (§. 313); radius evolutæ CM eſt ad curvam AMI perpendicularis (§. 38). Tab. III. Fig. 37.

(*k*) In *Horolog. Oſcillatorio* part. 3. Def. 3. & 60.

COROLLARIUM IV.

318. Quoniam radius evolutæ MC ipſam evolutam BC continuo tangit, ceu ex geneſi manifeſtum (§. 313); curvæ ex evolutione per innumera puncta deſcribuntur, ſi tangentes in quotlibet punctis evolutæ producantur: donec arcubus ſibi reſpondentibus æquales fiant.

SCHOLION.

319. *Meditatio de curvarum oſculis debetur illuſtri* LEIBNITIO, *qui primus Evolutarum* Hugenianarum *in metienda curvedine curvarum uſum oſtendit.*

PROBLEMA CXXXVIII.

320. *Determinare Radium oſculi vel curvedinis in curvis, quarum ſemiordinatæ* PM *&* pm *ſunt ad axem perpendiculares.* Tab. III. Fig. 37.

RESOLUTIO.

Sit ſemiordinata *pm* alteri PM infinite propinqua; ſit item radius oſculi C*m* alteri CM infinite propinquus. Ducatur CE ipſi AB parallela, donec

Sff 2 ſemior-

Tab. III. Fig. 37. semiordinatæ MP continuatæ in E occurrat, & MG eidem axi AB parallela. Quoniam anguli E & R sunt recti, &, ob EMG & CM*m* (§. 317) rectos adeoque æquales (§. 145 *Geom.*) utrinque angulo CMG sublato, EMC = GM*m*; erit (§. 267 *Geom.*)

MR : M*m* = ME : MC

$$dx : \sqrt{(dx^2+dy^2)} = t : \frac{t\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}$$

Jam cum radius MC constans intelligatur, quandiu ex centro C arcus infinite parvus M*m* describitur, interea vero ME augeatur quantitate differentiali R*m*; erit radii osculi CM differentiale nullum (§ 7). Sed, si *dx* sumatur pro constante, differentiale ipsius MC est

$$\frac{dt\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx} + \frac{tdy\,ddy}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}} = \frac{dtdx^2+dtdy^2+tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2)}}.$$

$$\text{Ergo } \frac{dtdx^2+dtdy^2+tdyddy}{dx\sqrt{(dx^2+dy^2}} = 0$$

$$dtdx^2 + dtdy^2 = -tdyddy$$

Quoniam *m*R differentiale semiordinatæ etiam differentiale ipsius ME ob PE constantem; erit $dt = dy$.

$$\text{Quare } dx^2 + dy^2 = -tddy$$

$$(dx^2+dy^2) : -ddy = t$$

Quodsi itaque, ex æquatione ad curvam datam, substituatur valor ipsius dy^2 & $-ddy$; prodibit ME $= t$ in quantitatibus ordinariis.

Si vero radius evolutæ MC ipse desideretur (quem interdum inveniri præstat) fiat (§. 268 *Geom.*) ob PH $= ydy : dx$ (§. 35)

MP : PH = ME : EC Tab. III. Fig. 37.

$$y : \frac{ydy}{dx} = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy} : \frac{dx^2dy+dy^3}{-dxddy}$$

$$\text{Unde } EC^2 = \frac{dx^4dy^2+2dx^2dy^4+dy^6}{dx^2ddy^2}$$

$$ME^2 = \frac{dx^4+2dx^2dy^2+dy^4}{ddy^2} = \frac{dx^6+2dx^4dy^2+dx^2dy^4}{dx^2ddy^2}$$

$$MC^2 = \frac{dx^6+3dx^4dy^2+3dx^2dy^4+dy^6}{dx^2ddy^2} = \frac{(dx^4+2dx^2dy^2+dy^4)(dx^2+dy^2)}{dx^2ddy^2}$$

$$MC = \frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{-dxddy.}$$

PROBLEMA CXXXIX.

321. *Data æquatione ad curvam algebraicam, invenire æquationem ad Evolutam.*

RESOLUTIO.

1. Investigentur quantitates BN & CN in valore abscissæ AP aut semiordinatæ PM. Nimirum ME invenitur (§. 320): unde subducta PM relinquit PE=NC. Sed per analogiam PM : PH=ME : EC (§. 268 *Geom.*) reperitur EC. Si vero ex AP+EC =AN subtrahatur AB radius Evolutæ in vertice B, per Probl. præc. determinandus, relinquitur BN. Tab. III. Fig. 37.
2. Fiat valor ipsius BN$=v$, CN$=z$ & communis æquationum reductio dabit æquationem ad Evolutam in puris v & z atque constantibus.

PROBLEMA CXL.

322. *Invenire Radium circuli Parabolam osculantis, & æquationem ad ejus Evolutam.*

I. Quo-

I. Quoniam $ax = y^2$

erit $adx = 2ydy$

$adx : 2y = dy$

$a^2dx^2 : 4y^2 = dy^2$

h. e. $adx^2 : 4x = dy^2$

Et, ſi dx ſumatur pro conſtante, invenietur ob $adx : 2\sqrt{ax} = dy$

$-adx^2 : 4x\sqrt{ax} = ddy$

Tab. III. Fig. 37. Unde $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy} = \frac{(4xdx^2 + adx^2)4x\sqrt{ax}}{4axdx^2} = \frac{(a+4x)\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a} = y + \frac{4xy}{a}$ $= t =$ ME $=$ PM $+$ PE. Eſt vero PM $= y$. Ergo PE $= 4xy : a$ hoc eſt, quia $x = y^2 : a$, PE $= 4y^3 : aa$.

Conſtructio. Quoniam PM $= y$, TP $= 2y^2 : a$, (§. 21); ſi in T excitetur ad TM perpendicularis TE ipſi MP continuatæ in E occurrens; erit PE $= 4y^4 : ay = 4y^3 : aa$ (§. 327 *Geom*). Quodſi ulterius in E & M excitentur perpendiculares EC & MC ad ME & MT; communis interſectio in C radium oſculi ſeu Evolutæ MC determinabit (§. 317).

II. Quoniam EC ipſi PH parallela; erit (§. 268 *Geom.*) ob PH $= \frac{1}{2}a$ (§. 36)

MP : PH $=$ ME : EC

$y : \frac{1}{2}a = y + \frac{4xy}{a} : \frac{1}{2}a + 2x$

adeoque EC$^2 = \frac{1}{4}aa + 2ax + 4xx$

ME$^2 = ax + 8x^2 + 16x^3 : a$

MC$^2 = \frac{1}{4}aa + 3ax + 12x^2 + 16x^3 : a$.

Jam cum MC coincidit in AB, hoc eſt, quando radius Evolutæ eſt AB, $x = 0$. Quare AB$^2 = \frac{1}{4}aa$ & hinc AB $= \frac{1}{2}a$. Eſt adeo BN $=$ AP $+$ PM $-$ AB $= 3x + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a = 3x$. Sit jam BN $= v$; CN $=$ PE $= z$: erit

Tab. III. Fig. 37.

$v = 3x \qquad z = 4x\sqrt{ax} : a$

$\frac{1}{3}v = x \qquad z = \frac{4}{3}v\sqrt{\frac{1}{3}av} : a$

$3az = 4v\sqrt{\frac{1}{3}av}$

$9a^2z^2 = \frac{16}{3}av^3$

$a : 3$

$27az^2 = 16v^3$

En æquationem ad evolutam Parabolæ *Apollonianæ*: unde intelligitur Evolutam Parabolæ Apollonii eſſe Parabolam ſecundi generis, cujus parameter $= \frac{27}{16}$ parametri Parabolæ *Apollonianæ*.

III. Si MC in terminis analyticis quæratur, erit, ſubſtitutis in formula generali $(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} . -dxddy$ valoribus dy^2 & $-ddy$ paulo ante inventis, MC $= (dx^2 + \frac{adx^2}{4x})\sqrt{(dx^2 + \frac{adx^2}{4x})} 4x\sqrt{ax} : adx^3 = (4x+a)dx^3\sqrt{(4x+a)}4x\sqrt{ax} : 8axdx^3\sqrt{x} = (4x+a)\sqrt{(4x+a)} : 2\sqrt{a}$

Quodſi fiat $x = 0$, erit vi n. 1, ME $= 0$ & MC $= a\sqrt{a} : 2\sqrt{a} = \frac{1}{2}a$, hoc eſt, circuli Parabolam in vertice oſculantis diameter æquatur parametro, & centrum ejus, ob ME $= 0$, eſt in axe Parabolæ. Porro, quia MC $= \frac{(4x+a)\sqrt{(4x+a)}}{2\sqrt{a}} = \frac{(4ax+aa)\sqrt{(4ax+aa)}}{2a^2}$, & $\frac{1}{2}\sqrt{(4ax+aa)}$ $=$ MH ſeu normali: erit MC $= \frac{8\text{MH}^3}{2a^2}$

Eſt autem 8MH^3 cubus duplæ normalis MH, ſicuti $2a^2$ duplum quadrati parametri.

Conſtructio. Fiat a : 2MH $=$ 2MH : $\frac{4\text{MH}^2}{a}$ & 2MH : $\frac{4\text{MH}^2}{a} = \frac{4\text{MH}^2}{a} : \frac{8\text{MH}^3}{a^2}$ hoc eſt, quæratur ad parametrum & duplam normalem 2MH quarta continue proportionalis, erit ejus dimidium radius oſculi MC.

Tab. III. *Fig.* 37.

Quoniam etiam $MC = 4MH^3 : a^2$, erit etiam $a : MH = MH : \frac{MH^2}{a} : \& \; MH : \frac{MH^2}{a} = \frac{MH^2}{a} : \frac{MH^3}{a^2}$, hoc est, quæratur ad parametrum & normalem MH quarta continue proportionalis, erit ejus quadrupla radius osculi seu evolutæ MC.

PROBLEMA CXLI.

323. *Determinare Radium osculi seu Evolutæ* MC *in infinitis Parabolis aut Paraboloidibus.*

Ad infinitas parabolas (§. 519 *part.* 1).

$$y^m = a^{m-1}x$$

$$my^{m-1}dy = a^{m-1}dx$$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, erit

$$(m^2-m)\, y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = 0$$

$$(m^2-m)\, y^{m-2}\, dy^2 = -my^{m-1}\, ddy$$

$$(m-1)\, y^{-1}\, dy^2 = -ddy$$

Quamobrem

$(dx^2+dy^2) : -ddy = (ydx^2+ydy^2) : (m-1)dy^2$ hoc est, ob $dx^2 = m^2y^{2m-2}\, dy^2 : a^{2m-2}$

$$ME = \frac{m^2y^{2m-2}dy^2 + a^{2m-2}ydy^2}{(m-1)\, a^{2m-2}dy^2} =$$

$$\frac{m^2y^{2m-1} + a^{2m-2}y}{(m-1)\, a^{2m-2}} = \frac{m^2y^{2m-2}}{(m-1)a^{2m-2}} + \frac{y}{m-1}$$

$$= \frac{1}{m-1}\, y + \frac{m^2x^2}{(m-1)\, y}$$

Sit jam $m = 2$, erit $x = y^2 : a$ & hinc $x^2 = ax \,.\, y^2 : a^2 = xy^2 : a$, adeoque $ME = 4xy^2 : ay + y = 4xy : a + y$, ut in Problemate præcedente.

PROBLEMA CXLII.

324. *Determinare Radium osculi in circulo.*

Quoniam ad circulum (§. 377 *part.* 1)

$$y^2 = 2rx - xx$$

erit $2ydy = 2rdx - 2xdx$

$$ydy = rdx - xdx$$

Quare si dx sumatur pro constante, erit

$$dy^2 + y\, ddy = -dx^2$$

$$(dx^2 + dy^2) : y = -ddy$$

Quare (§. 320)

$$\frac{dx^2+dy^2}{-ddy} = \frac{y\,(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2} = y$$

Est itaque $ME = y$, hoc est, punctum E cadit in P, adeoque C in centrum circuli H (§. 38, 320). Radius igitur circuli idem est cum radio osculi, hoc est, circulus, qui circulum osculatur, huic congruit & circuli Evoluta est centrum ejus.

PROBLEMA CXLIII.

325. *Invenire Radium osculi in Ellipsi.*

Quoniam ad Ellipsin (§. 420 *part.* 1)

$$ay^2 = abx - bx^2$$

erit $2aydy = abdx - 2bxdx$

$$dy = (abdx - 2bxdx) : 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$$

ob $a^2y^2 = a^2bx - abx^2$.

Unde, si dx sumatur pro constante,

$$ddy = -\frac{4bdx^2\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}{4a^2bx-4abx^2} - \frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}} =$$

$$\frac{(-4a^2b^2x + 4ab^2x^2 - a^3b^2 + 4a^2b^2x - 4ab^2x^2)dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}$$

$$= -\frac{a^3b^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}}$$

Nimirum si $D = 2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$ & $N = abdx - 2bxdx$; reperietur $dD = (a^2bdx - 2abxdx) : \sqrt{(a^2bx - abx^2)}$, adeoque $\frac{dD.\,N}{D^2} =$

$$\frac{a^3b^2dx^2 - 4a^2b^2xdx^2 + 4ab^2x^2dx^2}{(4a^2bx-4abx^2)\sqrt{(a^2bx-abx^2)}},$$

quæ est differentialis valoris ipsius dy pars negativa (§. 19).

Est

Est vero porro

$$dy^2 = \frac{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2)\,dx^2}{(4a^2bx - 4abx^2)}$$

Quare $dy^2+dx^2 = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)dx^2 : (4a^2bx - 4abx^2)$ & $(dy^2 + dx^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)}\,dx^3 : (4a^2bx - 4abx^2)\,2\sqrt{(a^2bx - abx^2)}$; consequenter $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy = (a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)\sqrt{(a^2b^2 - 4ab^2x + 4b^2x^2 + 4a^2bx - 4abx^2)} : 2a^3b^2 =$ (brevitatis gratia) $v\sqrt{v} : 2a^3b^2$.

Est vero (§. 44) normalis $MH = y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : dx$. Quare cum sit $y = \sqrt{(abx - bx^2)} : \sqrt{a}$ & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{v} : 2\sqrt{(abx - bx^2)}\sqrt{a}$. Erit $MH = \sqrt{(abx - bx^2)}dx\sqrt{v} : 2a\sqrt{(abx - bx^2)}\,dx = \sqrt{v} : 2a$; consequenter $MH^3 = v\sqrt{v} : 8a^3$; adeoque $4MH^3 = v\sqrt{v} : 2a^3$.

Est itaque $MC = v\sqrt{v} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : b^2$

Constructio. Fiat $b : MH = MH : \frac{MH^2}{b}$ & $MH : \frac{MH^2}{b} = \frac{MH^2}{b} : \frac{MH^3}{b^2}$

hoc est, quæratur ad parametrum b & normalem MH quarta continue proportionalis; erit hujus quadrupla radius osculi MC.

COROLLARIUM.

326. Si AP, sive $x = 0$: circuli in A Ellipsin osculantis AB radius reperitur $a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = a^3b^3 : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLIV.

327. *Invenire Radium osculi seu Evolutæ in Hyperbola.*

Quoniam ad Hyperbolam (§.459 *part.* 1) $ay^2 = abx + bx^2$, radius osculi MC eodem prorsus, ut in Probl. præced. modo invenitur $(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)\sqrt{(4a^2bx + 4abx^2 + a^2b^2 + 4ab^2x + 4b^2x^2)} : 2a^3b^2 = 4MH^3 : bb$ &, si $x = 0$, hoc est in vertice,

$= a^2b^2\sqrt{a^2b^2} : 2a^3b^2 = \frac{1}{2}b$.

PROBLEMA CXLV.

328. *Invenire radium circuli* MC *Cycloidem* AMB *in* M *osculantis.* Tab. III. Fig. 39.

Sit diameter circuli genitoris AD=1, AP=x, PM=y, erit $QP = \sqrt{(x - xx)}$ (§. 377 *part.* 1), arcus $AQ = \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§.157); adeoque $PM = PQ + QM = \sqrt{(x - xx)} + \int(dx : 2\sqrt{(x - xx)})$ (§.575 *part.* 1). Quamobrem

$$y = \sqrt{(x - xx)} + \int\frac{dx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$$dy = \frac{dx - 2xdx + dx}{2\sqrt{(x - xx)}} = \frac{2dx - 2xdx}{2\sqrt{(x - xx)}}$$

$= dx(1 - x) : \sqrt{x}.\sqrt{(1 - x)} = dx\sqrt{(1 - x)} : \sqrt{x}$

Quodsi ergo dx sumatur pro constante, reperietur

$ddy = -dx^2\sqrt{x} : 2x\sqrt{(1 - x)} - dx^2\sqrt{(1 - x)} : 2x\sqrt{x} = (-xdx^2 - dx^2 + xdx^2) : 2x\sqrt{(x - xx)} = -dx^2 : 2x\sqrt{(x - xx)}$.

Unde ob $dx^2 + dy^2 = dx^2 + dx^2.(1 - x) : x = (xdx^2 + dx^2 - xdx^2) : x = dx^2 : x$; eruitur $MC = (dx^2 + dy^2)\sqrt{(dx^2 + dy^2)} : -dxddy$ (§.320) $= 2xdx^3\sqrt{(x - x^2)} : xdx^3\sqrt{x} = 2\sqrt{(1 - x)} = 2DQ$ (§.417 *Geom.*). Nam

$PD^2 = 1 - 2x + xx$

$PQ^2 = x - xx$

$DQ^2 = 1 - x$. Ergo $DQ = \sqrt{(1 - x)}$.

Constructio. Quoniam tangens TM ipsi AQ parallela (§.132); TMQ = AQP (§.233 *Geom.*). Est vero AQD rectus (§.317 *Geom.*), & TMC itidem rectus (§.317): Ergo QMC = PQD (§.91 *Arithm.*); consequenter MC ipsi QD parallela. Constructio igitur talis est: Ducatur MC ipsi QD parallela, & fiat EC = EM; erit C punctum in Evoluta Cycloidis.

Co-

COROLLARIUM I.

329. Si $x = 0$; erit radius evolutæ $2\sqrt{1} = 2 = 2AD$, quia $AD = 1$. Quare si DG fiat $= AD$; in G terminabitur Evoluta ex una parte. Si $x = AD = 1$; erit radius Evolutæ $2\sqrt{(1-1)} = 2\sqrt{0} = 0$. Quare Evoluta ex altera parte in B terminatur.

COROLLARIUM II.

330. Quodsi BL ipsi QD vel MC parallela ducatur, erit LBD = BDQ (§.233 *Geom.*), adeoque arcus QD & BL (§.322 *Geom.*) chordæque cognomines (§.289 *Geom.*); consequenter BL = EC (§.337 *Geom.*), & hinc LC ipsi BE æqualis & parallela (§.257 *Geom.*). Est vero BE arcui QD (§.575 *part.*1) adeoque & alteri BL, *per demonstr.* æqualis. Quare LC æqualis arcui BL (§.87 *Arithm.*). Est itaque Evoluta Cycloidis itidem Cyclois æqualis & similis (§.575 *part.*1), hoc est, Cyclois sui evolutione seipsam describit.

SCHOLION.

331. *Cum Radius osculi aut Evolutæ vel æqualis sit arcui Evolutæ, vel eundem quantitate data excedat (§.316); omnes arcus Evolutarum geometrice rectificantur, quarum radii per constructiones geometricas exhiberi possunt. Unde patet, cur arcus Cycloidis BC sit chordæ* BL *duplus* (§.168): *est enim radius Evolutæ* MC *ejusdem duplus* (§.328) *& Evoluta Cycloidis ipsa quoque Cyclois est* (§.330). *Liquet etiam innumeras inveniri posse curvas, quæ saltem geometrice rectificantur. Ceterum utilis est Radii osculi inventio, quia arcus circuli osculatoris substitui potest pro arcu curvæ, quam osculatur, in praxi. Ita speculum sphæricum cavum, observante* LEIBNITIO *in* Actis Erudit. *A.* 1686, *substituitur parabolico, quia parameter parabolæ est diameter circuli eam in vertice osculantis* (§.317) *sicque perinde ac parabolicum distantiam foci habet quartæ diametri parti æqualem.*

PROBLEMA CXLVI.

332. *Determinare Radium osculi seu Evolutæ in Logarithmica.*

Quoniam in Logarithmica (§.54)

$$\frac{ydx : dy = a}{\dfrac{ydx : a = dy}{dxdy : a = ddy}}$$

quia dx constans seu $ddy = ydx^2 : a^2$,

Est vero $dy^2 = y^2dx^2 : a^2$, adeoque

$$dy^2 + dx^2 = y^2dx^2 : a^2 + dx^2$$
$$= (y^2 + a^2)\,dx^2 : a^2$$
$$(dy^2+dx^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} = dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : a^3$$
$$(dx^2+dy^2)\sqrt{(dx^2+dy^2)} : -dxddy = \frac{dx^3(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-a^3ydx^3 : a^2} = \frac{(y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)}}{-ay}$$

Est igitur Radius osculi seu Evolutæ $= (y^2+a^2)\sqrt{(y^2+a^2)} : ay$.

Enimvero cum a sit subtangens Logisticæ PT, y semiordinata PM, erit $\sqrt{(y^2+a^2)}$ tangens TM (§.417 *Geom.*). Porro cum sit Tab.I. Fig.8.

$$TP : PM = PM : PH$$
$$a : y = y : PH$$

erit subnormalis $PH = y^2 : a$; consequenter TH composita ex subnormali $y^2 : a$ & subtangente $a = (y^2+a^2) : a$.

Habemus adeo

$$y : \frac{y^2+a^2}{a} = \sqrt{(y^2+a^2)} : MC$$

h. e. PM : TH = TM : MC

Theorema. In Logistica Radius osculi seu Evolutæ est quarta proportionalis ad semiordinatam, tangentem atque compositam ex subtangente ac subnormali.

Quantitas negativa est, ob valorem ipsius y in præsente casu negativum.

Porro quoniam ay est spatium logisticum interminatum HPMI (§.134) & $(a^2+y^2)\sqrt{(a^2+y^2)} = TM^3$; erit HPMI : $TM^2 = TM : MC$. Habemus itaque hoc

Theorema. Spatium logisticum interminatum est ad quadratum tangentis, ut tangens ad Radium osculi seu Evolutæ.

SEC-

SECTIO QUINTA.

DE ARITHMETICA INFINITORUM.

CAPUT I.

De natura Arithmeticæ infinitorum.

DEFINITIO XIX.

333. *Rithmetica infinitorum* est methodus summandi series numerorum infinitis terminis constantes, aut earum rationes investigandi.

PROBLEMA CXLVII.

334. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum numerator communis est unitas, denominatores vero progrediuntur in ratione numeratoris primæ ad suum denominatorem.*

Sit fractio prima $1:e$. Numerus terminorum cum sit infinitus, & termini continuo decrescant, devenietur tandem ad infinitesimam (§.2), adeoque summa fractionis primæ & hujus, quæ tanquam ultima consideratur, ipsi fractioni primæ $1:e$ æqualis (§.4). Divisa ergo per $e-1$ dat summam omnium terminorum $1:(ee-e)$, excepto primo (§. 119 *part.* 1). Quare summa integræ seriei $1:(ee-e)+1:e=(1+e-1):(ee-e)=e:(ee-e)=1:(e-1)$.

Sit ex. gr. $e=2$; erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. in infinit.$)=1$.
Sit $e=3$; erit $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{2}$.
Sit $e=4$; erit $\int(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{3}$.
Sit $e=5$; erit $\int(\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{4}$.
Sit $e=6$; erit $\int(\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\frac{1}{216}$ &c. in infinit.$)=\frac{1}{5}$.

PROBLEMA CXLVIII.

335. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis est unitate minor denominatore primæ, & denominatores progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Sit denominator fractionis primæ $=m$; erit numerator $=m-1$. Summa primi & ultimi termini, utpote primo æqualis $=(m-1):m$, quæ per $m-1$ divisa dat summam omnium terminorum, excepto maximo seu primo $1:m$. Quare summa integræ seriei $=m:m=1$.

Sit ex. gr. $m=2$, erit $\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$ &c. in infinit.$)=1$, ut ante (§.334).
Sit $m=3$, erit $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c. in infinit.$)=1$.
Sit $m=4$, erit $\int(\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}$ &c. in infinit.$)=1$.

SCHOLION.

336. Poterat idem per modum Corollarii ex Theoremate præcedente deduci. Est enim $\int(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$ &c.$)=\frac{1}{2}$ (§.334). *Ergo duplum hujus seriei, hoc est,* $\int(\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ &c.$)=\frac{2}{2}=1$. *Et in genere* $\int(\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}$ &c. *in infinit.*$)=1:(m-1)$. *Ergo multiplum hujus seriei, cum sumitur vicibus* $m-1$, *fit necesse est* $(m-1):(m-1)=1$.

PROBLEMA CXLIX.

337. *Invenire summam infinitarum fractionum, ubi numerator communis deficit a denominatore primæ data quantitate, denominatores vero progrediuntur in ratione unitatis ad denominatorem primæ.*

Si terminus primus $=(m-n):m$, qui, utpote æqualis summæ primi & ultimi, divisus per $(m-1)$ dat summam omnium terminorum maximo excepto $(m-n):(m^2-m)$. Quare summa seriei integræ $=(m-n):(m^2-m)+(m-n):m=(m-n+m^2-mn-m+n):(m^2-m)=(m^2-mn):(m^2-m)=(m-n):(m-1)$.

Sit ex. gr. $n=1$, erit $(m-n):(m-1)$
$=(m-1):(m-1)=1$.

Sit $n=2$, $m=4$, erit $\int(\frac{2}{4}+\frac{2}{16}+\frac{2}{64}$ &c.
$=(4-2):(4-1)=\frac{2}{3}$.

Sit $n=2$, $m=5$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{25}+\frac{3}{125}$ &c.
$=(5-2):(5-1)=\frac{3}{4}$.

Sit $n=2$, $m=6$; erit $\int(\frac{4}{6}+\frac{4}{36}+\frac{4}{216}$ &c.)
$=(6-2):(6-1)=\frac{4}{5}$.

Sit $n=2$, $m=7$; erit $\int(\frac{5}{7}+\frac{5}{49}+\frac{5}{343}$ &c.)
$=(7-2):(7-1)=\frac{5}{6}$.

Similiter

Sit $n=3$, $m=6$; erit $\int(\frac{3}{6}+\frac{3}{36}+\frac{3}{216}$ &c.)
$=(6-3):(6-1)=\frac{3}{5}$.

Sit $n=3$, $m=7$; erit $\int(\frac{4}{7}+\frac{4}{49}+\frac{4}{343}$ &c.)
$=(7-3):(7-1)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Sit $n=3$, $m=8$; erit $\int(\frac{5}{8}+\frac{5}{64}+\frac{5}{512}$ &c.)
$=(8-3):(8-1)=\frac{5}{7}$.

Porro

Sit $n=4$, $m=8$; erit $\int(\frac{4}{8}+\frac{4}{64}+\frac{4}{512}$ &c.)
$=(8-4):(8-1)=\frac{4}{7}$.

Sit $n=4$, $m=9$; erit $\int(\frac{5}{9}+\frac{5}{81}+\frac{5}{729}$ &c.)
$=(9-4):(9-1)=\frac{5}{8}$.

Sit $n=4$, $m=10$, erit $\int(\frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}$
&c.) $=(10-4):(10-1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$. &c. &c.

PROBLEMA CL.

338. *Invenire summam fractionum infinitarum, quarum communis est numerator, denominatores vero in ratione quacunque progrediuntur.*

Sit numerator communis $=m$; denominator fractionis primæ $=a$; denominator rationis $=n$; erit series summanda $\frac{m}{a}+\frac{m}{na}+\frac{m}{n^2a}+\frac{m}{n^3a}$ &c. in infinit. Unde eodem, quo in Problematibus præcedentibus, modo reperitur summa $m:(na-a)+m:a=(m+mn-m):(na-a)=mn:(na-a)=mn:a(n-1)$.

Sit ex. gr. $m=5$, $a=6$, $n=2$; erit $\int(\frac{5}{6}+\frac{5}{12}+\frac{5}{24}$ &c.) $=10:6(2-1)=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$.

Sit $m=3$, $a=5$, $n=4$; erit $\int(\frac{3}{5}+\frac{3}{20}+\frac{3}{80}+\frac{3}{320}$ &c.) $=12:5(4-1)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$.

Sit $m=1$, $a=7$, $n=2$; erit $\int(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}$ &c.) $=2:7(2-1)=\frac{2}{7}$.

SCHOLION.

339. *Hoc Problema universalitate sua antecedentia omnia complectitur. Sit enim* $n=a$ & $m=n-l$, *qui est casus Problematis præcedentis: substitutis hisce valoribus in formula præsente, prodit* $(n^2-ln):n(n-1)=(n-l):(n-1)$, *quæ est formula Problematis præcedentis. Similiter sit* $n=a$, $m=n-1$, *erit summa* $=(n^2-n):(n^2-n)=1$, *ut supra* (§. 335). *Denique si* $m=1$, $n=a$; *erit summa* $=n:(n-1)n=1:(n-1)$, *ut supra* (§. 334).

PROBLEMA CLI.

340. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ simplicis ab* 1 *in infinitum continuatæ* $(1+2+3+4+5+6$ &c.) *ad summam totidem maximo æqualium.*

Termi-

Terminus primus $= 1$, numerus terminorum $= n$, differentia $= 1$. Ergo ultimus $= n$, & hinc $\int(1+2+3+4+5$ &c.$) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (§. 107 *part.* 1) & $\int n = n^2$. Cum n sit infinitus numerus, atque (§. 66 *Arith.*) $1 : n = n : n^2$; erit n^2 ipso n infinities majus, adeoque n respectu n^2 pro nihilo habendum (§. 3), consequenter $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n^2$. Est itaque $\int(1+2+3+4+5$ &c. in infinit.$) : \int n = \frac{1}{2}n^2 : n^2 = 1 : 2$ (§. 124 *part.* 1).

Theorema. Summa seriei numerorum naturalium in infinitum continuatæ est ad summam totidem maximo æqualium ut 1 ad 2.

PROBLEMA CLII.

341. *Invenire rationem summæ progressionis arithmeticæ, sive finitæ, sive infinitæ, cujus terminus primus est* 0, *ad summam totidem maximo æqualium.*

Terminus primus $= 0$, ultimus $= v$, numerus terminorum $= n$; erit summa progressionis $= \frac{1}{2}nv$ (§. 107 *part.* 1), summa vero totidem maximo æqualium nv. Est ergo illa ad hanc ut $\frac{1}{2}nv$ ad nv, hoc est, ut 1 ad 2 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIII.

342. *Invenire rationem, quam habet summa omnium quadratorum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa quadratorum $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ (§. 205 *part.* 1). Est vero $1 : n = n^2 : n^3$ (§. 66 *Arithm.*). Ergo, quia 1 infinitesima ipsius n, *per hypoth.* erit etiam n^2 infinitesima ipsius n^3; consequenter $\frac{1}{2}n^2$, adeoque multo magis $\frac{1}{6}n$, respectu ipsius $\frac{1}{3}n^3$ pro nihilo habendum (§. 3). Est ergo summa infinitorum quadratorum $\frac{1}{3}n^3$. Quadratorum vero totidem maximo æqualium summa est n^3. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{3}n^3$ *ad* n^3, hoc est, ut 1 ad 3 (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIV.

343. *Invenire rationem, quam habet summa omnium cuborum ab* 0 *in infinitum continuatorum ad summam totidem maximo æqualium.*

Sit terminus maximus n; erit summa cuborum $\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$ (§. 205 *part.* 1.). Sed eodem modo, quo in Problemate præcedente, ostenditur $\frac{1}{2}n^3$, adeoque multo magis $\frac{1}{4}n^2$, respectu ipsius $\frac{1}{4}n^4$ tandem evanescere. Erit ergo summa infinitorum cuborum $\frac{1}{4}n^4$. Sed summa totidem cuborum maximo æqualium est n_4. Quare illa ad hanc ut $\frac{1}{4}n^4$ ad n^4, hoc est, ut 1 ad 4 (§ 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLV.

344. *Invenire rationem, quam habet summa omnium potentiarum cujuscunque gradus ab* 0 *in infinitum continuatarum ad summam totidem maximæ æqualium.*

Quoniam omnes potentiæ inferiores numeri infiniti, respectu superioris, evanescunt (id quod eodem modo, quo in Probl. 153 ostenditur), summa omnium potentiarum ab 0 in infinitum continuatarum est $\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1}$ (§. 203 *part.* 1) $= \frac{1}{m+1}n^{m+1}$ in casu infiniti, ob $1 = 0$, respectu n. Sed potentia maxima est n^m adeoque summa totidem maximæ æqualium n^{m+1}.

 Ergo

Ergo summa illa ad hanc ut $\frac{1}{m+1} \times n^{m+1}$ ad n^{m+1}, consequenter ut 1 ad $m+1$ (§. 124 *part.* 1).

Ex. gr. Sit $m = 2$; erit summa quadratorum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 3.

Sit $m = 3$; erit summa cuborum infinitorum ad totidem maximo æqualium ut 1 ad 4.

Sit $m = 7$; erit summa potentiarum septimi gradus ad totidem maximæ æqualium ut 1 ad 8.

SCHOLION I.

345. *In infinitum continuari revera non aliud significat, quam eo usque continuari, donec quantitates quædam respectu aliarum evanescant (l). Nam ex. gr.* (§. 342) *in summa quadratorum* $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, *ratio termini primi* $\frac{1}{3}n^3$ *ad reliquos* $\frac{1}{2}n^2$ & $\frac{1}{6}n$ *continuo crescit. Unde non mirum, si ratio posteriorum tandem adeo exigua evadat, ut assignari amplius nequeat. Est enim primus ad secundum* $= \frac{1}{3}n^3 : \frac{1}{2}n^2 = 2n : 3$ (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente n, ratio ipsius 2n ad 3 continuo crescit* (§. 203 *Arithm.*). *Similiter terminus primus est ad tertium ut* $\frac{1}{3}n^3$ *ad* $\frac{1}{6}n$ *hoc est, ut* $2n^2$ *ad* 1 (§. 124 *part.* 1). *Quare crescente n, ratio ipsius* $2n^2$ *ad* 1 *multo magis crescit, quam in casu priore* (§. 203 *Arithm.*). *In eo igitur casu, in quo terminus secundus respectu primi fit inassignabilis, tertius multo magis inassignabilis esse debet.*

SCHOLION II.

346. *Eodem modo plurima alia Arithmeticæ infinitorum Theoremata inveniri possunt, si utamur iis, quæ in Analysi finitorum* (§. 210 & seqq.) *de numeris figuratis demonstrata sunt.*

SCHOLION III.

347. *Usum Arithmeticæ infinitorum in Geometria ostenderunt (m)* WALLISIUS *inventor, & qui eam magis excoluit,* Ismael BULIALDUS *(n). Enimvero cum per calculum* LEIBNITII *summatorium non modo ea, quæ per Arithmeticam infinitorum eruuntur, longe facilius, sed & plurima huic insuperabilia inveniri possint; e re nostra non esse judico, ut de ejus usu multa proferamus. Sufficerit igitur pauca eam in rem attulisse.*

(l) Vid. *Ontologia* nostra §. 823. & seqq.

CAPUT II.

De usu Arithmeticæ infinitorum in Geometria.

PROBLEMA CLVI.

Tab. III. Fig. 40. 348. *Invenire rationem trianguli* ACB *ad parallelogrammum* AEFB *super eadem vel æquali basi* AB, *& ejusdem altitudinis.*

Concipiatur altitudo CD in partes infinite parvas & inter se æquales divisa; triangulum ACD resolvetur in parallelogrammula, quorum bases sunt ordinatæ trianguli Mm, Nn, Oo &c. altitudines infinitesimæ ipsius CD; parallelogrammum vero EABF in totidem parallelogrammula & inter se & maximo in triangulo æqualia, quorum nempe bases basi trianguli Tab. III. Fig. 40.

AB

(m) In *Arithmetica infinitorum*, quæ extat in Vol. I. *Oper. Mathem*

(n) In *Opere novo ad Arithmeticam infinitorum.*

Tab. III. Fig. 40. AB sigillatim æquales sunt. Parallelogrammula itaque, seu elementa trianguli progrediuntur in ratione ordinatarum Mm, Nn, Oo &c. (§. 389 *Geom.*). Ordinatæ vero sunt ut abscissæ CP, CQ, CR (*§. 396 Geom.*); &, quoniam altitudo in partes æquales divisa, abscissæ crescunt in progressione arithmetica 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. Ergo elementa trianguli constituunt progressionem arithmeticam a cyphra inchoatam & in infinitum continuatam. Est adeo triangulum ACB ad parallelogrammum EABF ut 1 ad 2 (§. 341).

PROBLEMA CLVII.

Tab. II. Fig. 28. 349. *Invenire rationem spatii parabolici externi* AKLPA *nec non interni* ANLPA, *ad rectangulum* AKLN *super eadem basi* KL *& ejusdem altitudinis* AK.

Si spatium parabolicum APLKA & rectangulum KN in parallelogrammula resolvantur, ut in Probl. præc. (§. 348), altitudine communi AK in partes infinite parvas æquales divisa; elementa parabolici progrediuntur ut semiordinatæ HI, QP, KL &c. iisdem vero in rectangulo totidem respondent maximo, cujus basis KL, æqualia. Quodsi parameter parabolæ fuerit a, $AH=1$, $AQ=2$, $AK=3$ &c. erit $HI=1:a$, $QP=4:a$, $KL=9:a$ &c. (§. 391 *part.* 1), hoc est bases elementorum, adeoque elementa ipsa (§. 389 *Geom.*), progrediuntur in ratione duplicata abscissarum, hoc est, ut 0, 1, 4, 9 &c. Est ergo spatium parabolicum AKLPA ad rectangulum ANLK ut 1 ad 3 (§. 342), adeoque ANLPA ad idem rectangulum ANLK ut 2 ad 3. Tab. II. Fig. 28.

PROBLEMA CLVIII.

350. *Invenire rationem spatii paraboloidici cujuscunque* AKLPA *&* ANLPA *ad rectangulum* AKLN.

Si abscissæ AH, AQ, AK fuerint ut 1, 2, 3 &c. in paraboloidibus quibuscunque, erunt semiordinatæ HI, QP, LK ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 519 *part.* 1). Quare, cum etiam spatii paraboloidici AKLPA elementa progrediantur ut 1, 2^m, 3^m &c. (§. 349), iisdem vero in rectangulo respondeant totidem maximo æqualia, erit illud ad hoc ut 1 ad $1+m$ (§. 344); consequenter ANLPA ad idem rectangulum NK, ut $1-\frac{1}{1+m}$ ad 1, hoc est, ut $\frac{m}{1+m}$ ad 1, seu ut m ad $1+m$ (§. 124 *part.* 1).

PROBLEMA CLIX.

351. *Invenire rationem Pyramidis & Coni ad Prisma & Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III. Fig. 41.

Si Pyramidis ADBC altitudo concipiatur in partes infinite parvas æquales divisa; in prismata resolvitur, quæ inter se sunt ut bases (*§. 573 Geom.*), hoc est, ut plana similia a, b, c, d (§. 474 *Geom.*). Quoniam vero altitudines illorum prismatum sunt ut 1, 2, 3 &c. planorum latera homologa erunt itidem ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 566 *Geom.*) adeoque ipsa plana ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 406 *Geom.*) Quare cum elementis pyramidis respondeant in prismate super eadem basi & ejus-

 dem

Tab. III. Fig. 41. dem altitudinis totidem maximo æqualia: Pyramis ad Prisma est ut 1 ad 3 (§. 342).

Quodsi ACBD fuerit conus, plana *a*, *b*, *c*, *d* erunt circuli: qui cum progrediantur ut 0, 1, 4, 9 &c. (§. 387 *Geom.*), in cylindro vero ipsis respondeant totidem maximo *d* æquales; conus quoque ad cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis est ut 1 ad 3 (§. 342).

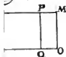
PROBLEMA CLX.

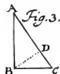
352. *Invenire rationem Conoidis parabolici, ex rotatione Parabolæ* AMSR *circa axem* AR *geniti, ad Cylindrum super eadem basi & ejusdem altitudinis.* Tab. III.

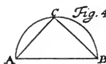
Constat ex superioribus (§. 197), Fig. 42. altitudine AR in particulas infinite parvas & æquales divisa, Conoides resolvi in cylindrulos, quorum bases sunt circuli radiis PM, QN, SR descripti, quique adeo sunt ut isti circuli (§. 573 *Geom.*). Quodsi AP = 1, AQ = 2, AR = 3; erit PM = 1, QN = $\sqrt{2}$, SR = $\sqrt{3}$ (§. 392 *part.* 1) adeoque circuli sunt ut 0, 1, 2, 3 &c. (§. 408 *Geom.*). Quare cum iisdem respondeant in cylindro totidem maximo æquales; omnia elementa conoidis ad omnia elementa cylindri sunt ut 1 ad 2 (§. 341).

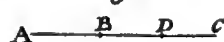
FINIS Analyseos infinitorum, & Tomi Primi.

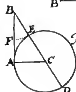
Fig: Algebr: Tab: I.

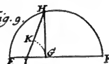


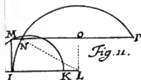


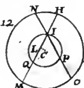


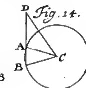


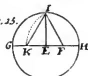


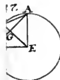


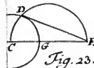


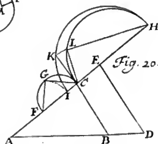




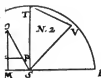


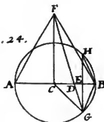


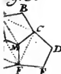


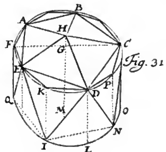


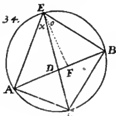
Figur: Algebr: Tab: II.











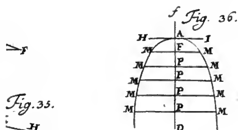


Fig. 36.
f
H
A
I
M
F
P
D

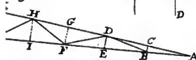


Fig. 35.
H
G
D
C
I
F
E
B
A

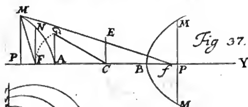


Fig 37.
M
N
Q
E
P
F
A
C
B
f
Y

Fig. 39.
1.2.3
4
5
C
I
II
III
IV
M
V

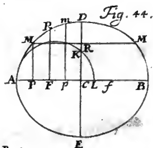


Fig. 44.
D
m
R
M
K
A
P
F
p
C
L
f
B
E

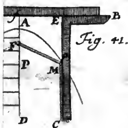


Fig. 41.
A
E
B
F
P
M
D
C

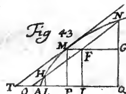


Fig 43
N
M
G
F
H
T
O
A
L
P
I
Q

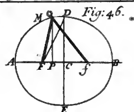


Fig: 46.
M
D
A
F
P
C
f
B
E

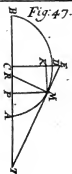


Fig: 47.
B
C
R
P
A
K
M
T

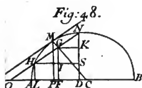


Fig: 48.
M
N
G
K
H
S
O
A
L
P
F
D
C
B

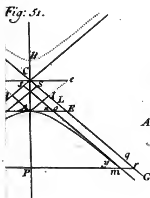
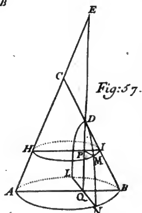


Fig: 51.
B
C
e
L
E
P
m
q
r
G


E
C
Fig: 57.
D
H
I
P
M
L
A
Q
B
N

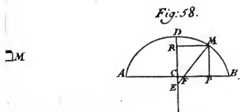
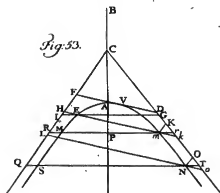
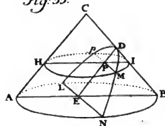


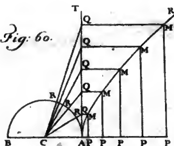
Fig: 58.
D
R
M
A
C
F
P
B
E

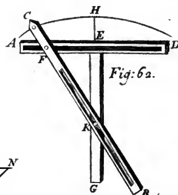
M

Fig: Algebr: Tab: V.








C
H
E
A
D
F
Fig: 62.
K
G
B

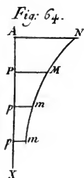
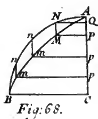


Fig: 64.
A
N
P
M
p
m
p
m
X


N
A
Q
n
M
P
m
p
n
m
p
B
C
Fig: 68.

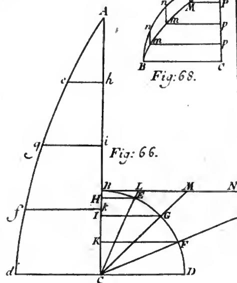

A
e
h
q
i
Fig: 66.
f
B
L
M
N
H
E
k
I
G
K
F
d
C
D

Fig. 70.

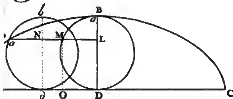


Fig. 72.

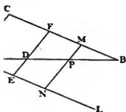
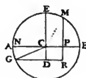


Fig. 73.



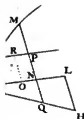


Fig. 76.

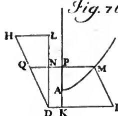


Fig. 78.

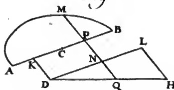


Fig. Algebr. Tab. VIII

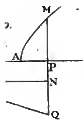
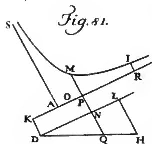


Fig. 81.



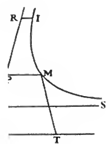


Fig. 85.

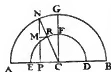


Fig. 84.

Fig. 88.

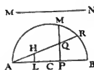


Fig. 87.

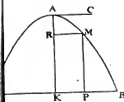


Fig: Algebr: Tab: IX.

90.

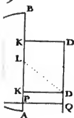


Fig: 91.

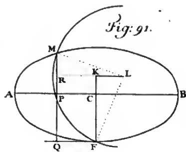
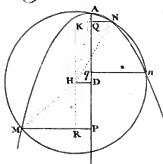


Fig: 93.



ig: 95.

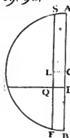


Fig: 96.

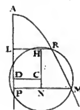


Fig: Algebr: Tab: X.

Fig: 98.

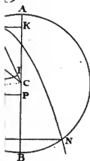


Fig: 99.

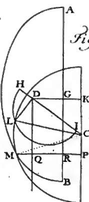


Fig: 101.

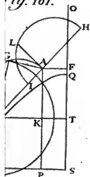


Fig: 102.

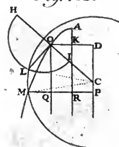
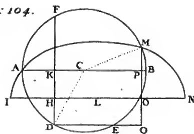


Fig: 104.



ig: 106.

Fig: 107.

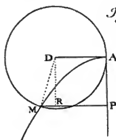
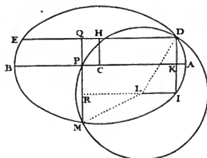


Fig: 109.



S

T

Fig: 112.

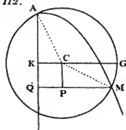


Fig. 115.

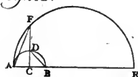


Fig. 114.

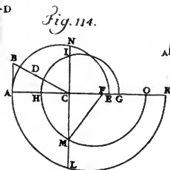


Fig. 118.

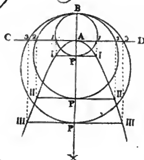


Fig. 117.

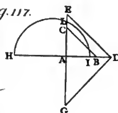


Fig. 121.

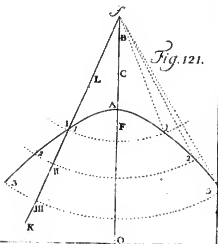
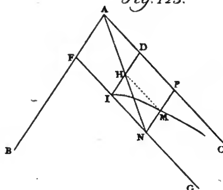
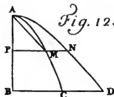


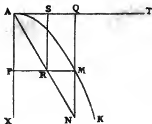
Fig. 120.

S

I







Au:-